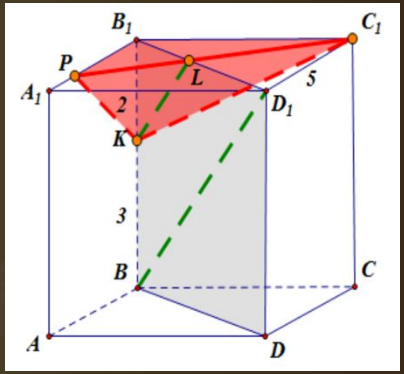
МБОУ «Ергачинская СОШ»

Решение заданий 14 (С2)

по материалам **ЕГЭ**

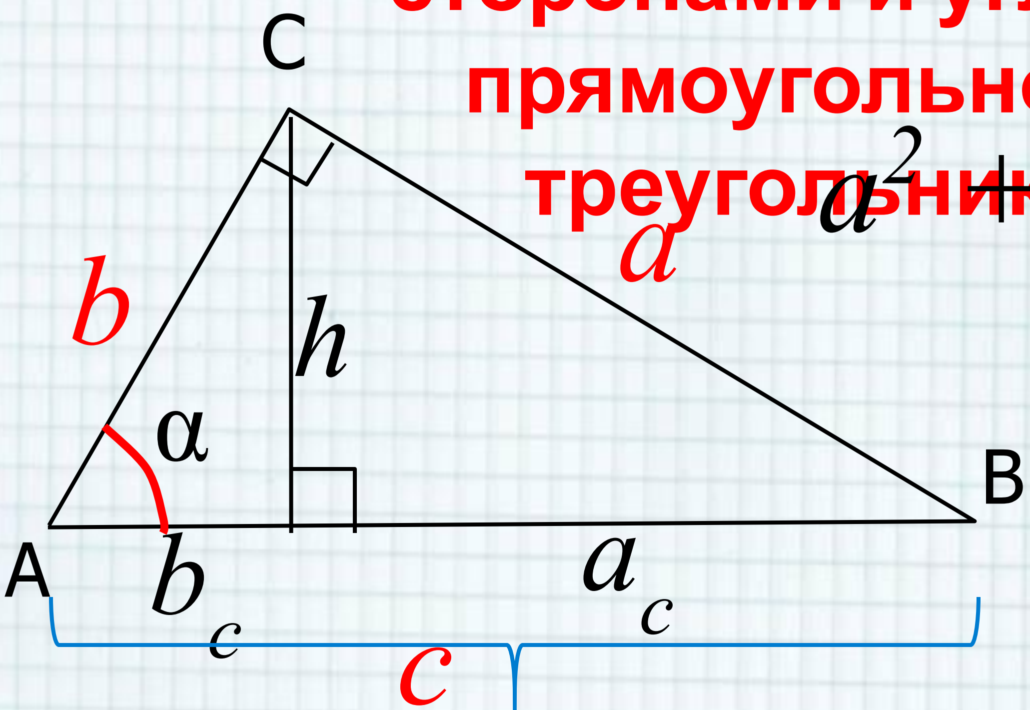
профильного уровня

(нахождение углов, расстояний, построение сечений)



Повторение.

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

$$h = \sqrt{b_c \cdot a_c}$$

$$a = \sqrt{a_c \cdot c}$$

$$b = \sqrt{b_c \cdot c}$$

Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

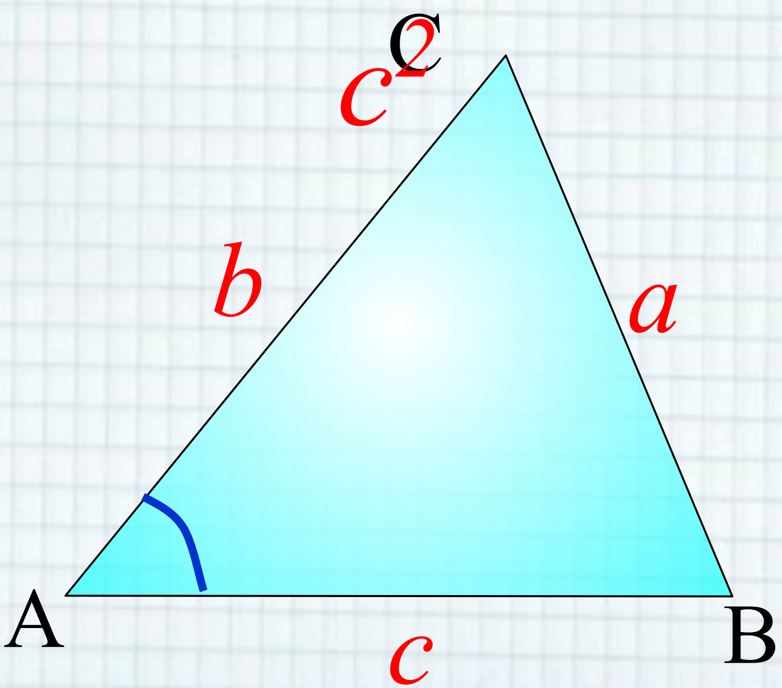
Квадрат стороны треугольника равен

сумме квадратов двух других сторон

минус удвоенное произведение этих сторон

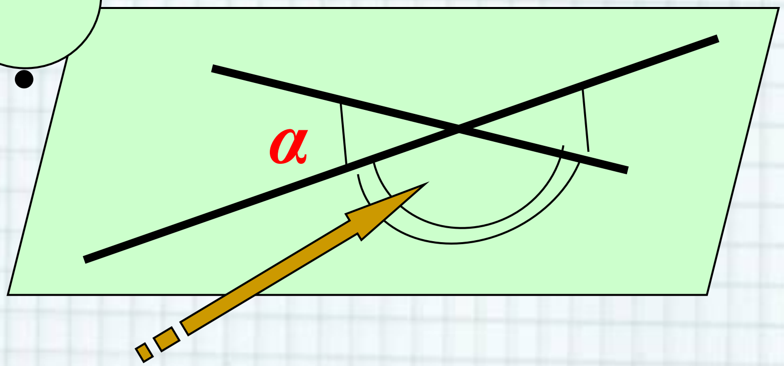
на косинус угла между ними.

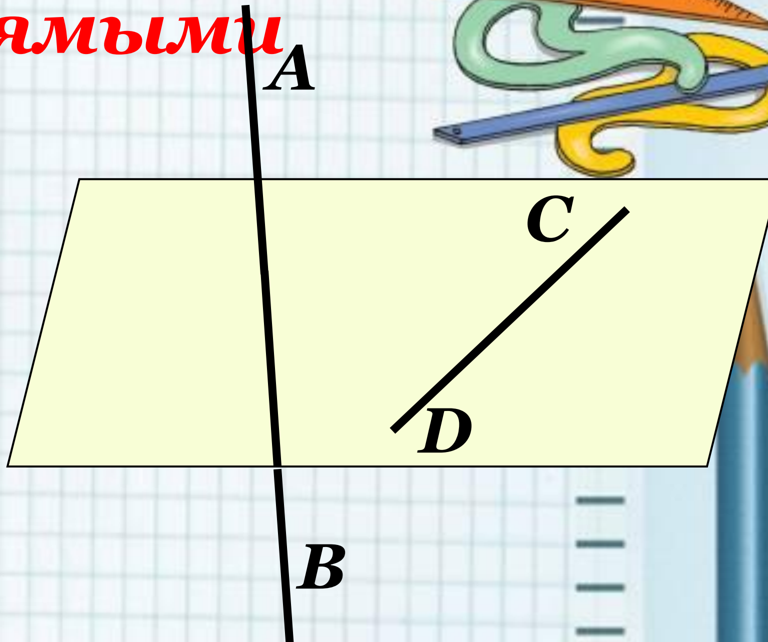
$$a^2 = b^2 + \quad - 2bc\cos A$$



Угол между пересекающимися и скрещивающимися прямыми

1.

