

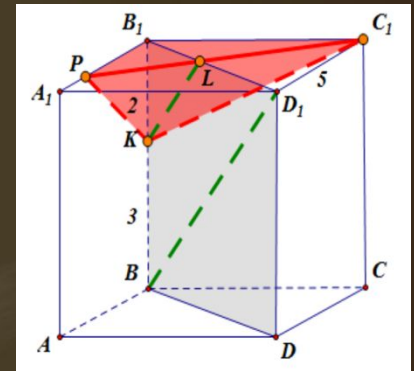
Решение заданий 14 (С2)

по материалам ЕГЭ

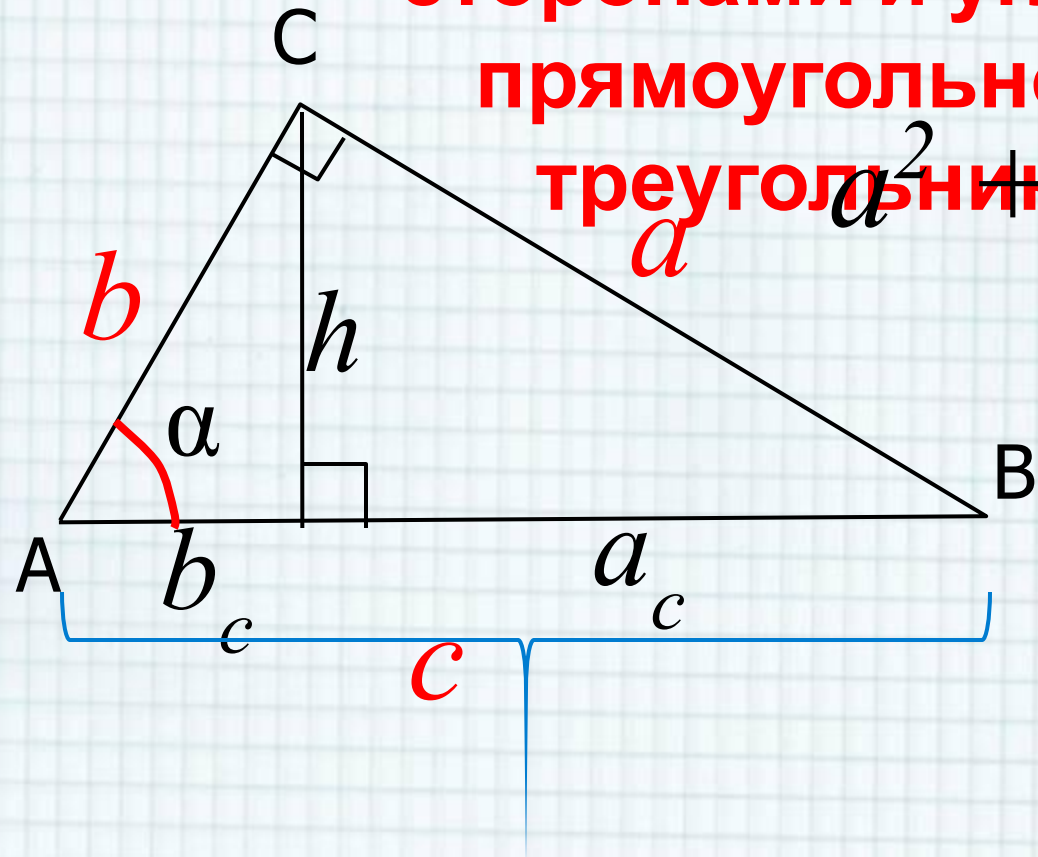
профильного уровня

(нахождение углов,

расстояний, построение сечений)



Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника



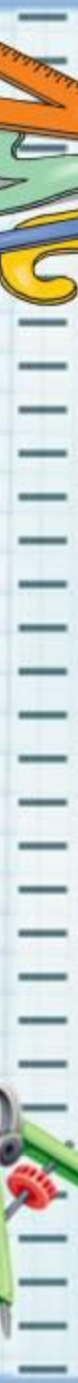
$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$h = \sqrt{b_c \cdot a_c} \quad a = \sqrt{a_c \cdot c} \quad b = \sqrt{b_c \cdot c}$$



Теорема

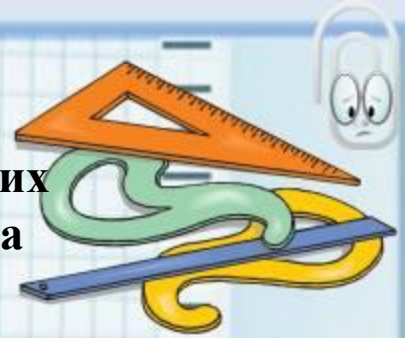
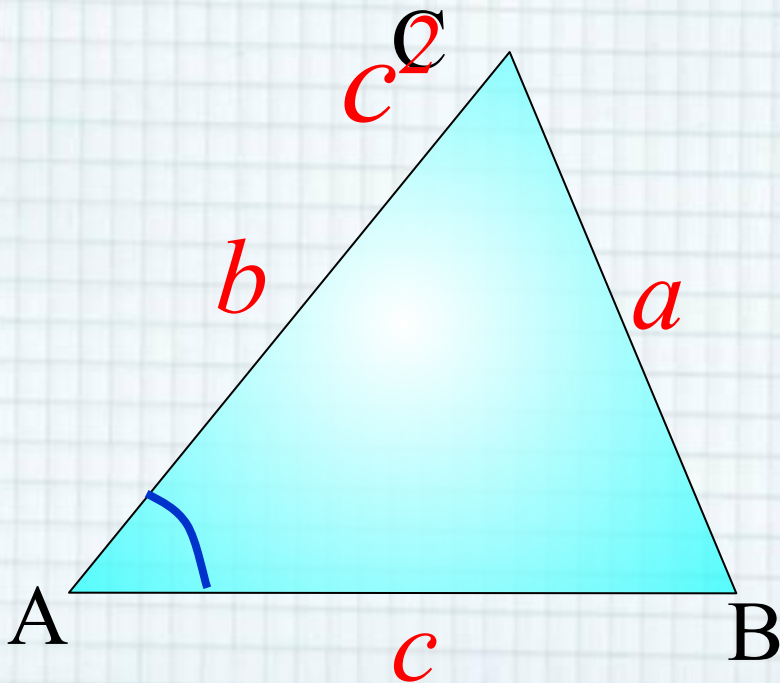
КОСИНУСОВ

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

минус удвоенное произведение этих сторон

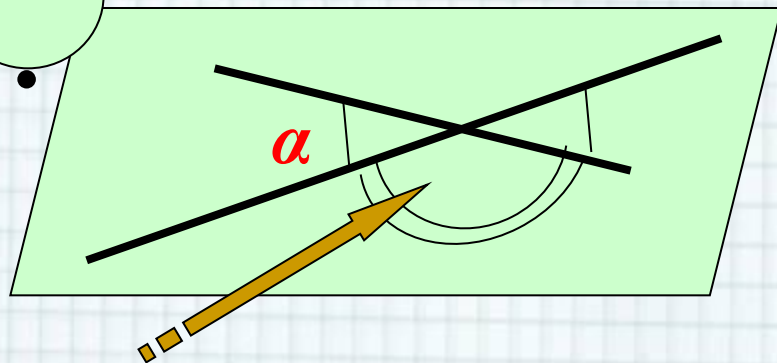
на косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



