Стереометрия.

10.02.2019

Стереометрия.

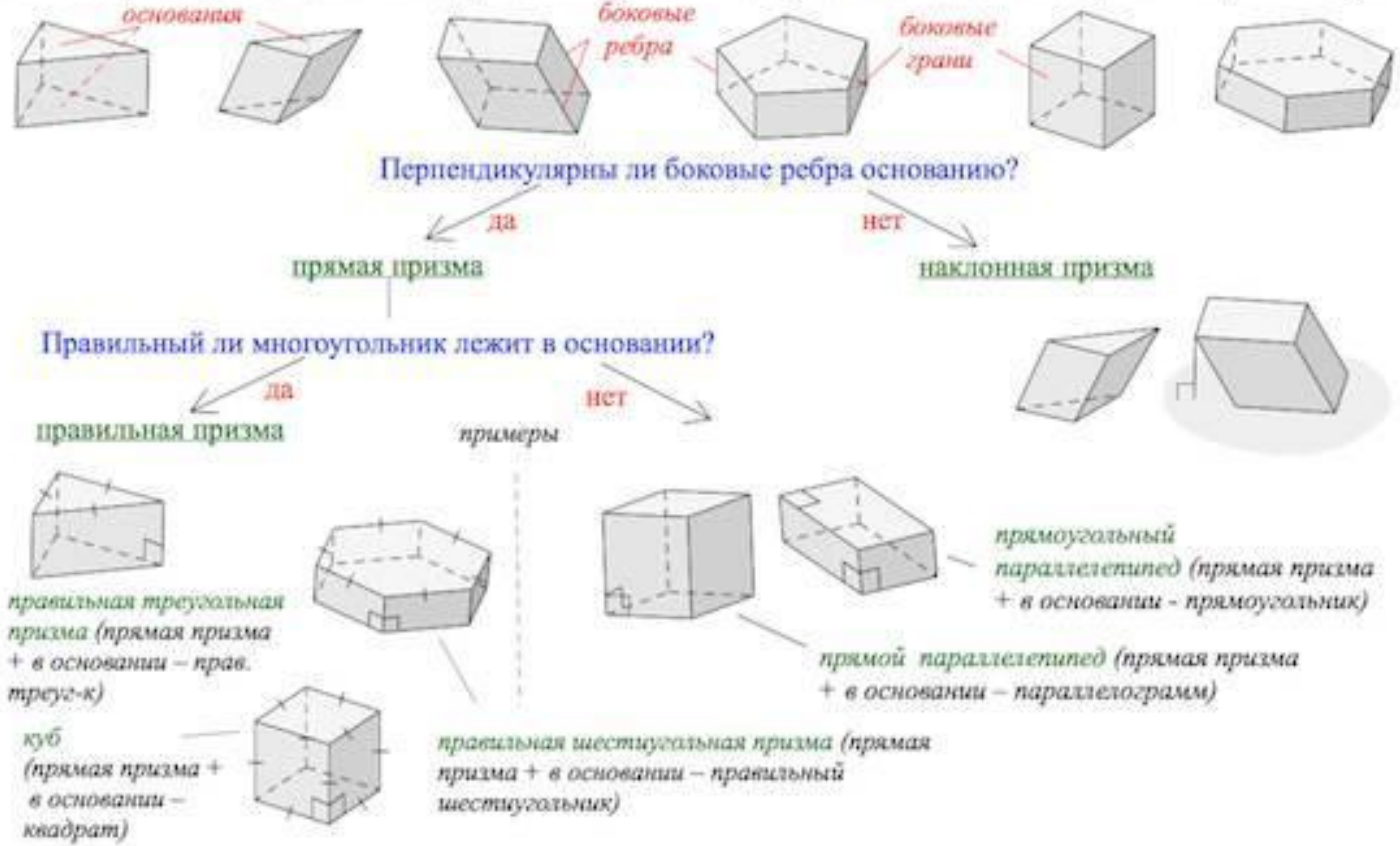
- Стереометрия — раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве. Основными (простейшими) фигурами в пространстве являются точки, прямые и плоскости. В стереометрии появляется новый вид взаимного расположения прямых: скрещивающиеся прямые. Это одно из немногих существенных отличий стереометрии от планиметрии, так как во многих случаях задачи по стереометрии решаются путём рассмотрения различных плоскостей, в которых выполняются планиметрические законы.

Многогранник.