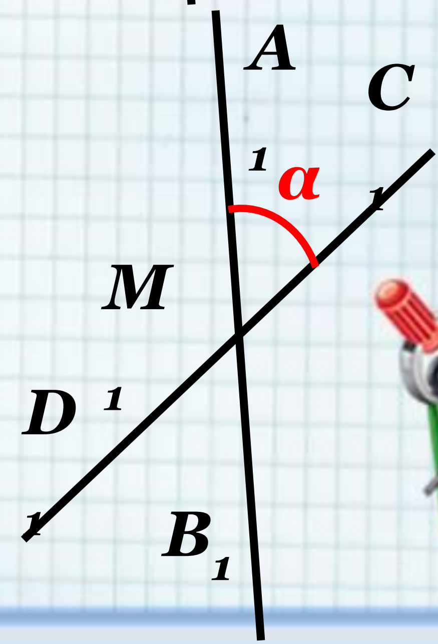




$180^o - \alpha$

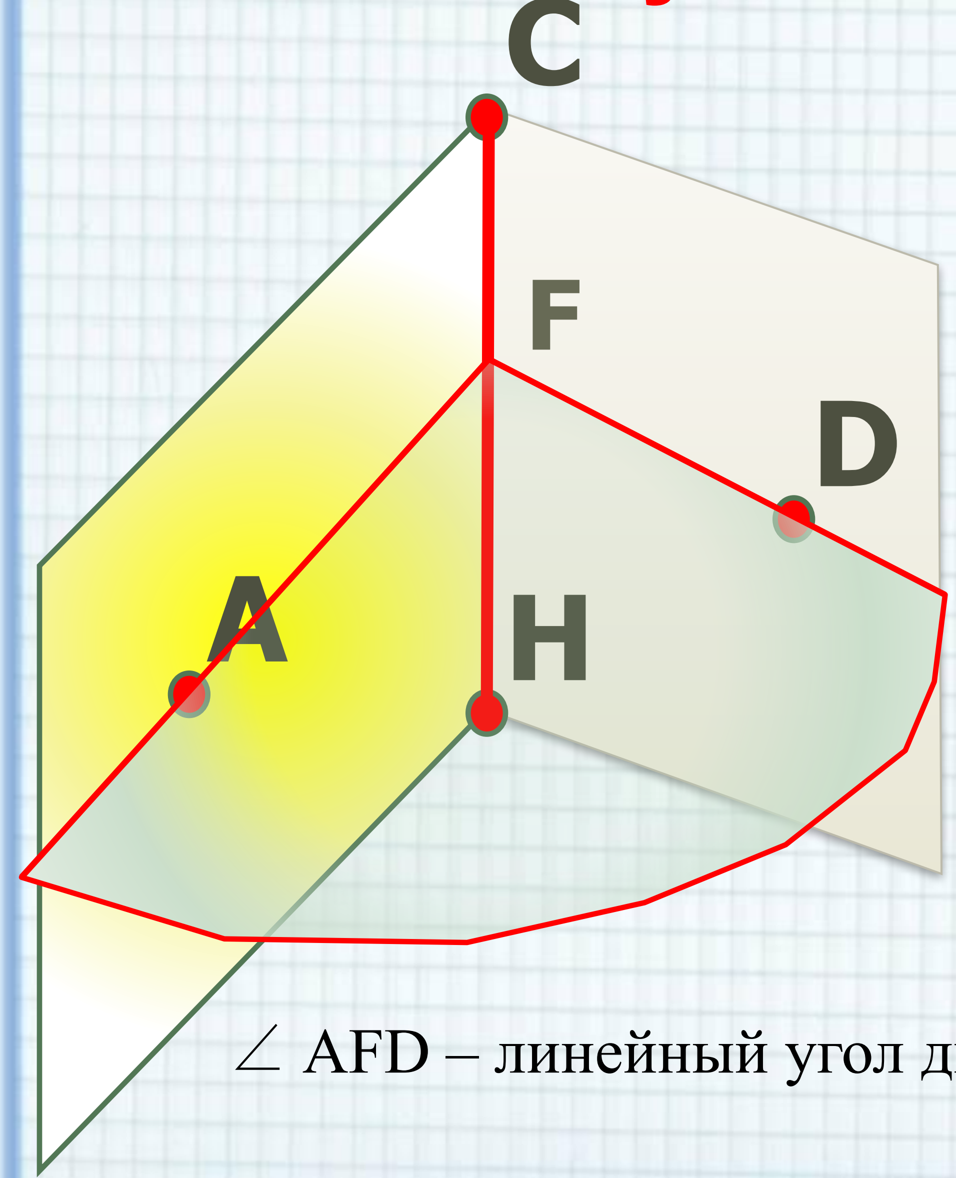
$0^o < \alpha \leq 90^o$

2.



Угол между скрещивающимися прямыми AB и CD определяется как угол между пересекающимися прямыми A_1B_1 и C_1D_1, при этом $A_1B_1 \parallel AB$ и $C_1D_1 \parallel CD$.

Угол между плоскостями



∠ ((ACH); (CHD)) – это двугранный ∠ ACHD, где CH- общее ребро.

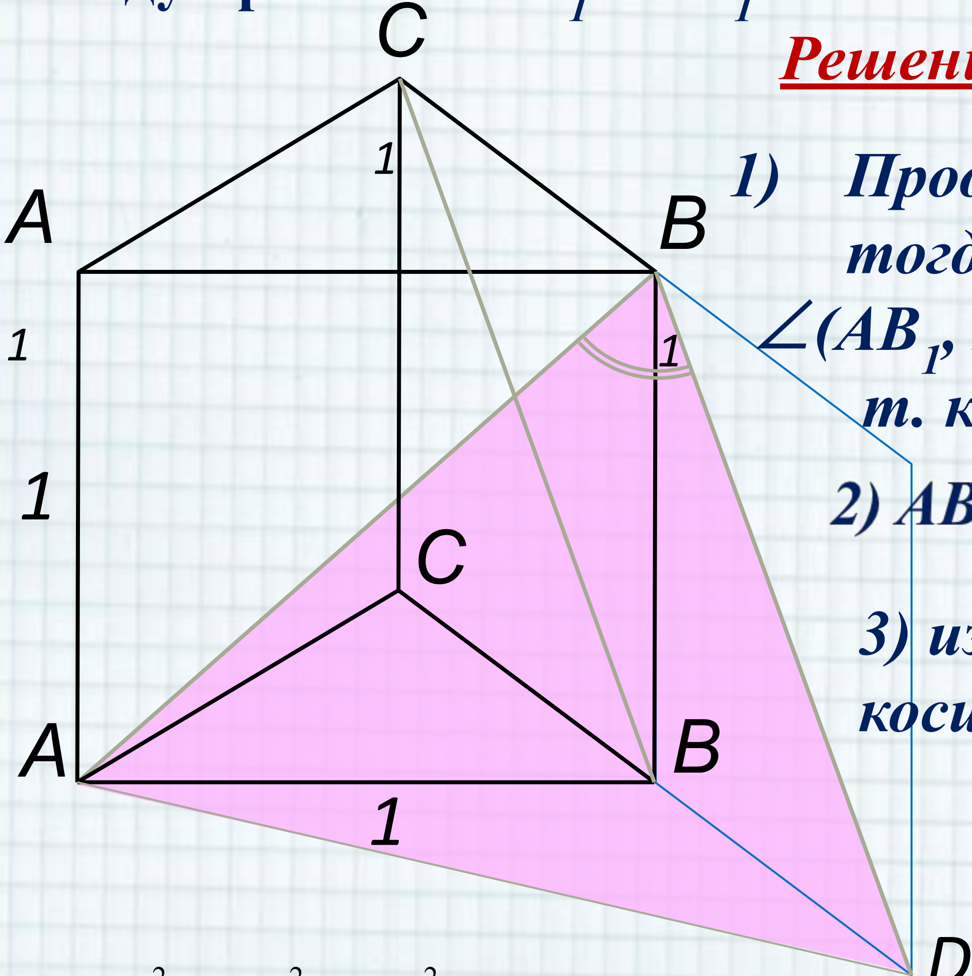
Точки A и D лежат на гранях этого угла.

AF ⊥ CH, FD ⊥ CH.

∠ AFD – линейный угол двугранного ∠ ACHD

Задача № 1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.