Угол между пересекающимися и скрещивающимися прямыми

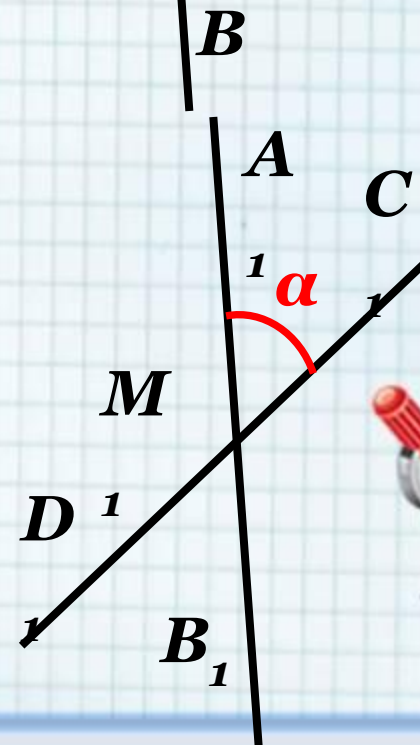
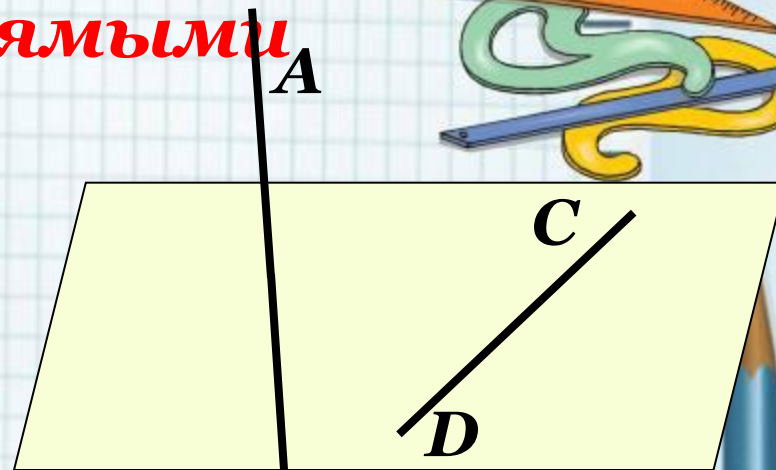
1



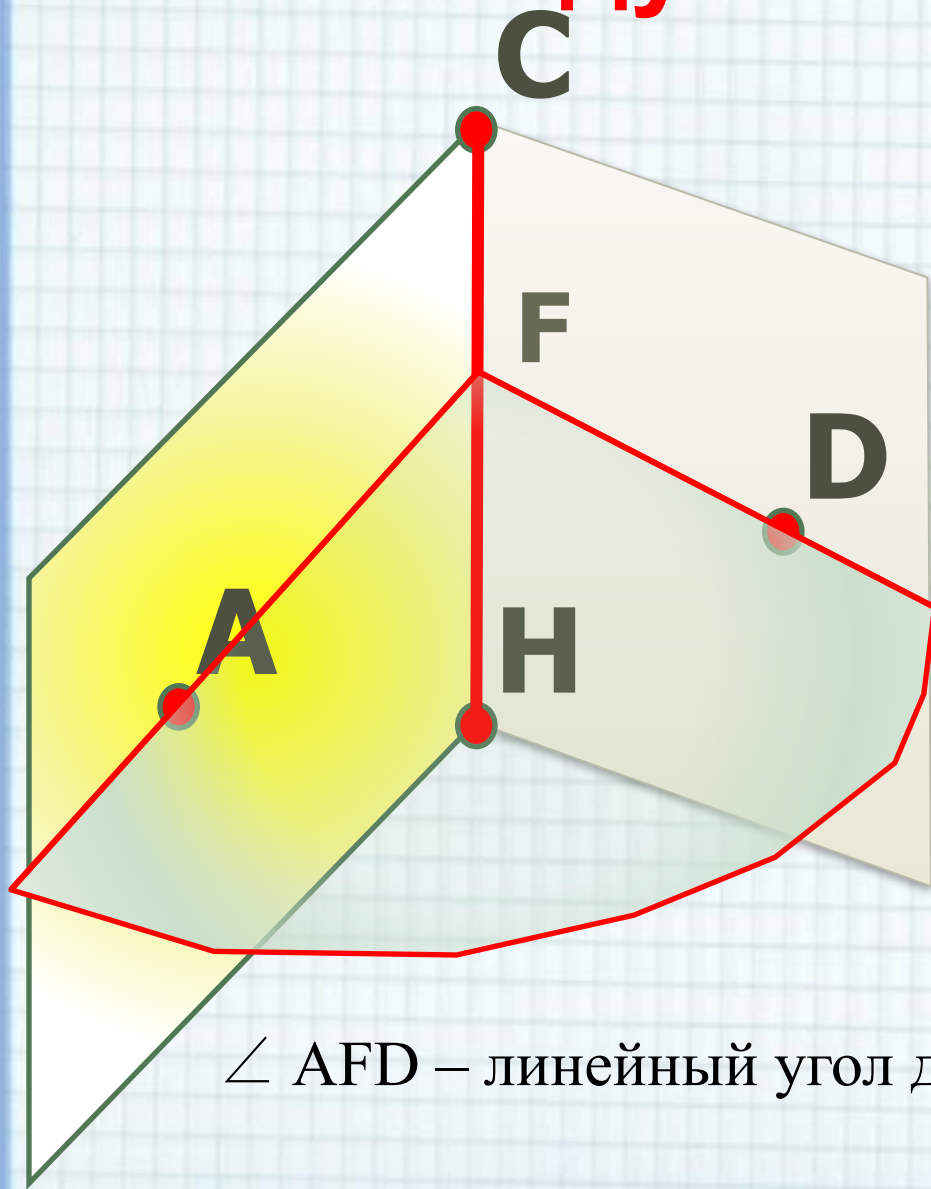
$$180^\circ - \quad 0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$$

2

Угол между скрещивающимися прямыми AB и CD определяется как угол между пересекающимися прямыми A_1B_1 и C_1D_1 , при этом $A_1B_1 \parallel AB$ и $C_1D_1 \parallel CD$.



Угол между плоскостями



$\angle ((ACH); (CHD))$

– это двугранный
 $\angle ACHD$, где CH –
общее ребро.

Точки A и D лежат
на гранях этого
угла.

$AF \perp CH$, $FD \perp CH$.

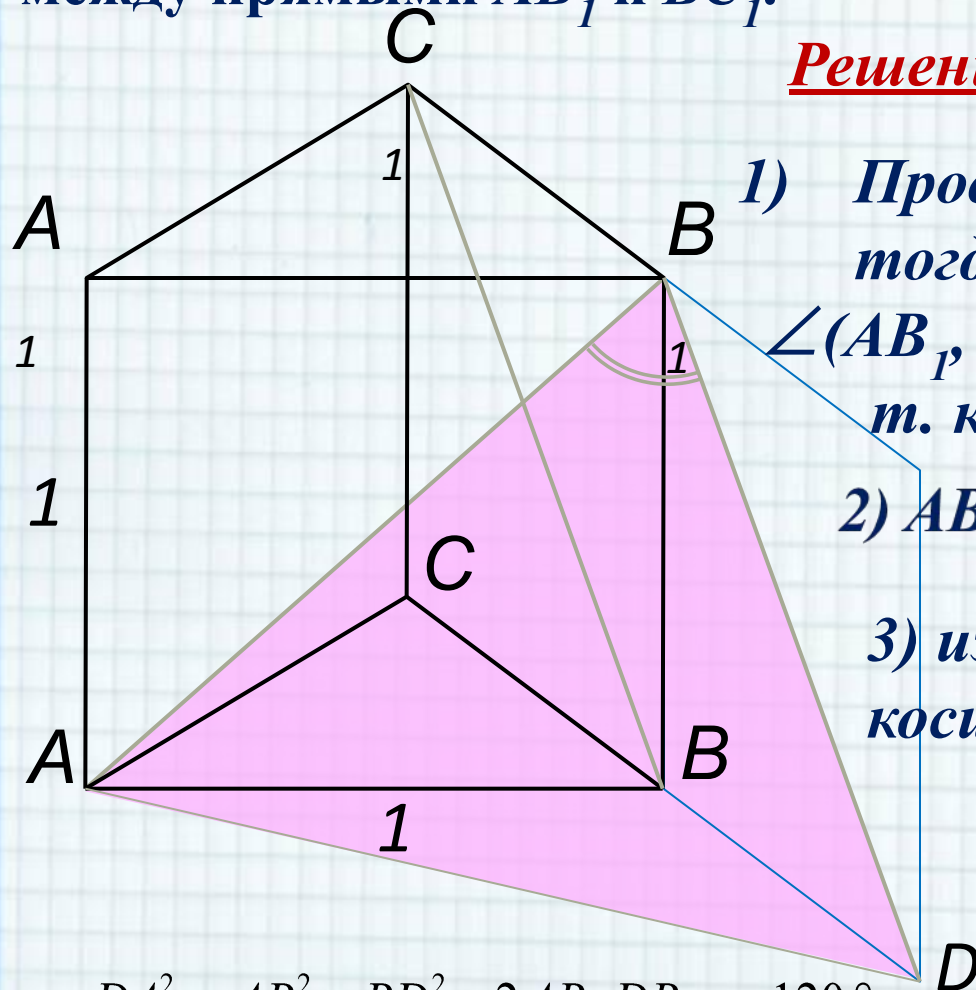
$\angle AFD$ – линейный угол двугранного $\angle ACHD$



Задача № 1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .

Решение:



1) Продлим плоскость BCC_1 , тогда $\angle(AB_1, BC_1) = \angle(AB_1, DB_1) = \angle AB_1D$, т. к. $C_1B \parallel B_1D$.

2) $AB_1 = B_1D = \sqrt{2}$ из $\triangle ABB_1$

3) из $\triangle ABD$ по теореме косинусов

$$\begin{aligned} DA^2 &= AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot DB \cdot \cos 120^\circ = \\ &= 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-0,5) = 3 \end{aligned}$$

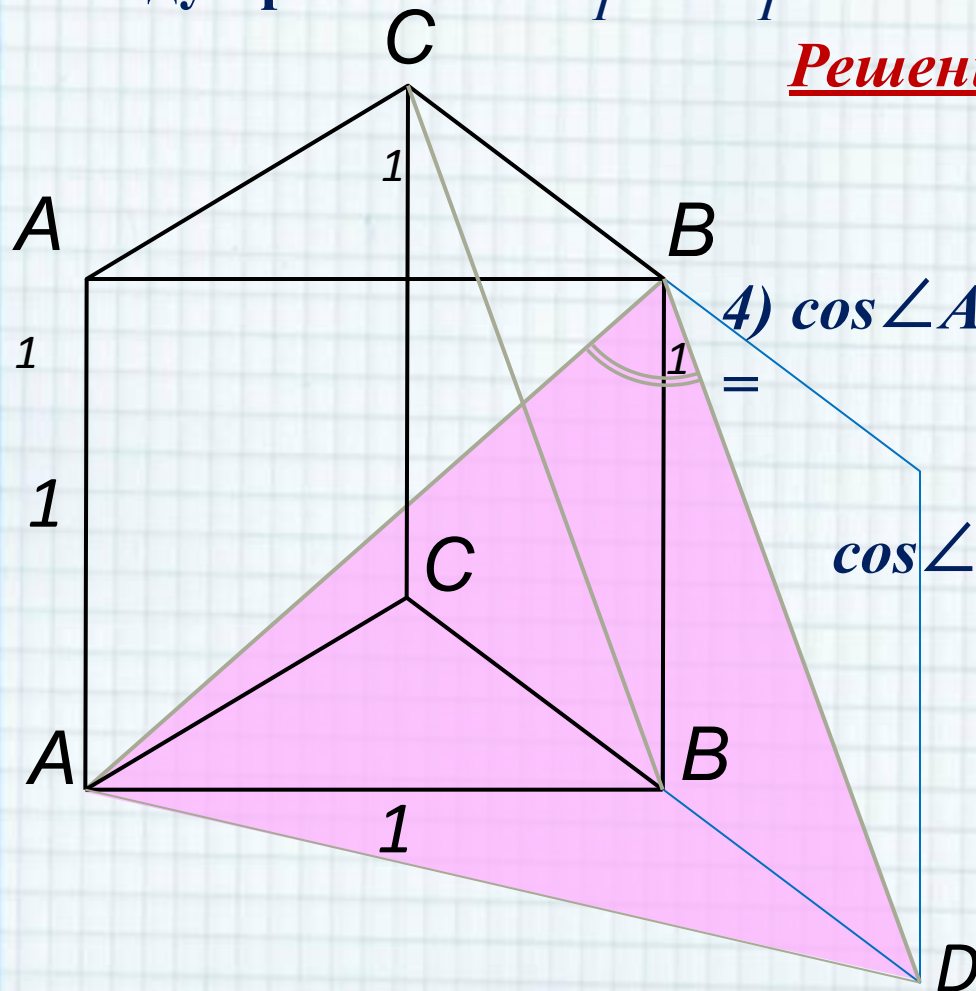


Задача № 1 (продолжение)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .



Решение:



$$4) \cos \angle AB_1D = \frac{AB_1^2 + B_1D^2 - AD^2}{2 \cdot AB_1 \cdot B_1D}$$

$$\cos \angle AB_1D = \frac{2 + 2 - 3}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

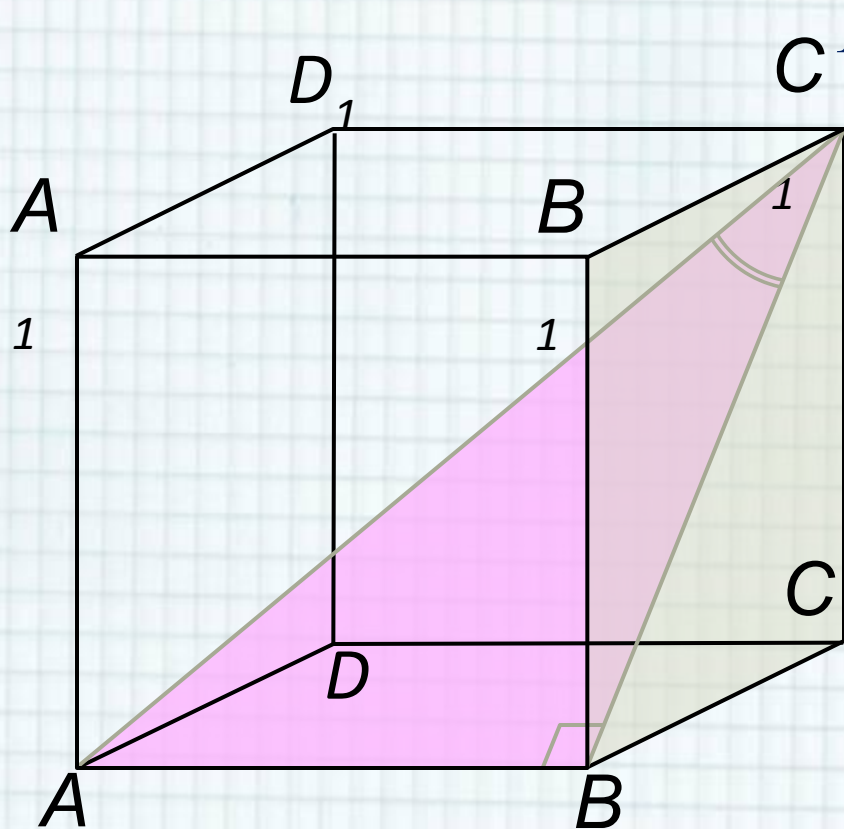
Ответ: 0,25.



Задача № 2

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1 .

Решение:



1) BC_1 - проекция прямой AC_1 на плоскость (BCC_1) , так как $AB \perp (BCC_1) \Rightarrow$

$AB \perp BC_1$;

$\angle(AC_1, (BCC_1)) = \angle(AC_1, C_1B) = \angle AC_1B$, т.е. $\triangle ABC_1$ - прямоугольный

2) $AB_1 = B_1D = \sqrt{2}$ из $\triangle ABB_1$

$$3) \operatorname{tg} \angle AC_1B = \frac{AB}{BC_1} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2) AB_1 = B_1D = \sqrt{2} \text{ из } \triangle ABB_1$$

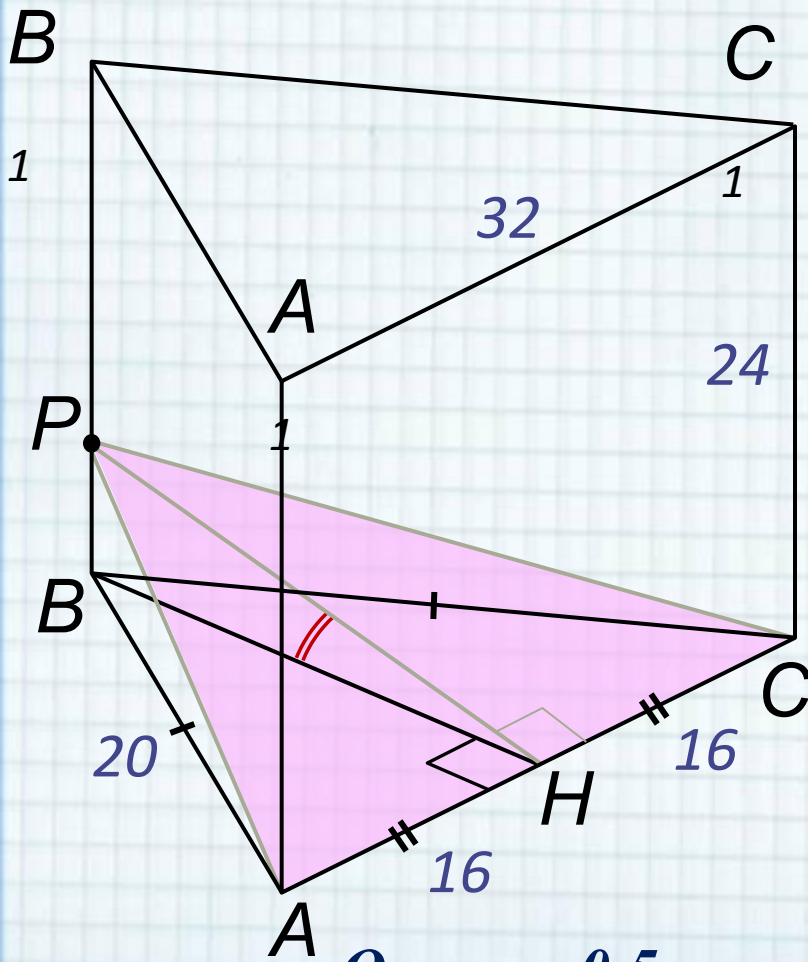
$$2) AB_1 = B_1D = \sqrt{2} \text{ из } \triangle ABB_1$$



Задача № 3

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, является равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P принадлежит ребру BB_1 , причем $BP : PB_1 = 1 : 3$. Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP .

Решение:



1) Так как $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, то $\angle((A_1B_1C_1), (ACP)) = \angle((ABC), (ACP))$.

2) Т.к. $BH \perp AC$ (высота р/б Δ), то по теореме о трех перпендикулярах $PH \perp AC$.

3) Тогда $\angle PHB$ – линейный угол двугранного $\angle PACB$. Найдем его из прямоугольного ΔPHB .

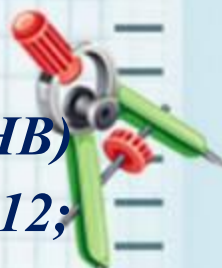
4) $PB = \frac{1}{4} BB_1 = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6$,

5) $BH^2 = AB^2 - AH^2$ (из ΔAHB)

$BH^2 = 20^2 - 16^2 = 144$, $BH = 12$;

6) $\operatorname{tg} \angle PHB = PB / HB = 6 / 12 = 0,5$.

Ответ: 0,5 .



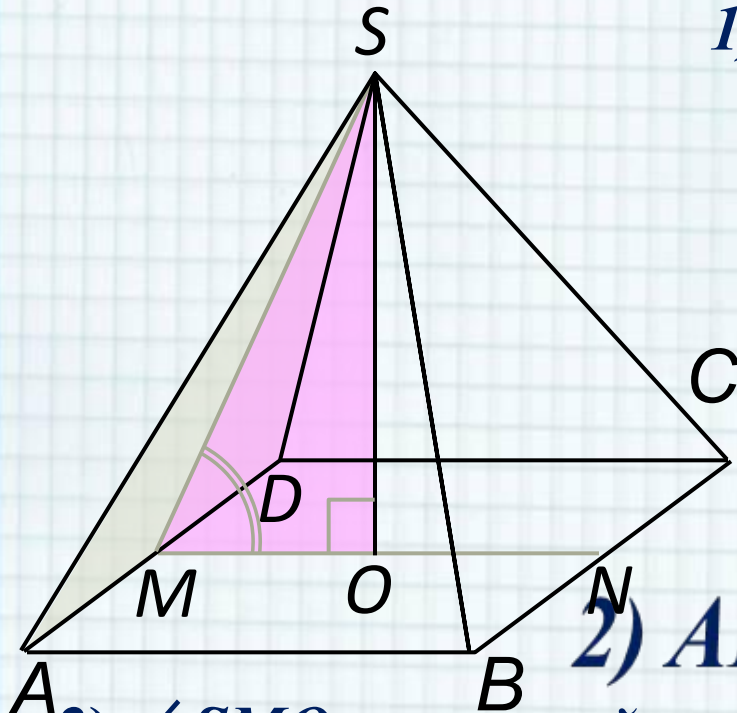
Задача № 4

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью SAD .

Решение:

1) Так как $ABCD$ – квадрат, то $AB \perp AD$. Поэтому проекция AB на плоскость (SAD) будет $\perp AD$.

Значит, искомый угол – двугранный угол при ребре основания AD .



2) $AB_1 = B_1D = \sqrt{2}$ из $\triangle ABB_1$

3) $\angle SMO$ – искомый угол, косинус которого найдем из прямоугольного $\triangle SMO$

$$\cos \angle SMO = \frac{MO}{SM} = \frac{0,5}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

2) $AB_1 = B_1D = \sqrt{2}$ из $\triangle ABB_1$

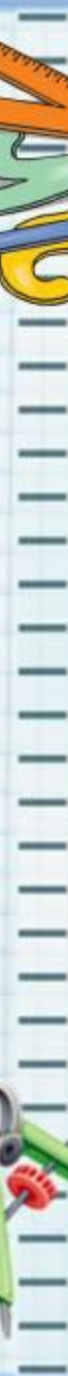
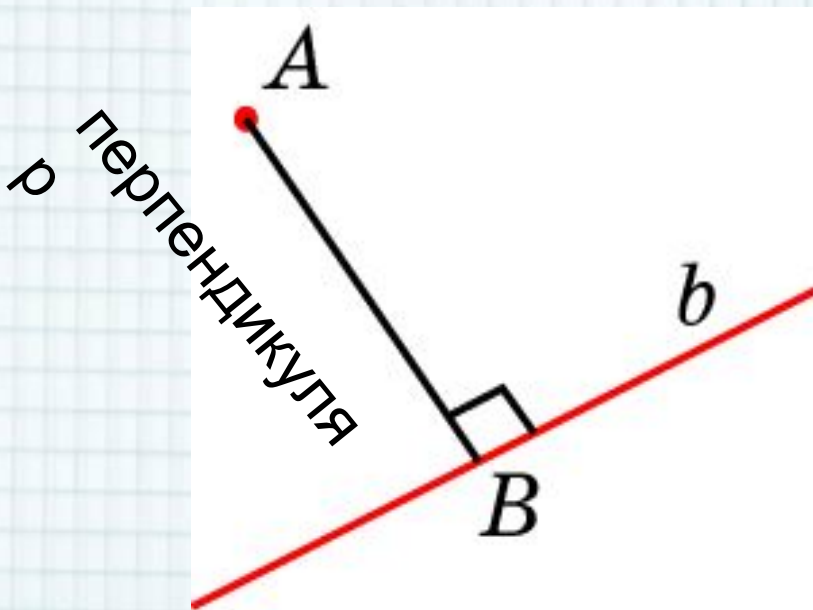
2) $AB_1 = B_1D = \sqrt{2}$ из $\triangle ABB_1$