Решение:

1) *Продлим плоскость BCC_1, тогда $\angle(AB_1, BC_1) = \angle(AB_1, DB_1) = \angle AB_1D$, т. к. $C_1B \parallel B_1D$.*

2) $AB_1 = B_1D = \sqrt{2}$ *из* ΔABB_1

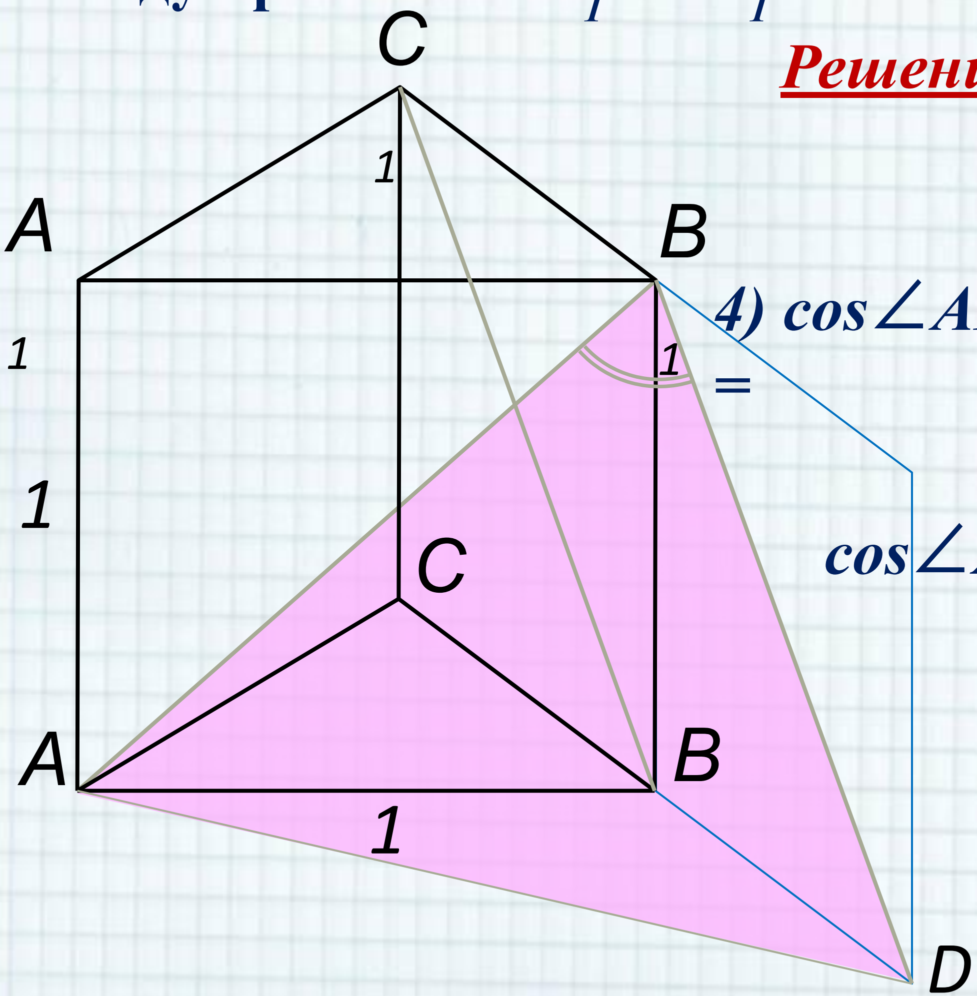
3) *из* ΔABD *по теореме косинусов*

$$DA^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot DB \cdot \cos 120° =$$

$$= 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-0,5) = 3$$

Задача № 1 (продолжение)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.



Решение:

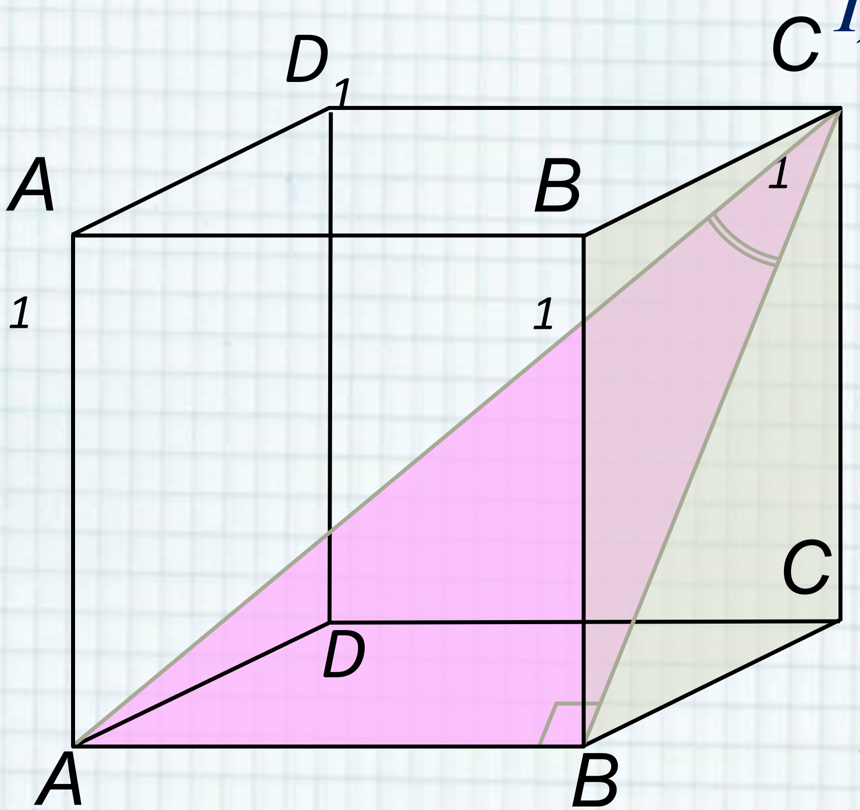
4) $$\cos\angle AB_1D = \frac{AB_1^2 + B_1D^2 - AD^2}{2\cdot AB_1\cdot B_1D}$$

$$\cos\angle AB_1D = \frac{2 + 2 - 3}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Ответ: 0,25 .

Задача № 2

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1.



Решение:

1) BC_1 - проекция прямой AC_1 на плоскость (BCC_1),
так как $AB \perp (BCC_1)$,
$AB \perp BC_1$;
$\angle(AC_1, (BCC_1)) = \angle(AC_1, C_1B) = \angle AC_1B$,
т.е. ΔABC_1 – прямоугольный

2) $AB_1 = B_1D = \sqrt{2}$ из ΔABB_1

3) $tg\angle AC_1B = \frac{AB}{BC_1} = \frac{a}{\ } = \frac{1}{\ }$

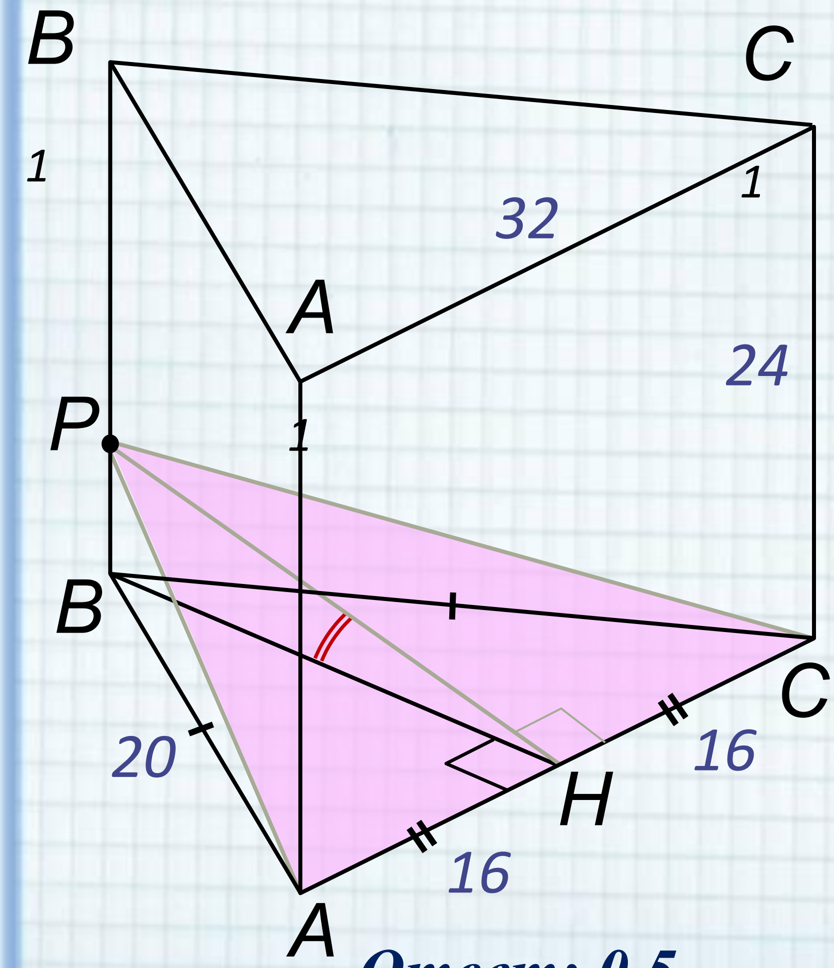
2) $AB_1 = B_1D = \sqrt{2}$ из ΔABB_1

2) $AB_1 = B_1D = \sqrt{2}$ из ΔABB_1

2) $AB_1 = B_1D = \sqrt{2}$ из ΔABB_1

Задача № 3

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P принадлежит ребру BB_1, причем $BP : PB_1 = 1 : 3$. Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP.