Расстояние от точки до

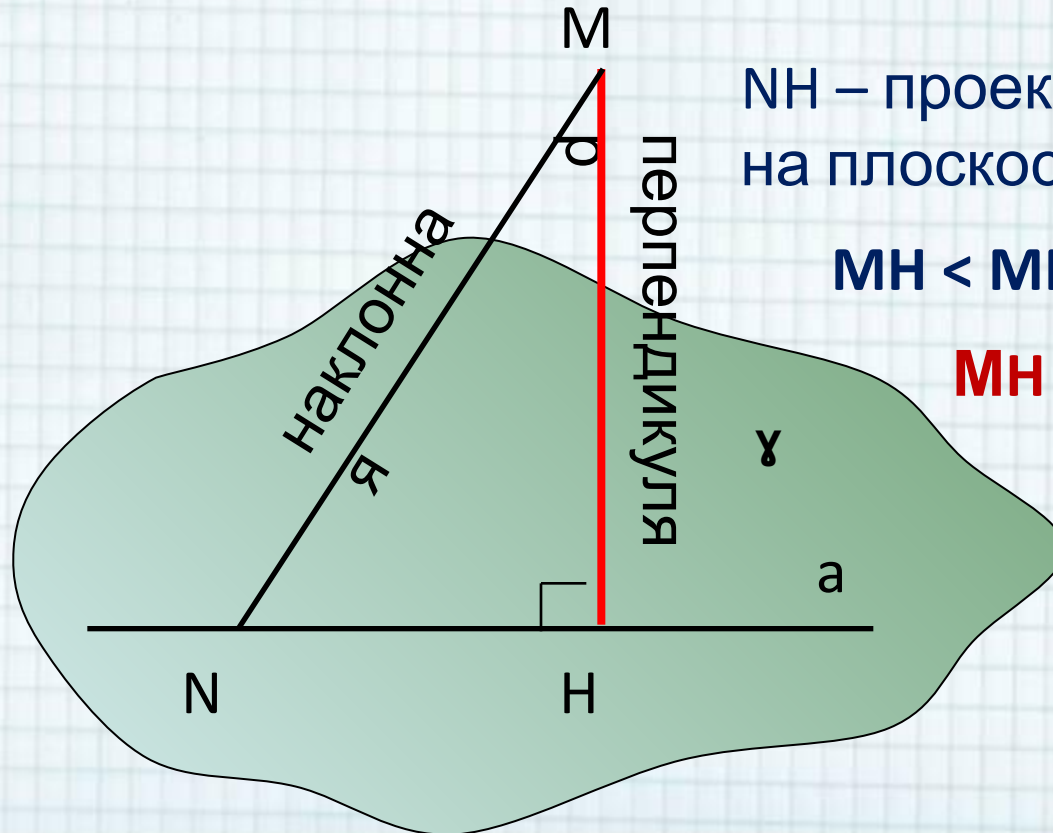
прямой.

Определение. Расстоянием от точки до прямой в пространстве называется длина перпендикуляра, проведённого из данной точки к данной прямой.



Расстояние от точки до

~~плоскости~~ Расстоянием от точки до плоскости является длина перпендикуляра, проведённого из данной точки к данной плоскости.



MN – проекция наклонной на плоскость γ

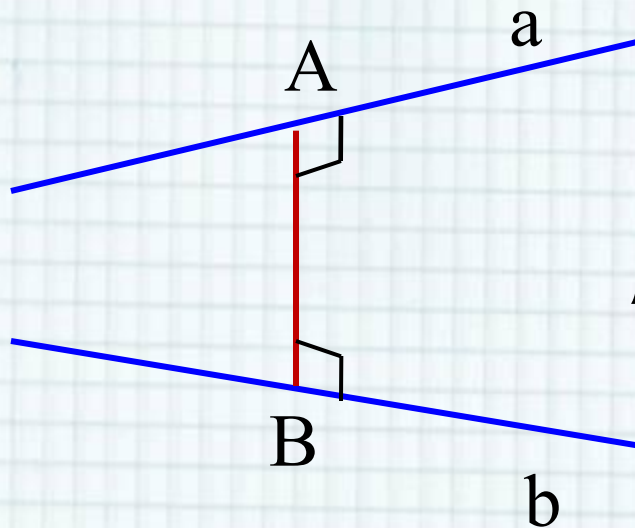
$$MN < MN$$

MN – расстояние от M до плоскости γ



Расстояние между скрещивающимися

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся
прямых называют **прямыми** отрезок с концами на этих прямых,
являющийся перпендикуляром к каждой из них.



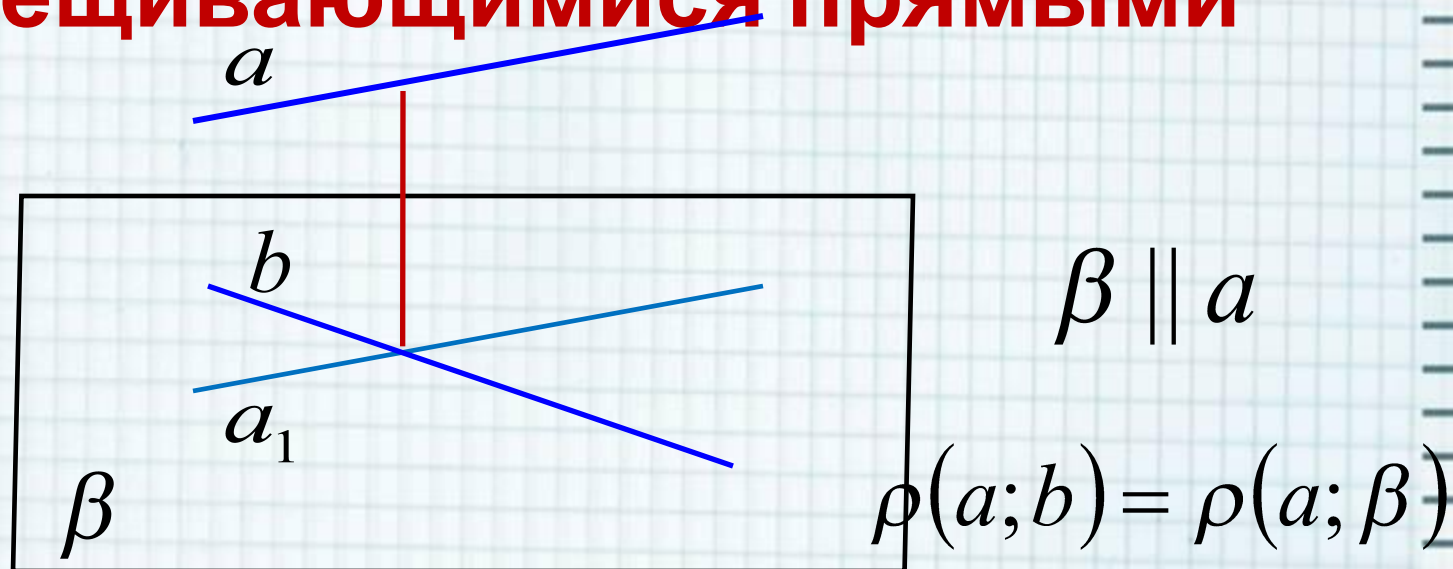
$$\rho(a; b) = AB$$

Определение. Расстоянием между
скрещивающимися прямыми называют
длину их общего перпендикуляра.

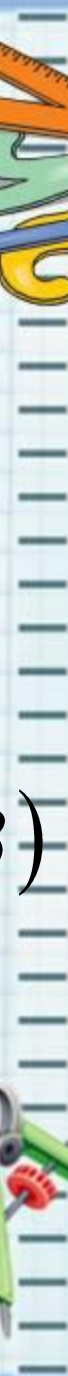


Способы вычисления расстояния между

1 способ. скрещивающимися прямыми



Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой.



Способы вычисления расстояния между

2 способ. скрещивающимися прямыми

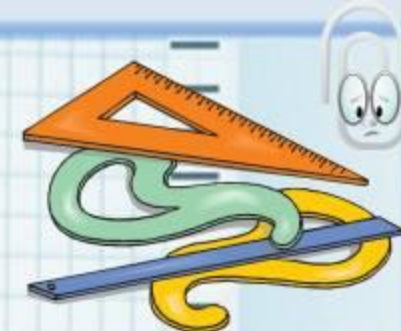


$$\alpha \parallel \beta$$



$$\rho(a; b) = \rho(\alpha; \beta)$$

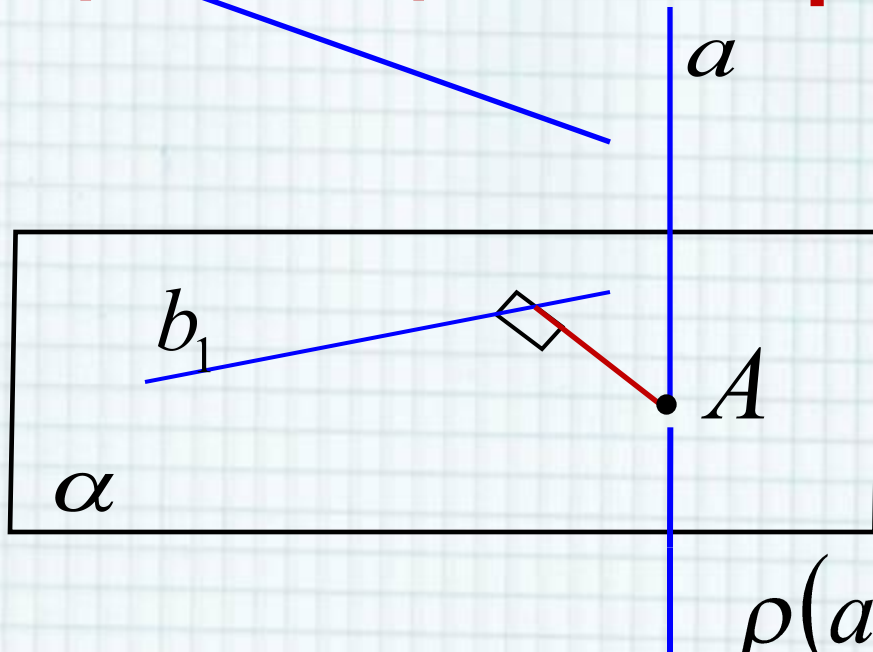
**Расстояние между скрещивающимися прямыми
равно расстоянию между двумя параллельными
плоскостями, содержащими эти прямые.**



Способы вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми

3 способ.

b
 $\alpha \perp a$



$$\alpha \perp a$$

$$a \rightarrow A$$

$$b \rightarrow b_1$$

$$\rho(a; b) = \rho(A; b_1)$$

**Расстояние между скрещивающимися прямыми
равно расстоянию между их проекциями на
плоскость, перпендикулярную одной из них.**



Задача № 5

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые рёбра равны 11, найдите расстояние от точки C до прямой $A_1 F_1$.

Решение:

1) Так как $ABCDEF$ – правильный шестиугольник, то

$$CA \perp AF.$$

$CA \perp A_1 A$ по определению правильной призмы.

⇒ $CA \perp (AA_1 F_1)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, т.е.

CA – перпендикуляр к плоскости,

CA_1 – наклонная,

$A_1 A$ – проекция наклонной,

$$A_1 A \perp A_1 F_1;$$

$A_1 F_1$ – прямая в плоскости.

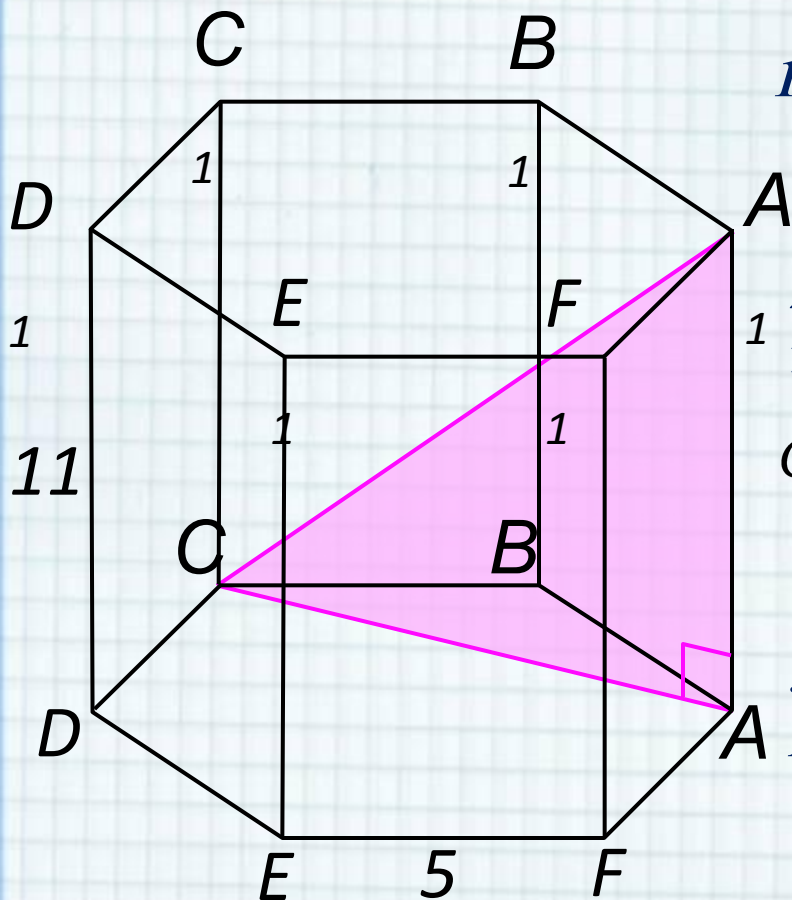
Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $CA_1 \perp A_1 F_1$, значит длина отрезка CA_1 равна искомому расстоянию.



Задача № 5 (продолжение)

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые рёбра равны 11, найдите расстояние от точки C до прямой $A_1 F_1$.

Решение:



1) Доказано, что CA_1 - искомое расстояние.

2) Из $\triangle ABC$ ($AB=BC=5$, $\angle B = 120^\circ$) по теореме косинусов найдём CA :

$$CA^2 = CB^2 + BA^2 - 2CB \cdot AB \cdot \cos \angle B,$$
$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -0,5,$$
$$CA = 5\sqrt{3}.$$

3) Из $\triangle CAA_1$, $\angle A = 90^\circ$ по теореме Пифагора найдём CA_1 :

$$CA_1^2 = CA^2 + AA_1^2$$

$$CA_1^2 = 75 + 121 = 196.$$

$$CA_1 = 14$$

Ответ: 14.



Задача № 6

Ребро AD пирамиды $DABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC . Найдите расстояние от A до плоскости, проходящей через середины ребер AB , AC и AD , если $AD = 2\sqrt{5}$, $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$.

Решение:

1) Построим плоскость KMN .

Т. к. KM – средняя линия $\triangle ADB$, $KM \parallel DB$,
 MN – средняя линия $\triangle ABC$, $MN \parallel CB$, то $(KMN) \parallel$
 (BCD) по признаку \parallel

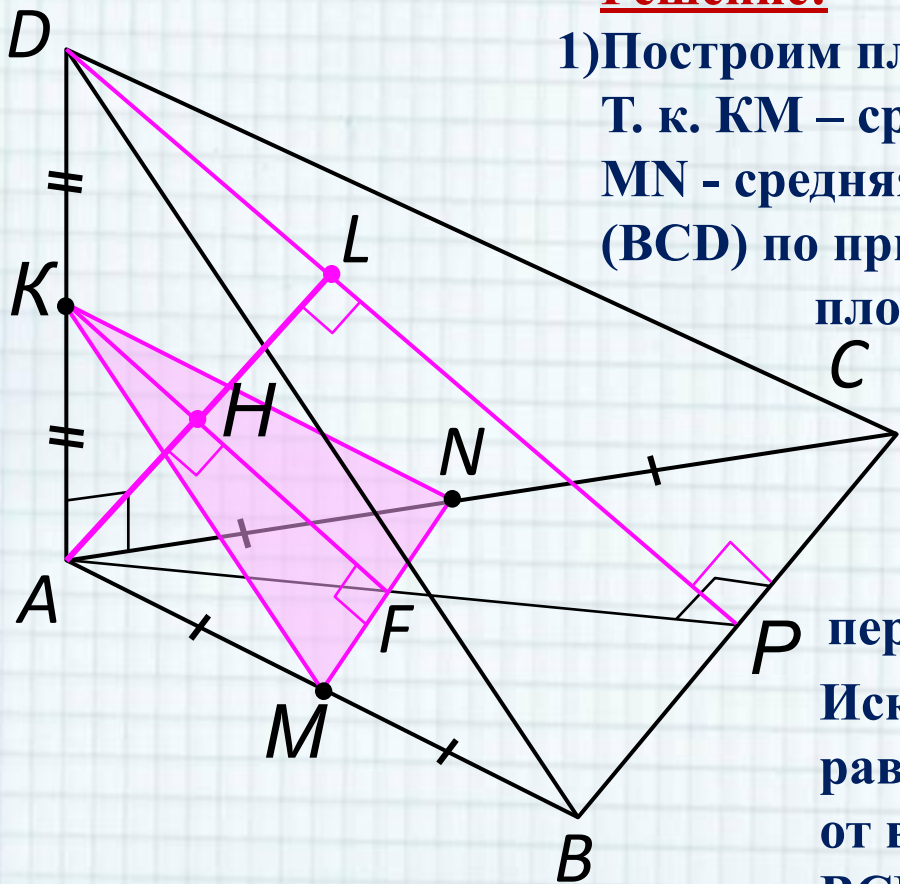
плоскостей. AP – медиана и
высота р/б $\triangle ABC$,

KF – медиана и высота
р/б $\triangle KMN$.