Решение:

1) Так как $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, то $\angle((A_1B_1C_1), (ACP)) = \angle((ABC),(ACP))$.

2) Т.к. $BH \perp AC$ (высота р/б Δ), то по теореме о трех перпендикулярах $PH \perp AC$.

3) Тогда $\angle PHB$ – линейный угол двугранного $\angle$ $PACB$. Найдем его из прямоугольного ΔPHB.

4) $PB = ¼\ BB_1 = ¼ \cdot 24 = 6$,

5) $BH^2 = AB^2 - AH^2$ (из ΔAHB)

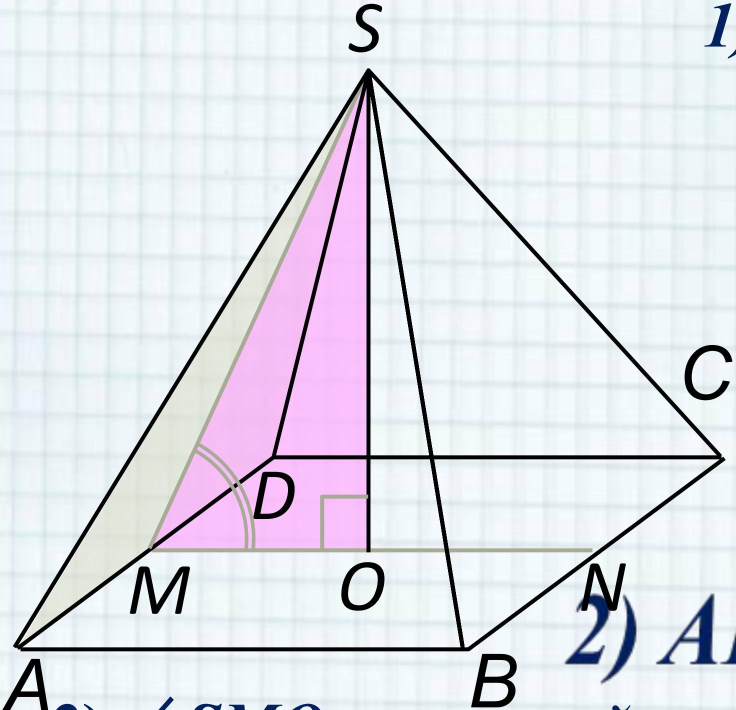
$BH^2 = 20^2 - 16^2 = 144$, $BH = 12$;

6) $tg\angle PHB = PB/HB = 6/12 = 0{,}5$.

***Ответ:* 0,5 .**

Задача № 4

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью SAD.



Решение:

1)Так как ABCD – квадрат, то AB ⊥ AD. Поэтому проекция AB на плоскость (SAD) будет ⊥ AD.

Значит, искомый угол – двугранный угол при ребре основания AD.

$$2)\ AB_1 = B_1D = \sqrt{2}\ \text{из}\ \Delta ABB_1$$

3) ∠SMO – искомый угол, косинус которого найдем из прямоугольного ΔSMO

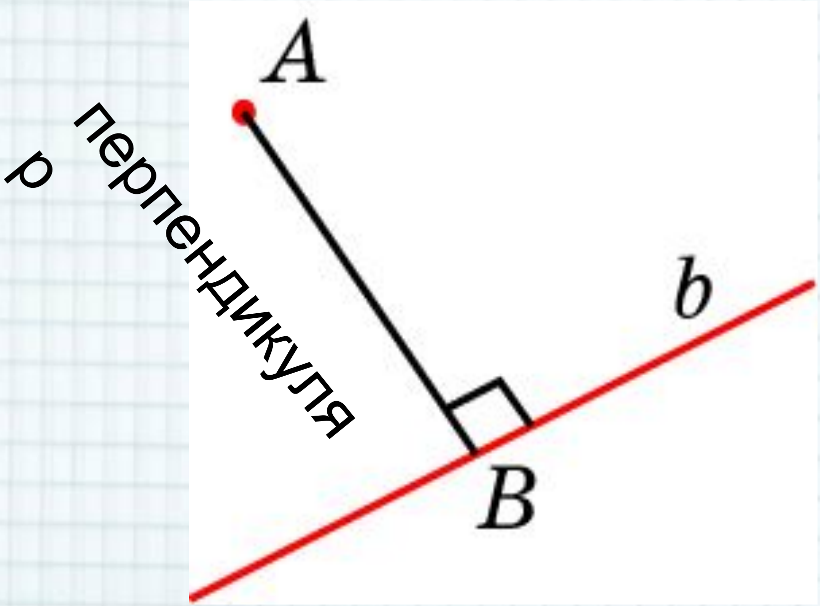
$$\cos\angle SMO = \frac{MO}{SM} = \frac{0,5}{\ } = \frac{1}{\ }$$

$2)\ AB_1 = B_1D = \sqrt{2}$ $2)\ AB_1 = B_1D = \sqrt{2}\ \text{из}\ \Delta ABB_1$

$2)\ AB_1 = B_1D = \sqrt{2}\ \text{из}\ \Delta ABB_1$

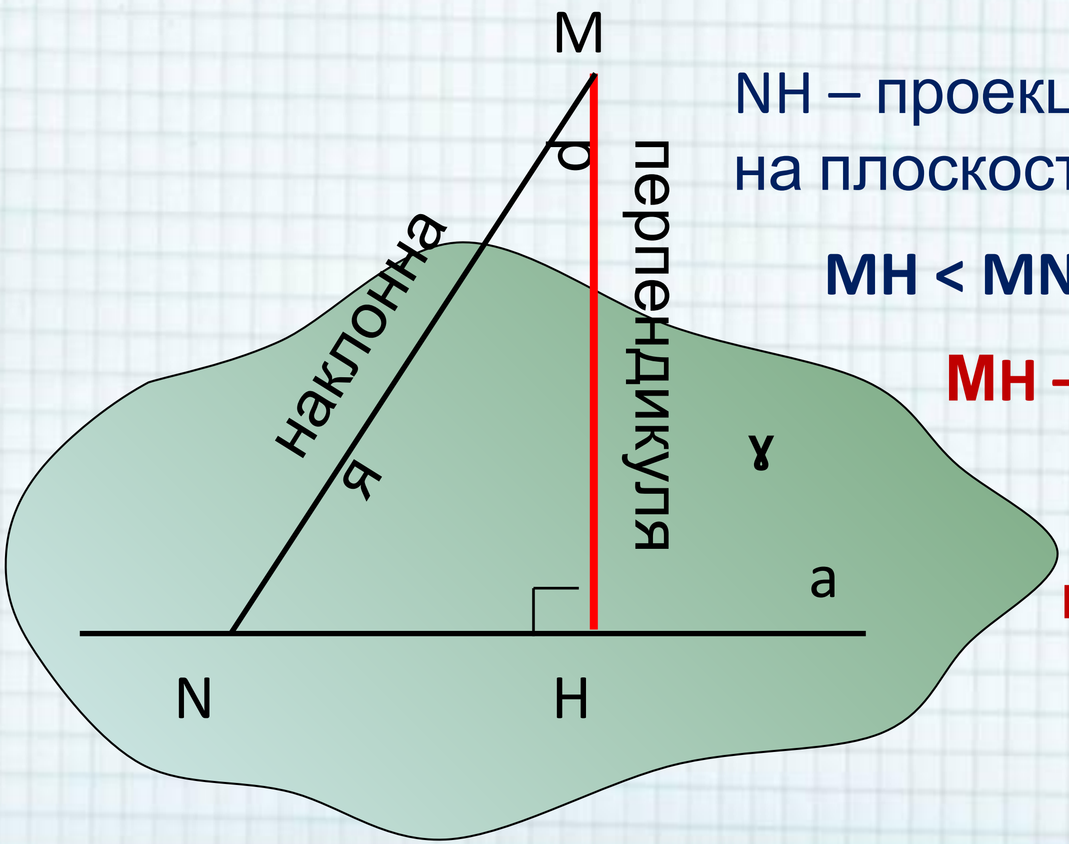
Расстояние от точки до прямой

Определение. **Расстоянием от точки до прямой в пространстве называется длина перпендикуляра, проведённого из данной точки к данной прямой.**



Расстояние от точки до плоскости

Определение: Расстоянием от точки до плоскости является длина перпендикуляра, проведённого из данной точки к данной плоскости.