$DP \perp BC$ по теореме о трёх

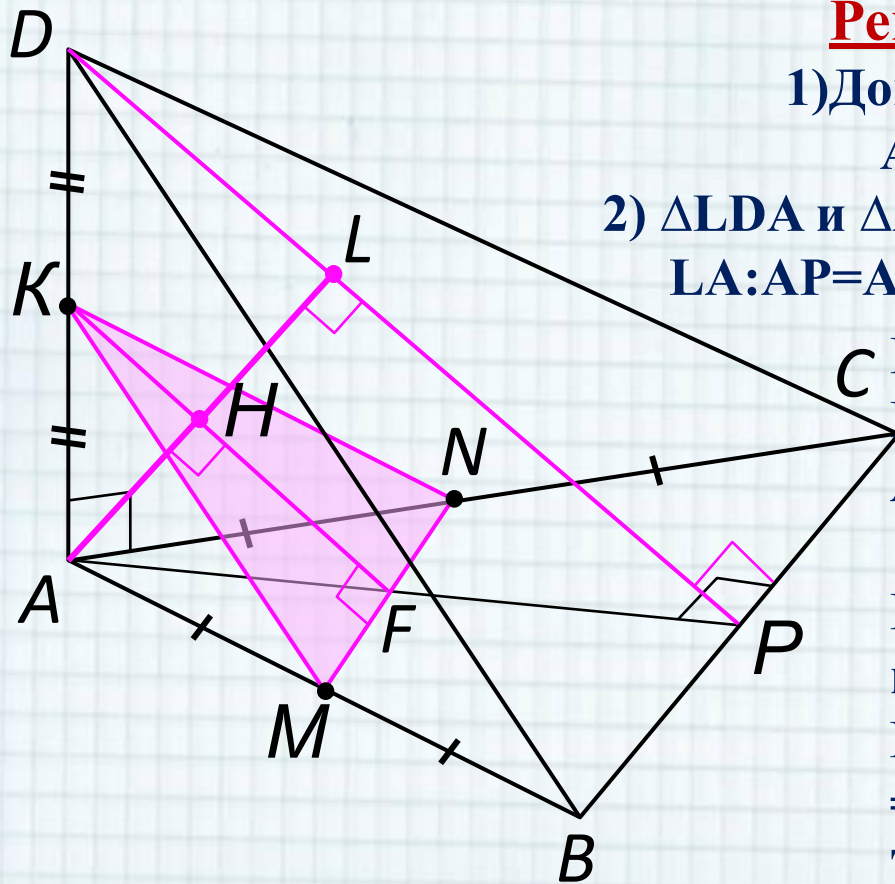
перпендикулярах. $KF \parallel DP$.

Искомое расстояние AH
равно половине расстояния
от вершины A до плоскости
 BCD , т.к. $(KMN) \parallel (BCD)$ и
 KF – средняя линия $\triangle ADP$.



Задача № 6 (продолжение).

Ребро AD пирамиды $DABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC . Найдите расстояние от A до плоскости, проходящей через середины ребер AB , AC и AD , если $AD = 2\sqrt{5}$, $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$.



Решение:

1) Доказано, что

AH - искомое расстояние.

2) $\triangle LDA$ и $\triangle ADP$ подобны по двум углам,
 $LA:AP = AD:DP$, тогда $AL = (AP \cdot AD) : DP$.

Найдём AP из $\triangle ABP$ по теореме Пифагора ($AB = 10$, $BP = 2\sqrt{5}$):

$$AP^2 = AB^2 - BP^2 = 100 - 20 = 80; AP = 4\sqrt{5}$$

Найдём DP из $\triangle ADP$ по теореме Пифагора:

$$DP^2 = AD^2 + AP^2 = 20 + 80 = 100; DP = 10.$$

$$\text{Тогда } AL = (4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}) : 10 = 4$$

$$\text{Итак, } AH = \frac{1}{2} AL = 2.$$

Ответ: 2.

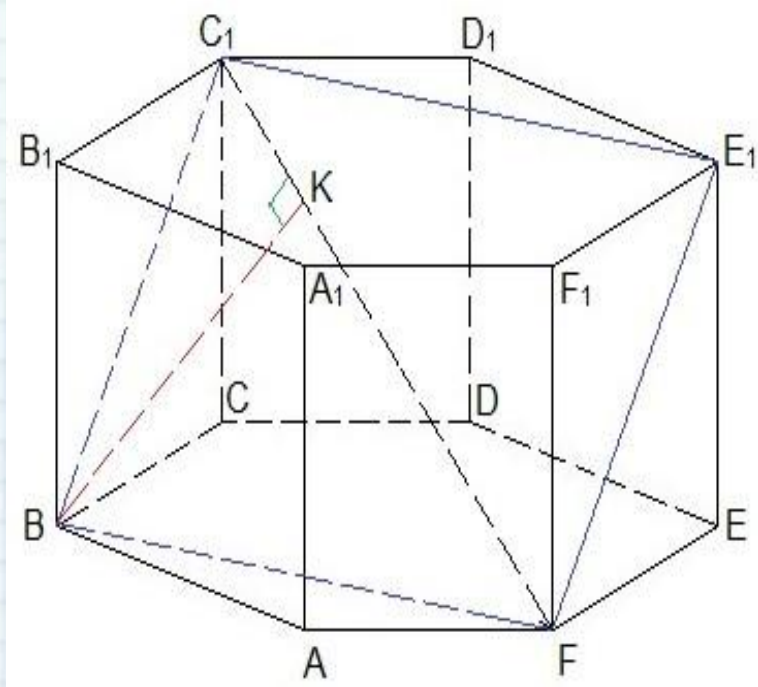


Задача № 7

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки B , C_1 и F .

б) Найдите расстояние от точки B до прямой $C_1 F$.



Решение:

а) 1) $BC_1, BF, FE_1 \parallel C_1 B, E_1 C_1 \Rightarrow$
Сечение – четырёхугольник $BC_1 E_1 F$ с диагональю $C_1 F$.

$$2) AB_1 = B_1 D = \sqrt{2} \text{ из } \triangle AB B_1$$

$$2) AB_1 = B_1 D = \sqrt{2} \text{ из } \triangle AB B_1$$

4) Так как $\angle CBF = 90^\circ$, то по теореме о трёх перпендикулярах, $BF \perp BC_1$. Значит, сечение $BC_1 E_1 F$ – прямоугольник. Диагональ прямоугольника $C_1 F^2 = BF^2 + BC_1^2$; $C_1 F^2 = 3 + 2 = 5$.

$$2) AB_1 = B_1 D = \sqrt{2} \text{ из } \triangle AB B_1$$

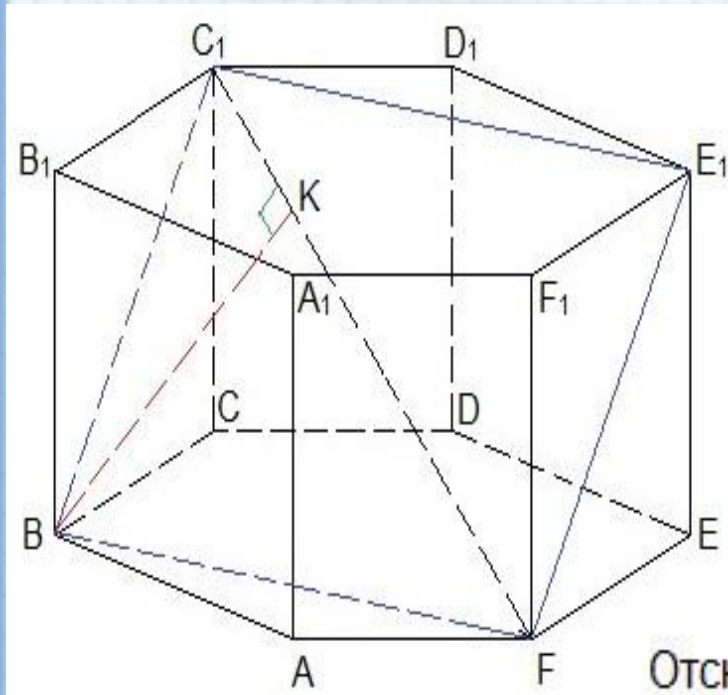


Задача № 7 (продолжение)

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки B , C_1 и F .