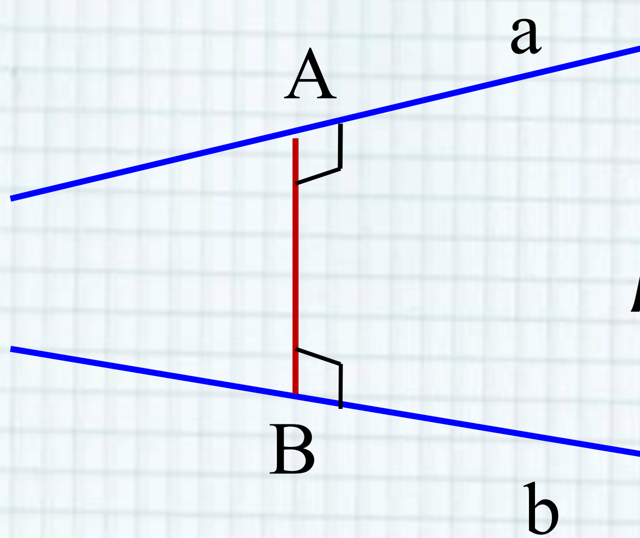
NH – проекция наклонной на плоскость **ɣ**

MH < MN

MH – расстояние от M до плоскости ɣ

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называют отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них.

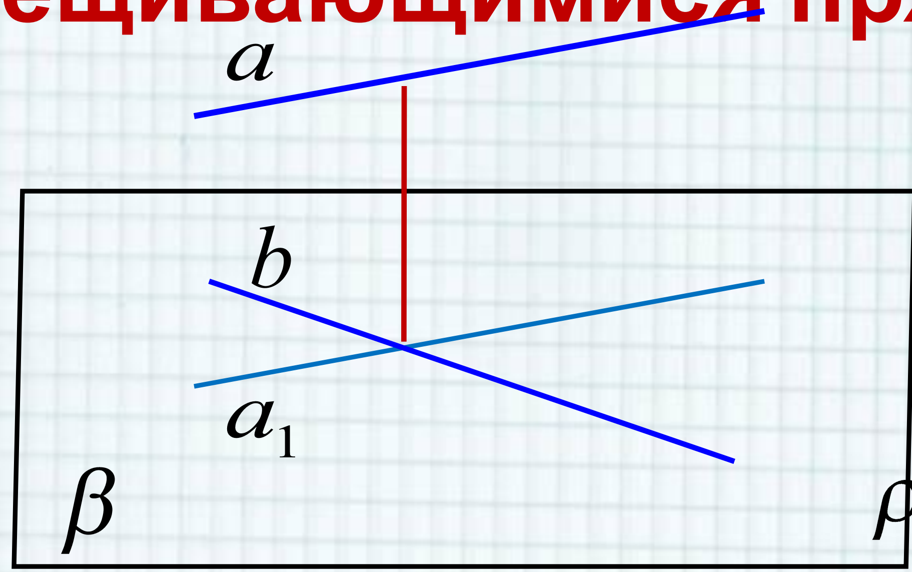


$$\rho(a;b) = AB$$

Определение. Расстоянием между скрещивающимися прямыми называют длину их общего перпендикуляра.

Способы вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми

1 способ.



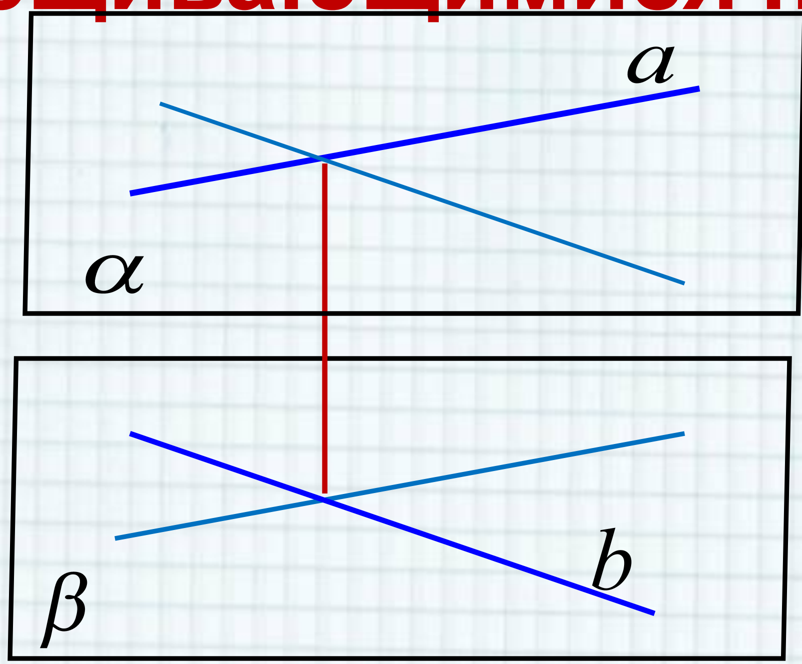
$$\beta \parallel a$$

$$\rho(a;b)=\rho(a;\beta)$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой.

Способы вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми

2 способ.



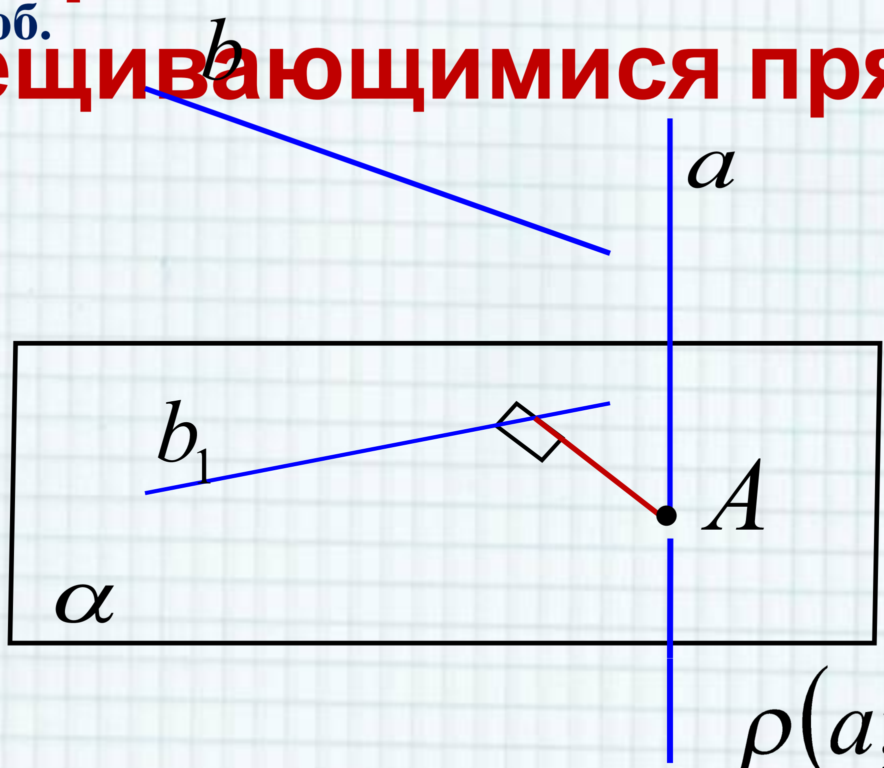
$$\alpha \parallel \beta$$

$$\rho(a;b) = \rho(\alpha;\beta)$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между двумя параллельными плоскостями, содержащими эти прямые.