б) Найдите расстояние от точки B до прямой $C_1 F$.



Решение.

б) Сечение – прямоугольник $BC_1 E_1 F$.
 $BK \perp C_1 F$, BK – искомое расстояние от точки B до прямой $C_1 F$.

Найдем BK как высоту из $\triangle FBC_1$,
Используя 2 формулы площади треугольника.

$$S_{\triangle FBC_1} = \frac{1}{2} BC_1 \cdot BF = \frac{1}{2} C_1 F \cdot BK.$$

$$\text{Отсюда следует } BK = \frac{BC_1 \cdot BF}{C_1 F} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{6}{5}}$.



Задача №8

Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K – середина ребра BB_1 . Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α .

Решение.

а) Для построения сечения призмы плоскостью α , проведём $KE \parallel BD_1$, $E \in B_1 D_1$. Плоскость α проходит через точки K , C_1 и E .

Так как K – середина BB_1 и $KE \parallel BD_1$, то E – середина диагонали $A_1 C_1$ квадрата $A_1 B_1 C_1 D_1$. Значит, плоскость α пересекает грань $A_1 B_1 C_1 D_1$ по диагонали $A_1 C_1$.

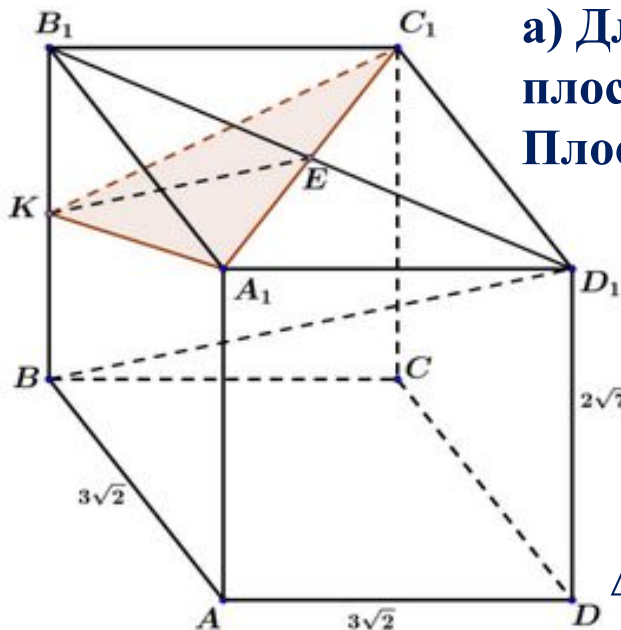
Соединив точки K , C_1 и A_1 , получаем $\triangle A_1 K C_1$ – сечение призмы плоскостью α .

$\triangle A_1 K B_1 = \triangle C_1 K B_1$ по двум сторонам и углу между ними ($A_1 B_1 = C_1 B_1$),

$B_1 K$ – общая сторона, $\angle A_1 B_1 K = \angle C_1 B_1 K = 90^\circ$.

Из равенства треугольников следует, что $A_1 K = C_1 K$, значит

$\triangle A_1 K C_1$ – равнобедренный.



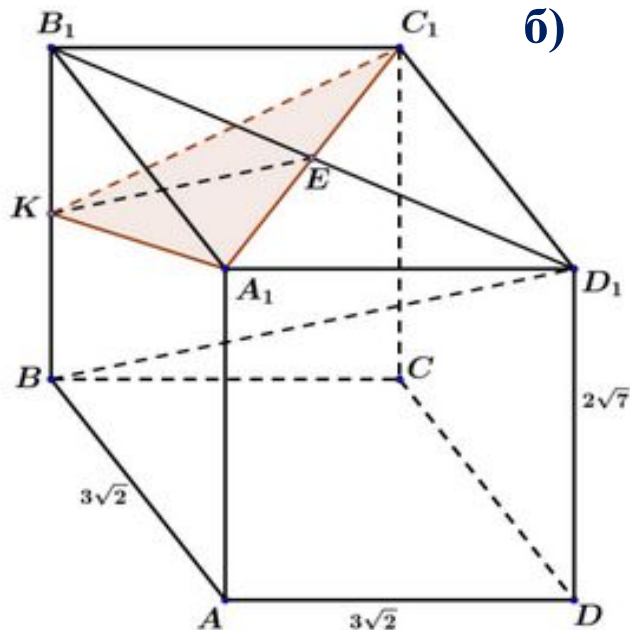
Задача №8 (продолжение)

Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K – середина ребра BB_1 . Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α .

Решение.



б)

$$P_{A_1 K C_1} = A_1 K + C_1 K + A_1 C_1.$$

$$B_1 K = \frac{1}{2} \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} = \sqrt{7}.$$

$$A_1 K = C_1 K = \sqrt{B_1 K^2 + B_1 C_1^2} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{7 + 18} = 5.$$

$$A_1 C_1 = \sqrt{A_1 B_1^2 + B_1 C_1^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{18 + 18} = 6.$$

$$P_{A_1 K C_1} = 5 + 5 + 6 = 16.$$

Ответ: б) 16.



Задачи для самостоятельного

решения

1) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 2:5$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 1:6$, а точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 5, AD = 6, AA_1 = 14$.

- Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $AA_1 B_1$.

$$2) AB_1 = B_1 D = \sqrt{2} \text{ из } \triangle ABB_1$$

2) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$, все рёбра которой равны 4.

Через точки A, C_1 и середину T ребра $A_1 B_1$ проведена плоскость.

- Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
- Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

Ответ: б) $\arctg 2$.



Задачи для самостоятельного решения

3) В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ все рёбра равны 2.

а) Докажите, что плоскость BB_1F перпендикулярна прямой B_1C_1 .

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости FB_1C_1 .

$$2) AB_1 = B_1D = \sqrt{2} \text{ из } \triangle ABB_1$$

4) В пирамиде $DABC$ известны длины ребер $AB=AC=DB=DC=13$, $DA=6$, $BC=24$.

а) Постройте прямую, перпендикулярную прямым DA и BC .

б) Найдите расстояние между прямыми DA и BC .

Ответ: б) 4.



Задачи для самостоятельного

решения

5) Высота правильной треугольной пирамиды равна 20, а медиана её основания равна 6.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через её вершину и перпендикулярной ребру основания.

б) Найдите тангенс угла, который образует боковое ребро с плоскостью основания.

Ответ: б) 5.

6) В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M сторона основания равна 3, а боковое ребро равно 6.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD .

б) Найдите площадь этого сечения.

Ответ: б) 6.



Используемая литература:

1) И. В. Ященко, С.А. Шестаков, А. С. Трепалин «Подготовка к ЕГЭ по математике 2016, профильный уровень», Москва, издательство МЦНМО, 2016.

2) Интернет-ресурсы:

<http://www.fipi.ru/>

<http://mathege.ru/or/ege/Main>

<https://math-ege.sdamgia.ru/>

<http://alexlarin.net/>

<https://ege-ok.ru/>

3) Шаблон презентации сайт <http://pedsovet.su/>, автор Фокина Л. П.