Способы вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми

3 способ.



$$\alpha \perp a$$

$$a \to A$$

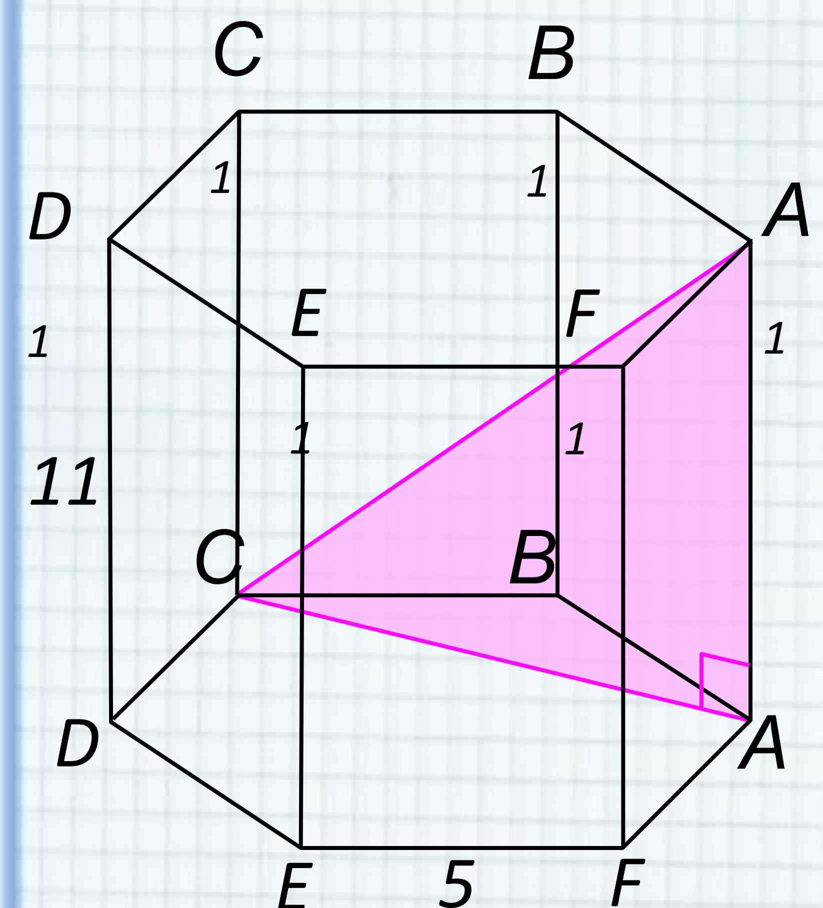
$$b \to b_1$$

$$\rho(a;b) = \rho(A;b_1)$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между их проекциями на плоскость, перпендикулярную одной из них.

Задача № 5

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые рёбра равны 11, найдите расстояние от точки C до прямой A_1F_1.



Решение:

1)Так как ABCDEF – правильный шестиугольник, то

$CA \perp AF$.

$CA \perp A_1A$ по определению правильной призмы.

$\Rightarrow$ $CA \perp (AA_1F_1)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, т.е.

CA –перпендикуляр к плоскости,

CA_1 - наклонная ,

A_1A – проекция наклонной,

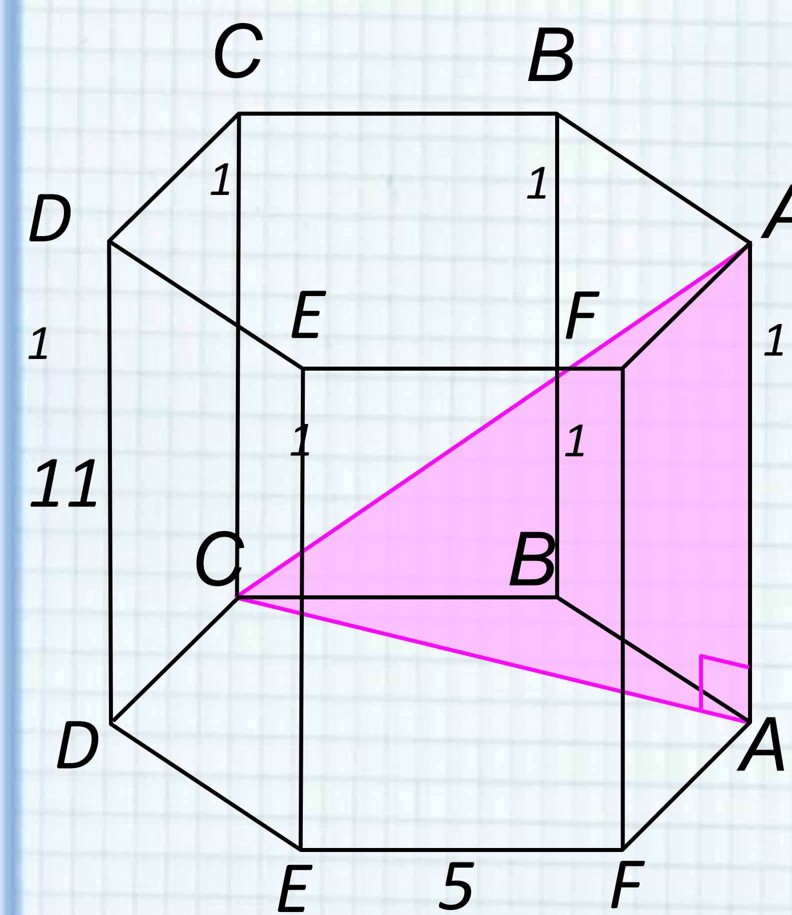
$A_1A \perp A_1F_1$;

A_1F_1 – прямая в плоскости.

Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $CA_1 \perp A_1F_1$, значит длина отрезка CA_1 равна искомому расстоянию.

Задача № 5 (продолжение)

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые рёбра равны 11, найдите расстояние от точки C до прямой A_1F_1.



Решение:

1) *Доказано, что CA_1 - искомое расстояние.*

2) *Из* Δ **ABC (AB=BC=5,** $\angle B = 120^0$ **)** **по теореме косинусов найдём CA:**

$$CA^2 = CB^2 + BA^2 - 2CB \cdot AB \cdot \cos\angle B,$$

$$\cos 120^0 = -\cos 60^0 = -0{,}5,$$

$$CA = 5\sqrt{3}.$$

3) *Из* $\Delta CAA_1,$ $\angle A = 90^0$ *по теореме Пифагора найдём CA_1:*

$$CA_1^2 = CA^2 + AA_1^2$$

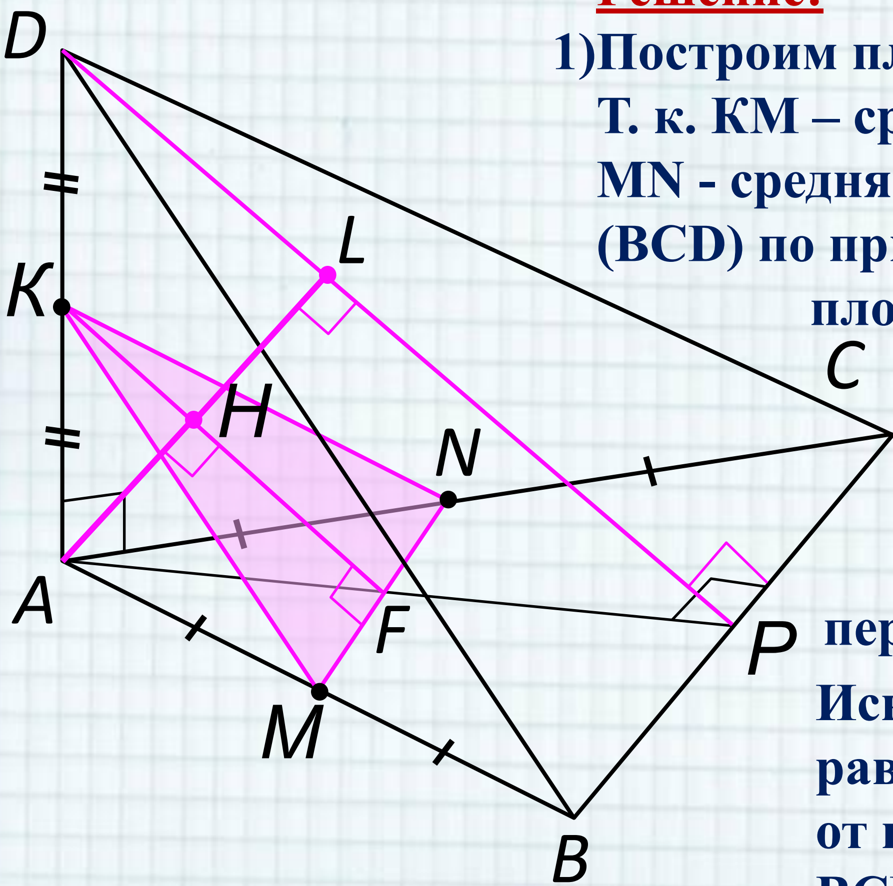
$$CA_1^2 = 75 + 121 = 196.$$

$$CA_1 = 14$$

Ответ: *14.*

Задача № 6

Ребро *AD* пирамиды *DABC* перпендикулярно плоскости основания *ABC*. Найдите расстояние от *A* до плоскости, проходящей через середины ребер *AB*, *AC* и *AD*, если $AD = 2\sqrt{5}$, $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$.



Решение:

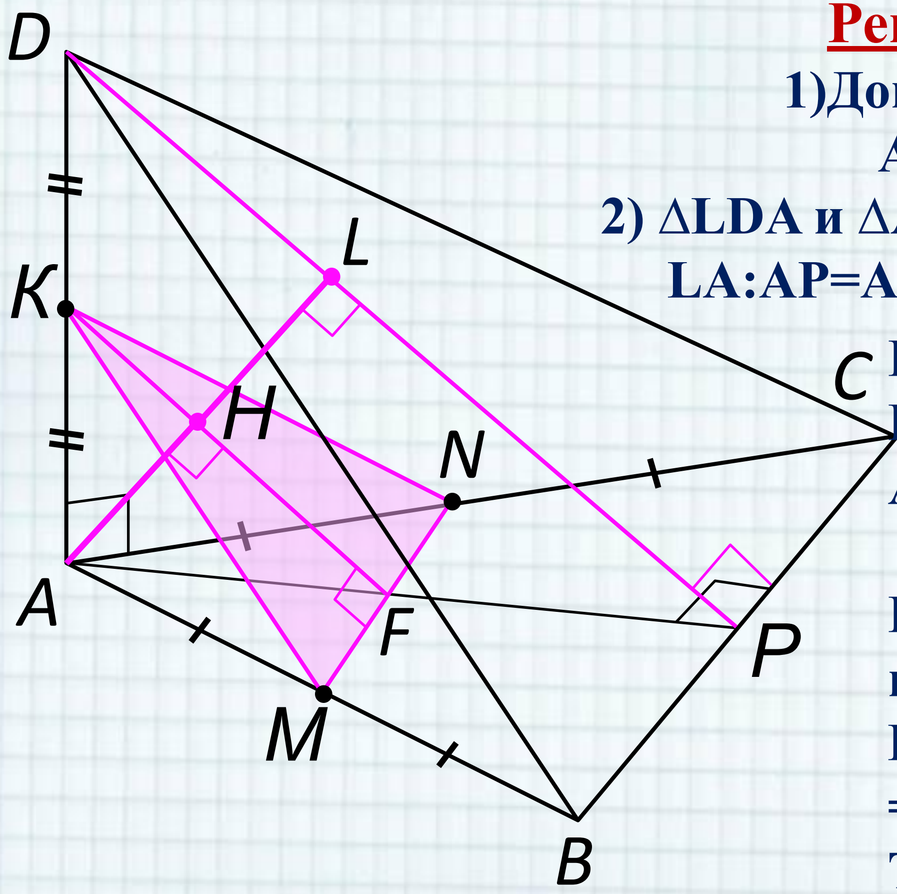
1)Построим плоскость KMN.

Т. к. KM – средняя линия ∆ADB, KM ∥ DB, MN - средняя линия ∆ABC, MN ∥ CB, то (KMN) ∥ (BCD) по признаку ∥ плоскостей. AP–медиана и высота р/б ∆ABC , KF–медиана и высота р/б ∆KMN. DP ⊥ BC по теореме о трёх перпендикулярах. KF ∥DP.

Искомое расстояние AH равно половине расстояния от вершины A до плоскости BCD, т.к. (KMN) ∥ (BCD) и KF – средняя линия ∆ ADP.

Задача № 6 (продолжение).

Ребро *AD* пирамиды *DABC* перпендикулярно плоскости основания *ABC*. Найдите расстояние от *A* до плоскости, проходящей через середины ребер *AB*, *AC* и *AD*, если *AD* = $2\sqrt{5}$, *AB* = *AC* = 10, *BC* = $4\sqrt{5}$.



Решение:

1)Доказано, что

AH - искомое расстояние.

2) ΔLDA и ΔADP подобны по двум углам,

LA:AP=AD:DP, тогда AL=(AP*AD):DP.

Найдём AP из ΔABP по теореме Пифагора (*AB*=10, *BP* = $2\sqrt{5}$):

$AP^2 = AB^2 - BP^2 = 100 - 20 =$

$= 80$; AP= $4\sqrt{5}$

Найдём DP из ΔADP

по теореме Пифагора:

$DP^2 = AD^2 + AP^2 =$

$= 20 + 80 = 100$; DP = 10.

Тогда AL =($4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}$):10=4

Итак, AH = ½ AL = 2.

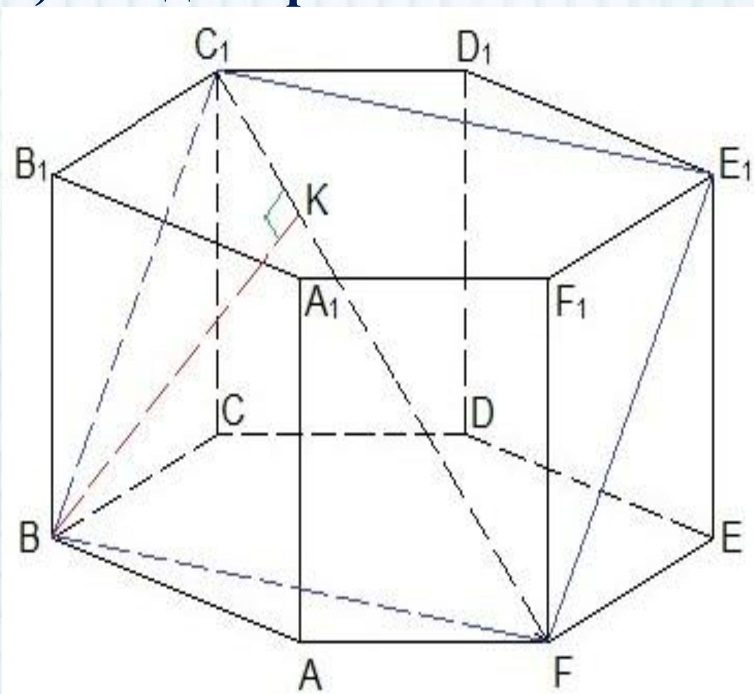
Ответ: 2.

Задача № 7

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки B, C_1 и F.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой C_1F.



Решение:

а) 1) BC_1, BF, FE_1 // C_1B , E_1C_1 => Сечение – четырёхугольник BC_1E_1F с диагональю C_1F.

$$2)\ AB_1 = B_1D = \sqrt{2}\ \text{из}\ \Delta ABB_1$$

$$2)\ AB_1 = B_1D = \sqrt{2}\ \text{из}\ \Delta ABB_1$$

4) Так как $\angle CBF=90°$, то по теореме о трёх перпендикулярах, $BF \perp BC_1$. Значит, сечение BC_1E_1F – прямоугольник. Диагональ прямоугольника $C_1F^2=BF^2+BC_1^{\ 2}$; $C_1F^2=3+2=5$.

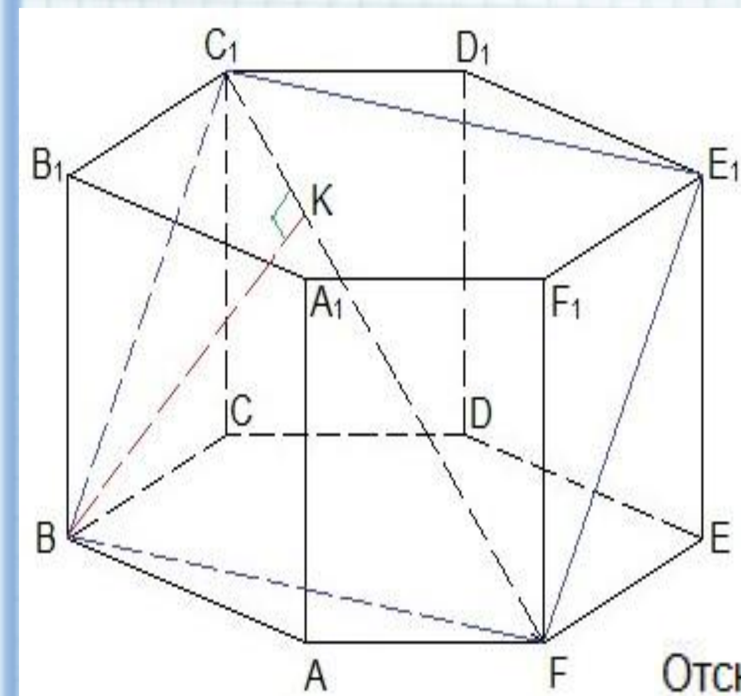
$$2)\ AB_1 = B_1D = \sqrt{2}\ \text{из}\ \Delta ABB_1$$

Задача № 7 (продолжение)

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки B, C_1 и F.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой C_1F.



Решение.

б) Сечение – прямоугольник BC_1E_1F.
$BK \perp C_1F$, BK – искомое расстояние от точки B до прямой C_1F.
Найдем BK как высоту из ΔFBC_1,
Используя 2 формулы площади треугольника.

$$S_{\Delta FBC_1} = \frac{1}{2} BC_1 \cdot BF = \frac{1}{2} C_1F \cdot BK.$$

Отсюда следует $BK = \dfrac{BC_1 \cdot BF}{C_1F} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

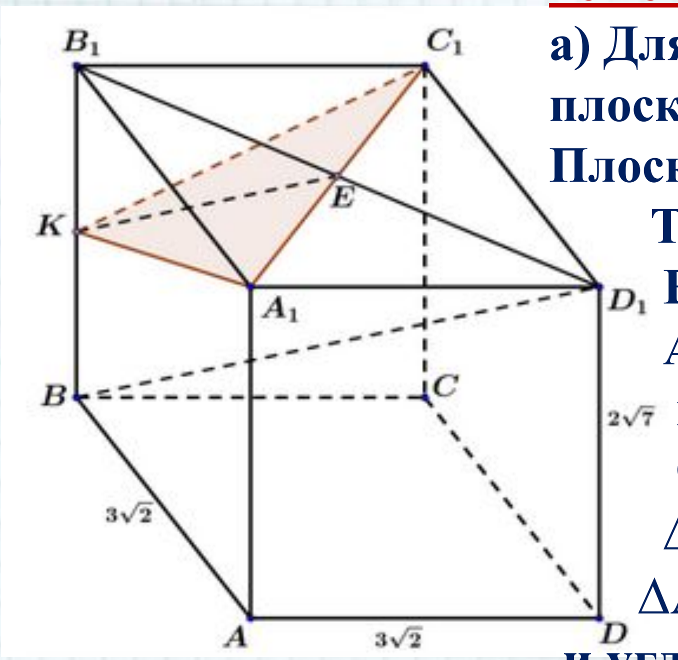
Ответ: $\sqrt{\dfrac{6}{5}}$.

Задача №8

Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат ABCD со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K − середина ребра BB1. Через точки K и C1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.



Решение.

а) Для построения сечения призмы плоскостью α, проведём $KE \parallel BD_1$, $E \in B_1D_1$. Плоскость α проходит через точки K, C_1 и E.

Так как K – середина BB_1 и $KE \parallel BD_1$, то E – середина диагонали A_1C_1 квадрата $A_1B_1C_1D_1$. Значит, плоскость α пересекает грань $A_1B_1C_1D_1$ по диагонали A_1C_1.

Соединив точки K, C_1 и A_1, получаем ΔA_1KC_1- сечение призмы плоскостью α.

$\Delta A_1KB_1 = \Delta C_1KB_1$ по двум сторонам и углу между ними ($A_1B_1 = C_1B_1$), B_1K – общая сторона, $\angle A_1B_1K = \angle C_1B_1K = 90^0$.

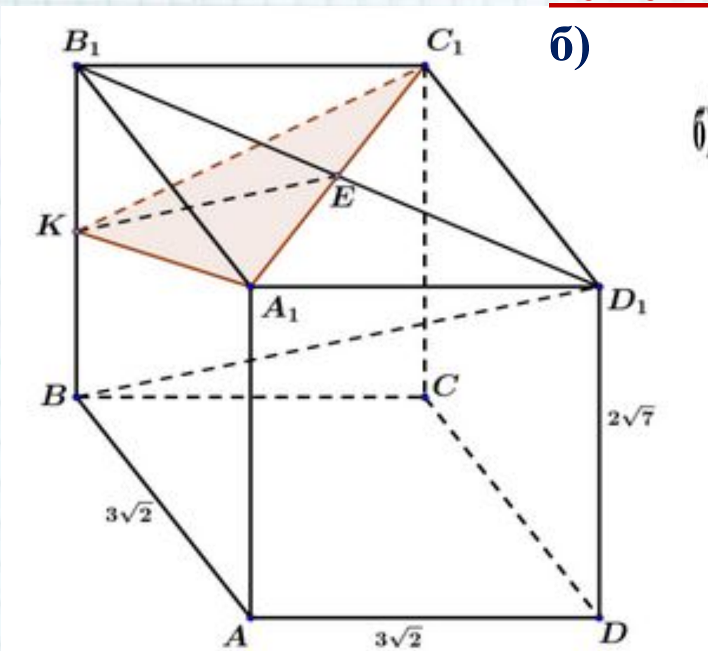
Из равенства треугольников следует, что $A_1K = C_1K$, значит ΔA_1KC_1 - равнобедренный.

Задача №8 (продолжение)

Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат ABCD со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K − середина ребра BB_1. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.



Решение.

б)

б) $P_{A_1KC_1} = A_1K + C_1K + A_1C_1.$

$$B_1K = \frac{1}{2}\cdot BB_1 = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{7} = \sqrt{7}.$$

$$A_1K = C_1K = \sqrt{B_1K^2 + B_1C_1^{\,2}} = \sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{7+18} = 5.$$

$$A_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^{\,2} + B_1C_1^{\,2}} = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{18+18} = 6.$$

$$P_{A_1KC_1} = 5 + 5 + 6 = 16.$$

Ответ: б) 16.

Задачи для самостоятельного решения

1) На ребре AA1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 2:5$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 6$, а точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 5$, $AD = 6$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1.

2) $AB_1 = B_1D = \sqrt{2}$ *из* ΔABB_1

2) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 4.

Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

Ответ: б) arctg 2.

Задачи для самостоятельного решения

3) В правильной шестиугольной призме A…F_1 все рёбра равны 2.

а) Докажите, что плоскость BB_1F перпендикулярна прямой B_1C_1.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости FB_1C_1.

$2)\ AB_1 = B_1D = \sqrt{2}$ *из* ΔABB_1

4) В пирамиде DABC известны длины ребер AB=AC=DB=DC=13, DA =6, BC=24.

а) Постройте прямую, перпендикулярную прямым DA и BC.

б) Найдите расстояние между прямыми DA и BC.

Ответ: б) 4.

Задачи для самостоятельного решения

5) Высота правильной треугольной пирамиды равна 20, а медиана её основания равна 6.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через её вершину и перпендикулярной ребру основания.

б) Найдите тангенс угла, который образует боковое ребро с плоскостью основания.

Ответ: б) 5.

6) В правильной четырёхугольной пирамиде MABCD с вершиной M сторона основания равна 3, а боковое ребро равно 6.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.

б) Найдите площадь этого сечения.

Ответ: б) 6.

Используемая литература:

1) И. В. Ященко, С.А. Шестаков, А. С. Трепалин «Подготовка к ЕГЭ по математике 2016, профильный уровень», Москва, издательство МЦНМО, 2016.

2) Интернет-ресурсы:
http://www.fipi.ru/
http://mathege.ru/or/ege/Main
https://math-ege.sdamgia.ru/
http://alexlarin.net/
https://ege-ok.ru/

3) Шаблон презентации сайт http://pedsovet.su/ , автор Фокина Л. П.