Многогранник представляет собой тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников. Эти многоугольники называются гранями многогранника, а стороны и вершины многоугольников называются соответственно ребрами и вершинами многогранника. Многогранники могут быть выпуклыми и невыпуклыми .

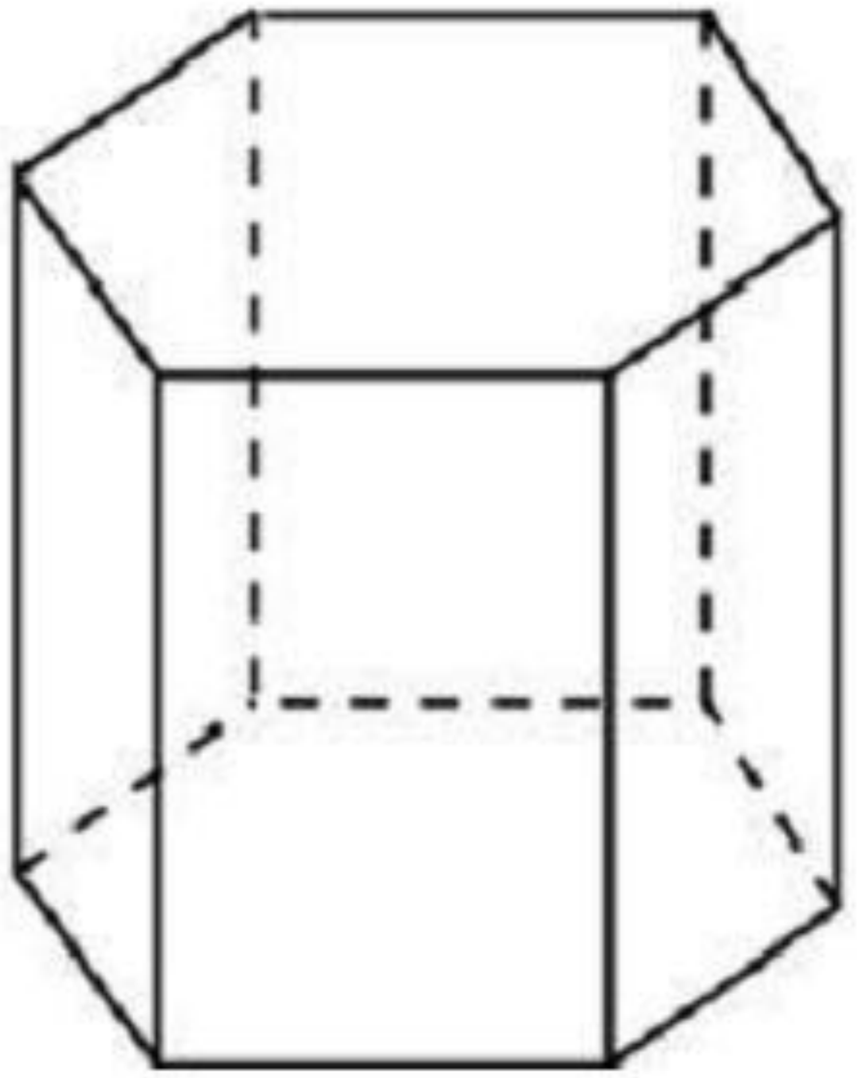
ПРИЗМА

это многогранник, в основаниях которого лежат равные многоугольники, а боковые грани — параллелограммы



Многогранники. Призма.

Призмой (n-угольной призмой) называется многогранник, две грани которого — равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные n граней — параллелограммы.



Многогранники. Призма.

Прямой призмой называется призма, боковое ребро которой перпендикулярно плоскости основания. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру, а все боковые грани прямой призмы — прямоугольники. Правильной призмой называется прямая призма, основание которой — правильный многоугольник.

Соотношения для прямой призмы.

H — высота прямой призмы

AA_1 — боковое ребро

$P_{осн}$ — периметр основания

$S_{осн}$ — площадь основания

$S_{бок}$ — площадь боковой поверхности

$S_{полн}$ — площадь полной поверхности

V — объем прямой призмы

$$S_{бок} = P_{осн} * AA_1$$

$$S_{полн} = 2 * S_{осн} + S_{бок}$$

$$V = S_{осн} * H$$

Особенности правильной шестиугольной призмы. Свойства.

– Сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной вокруг него окружности.

– Большая диагональ правильного шестиугольника является диметром описанной вокруг него окружности и равна двум его сторонам.

– Меньшая диагональ правильного шестиугольника в $\sqrt{3}$ раз больше его стороны.

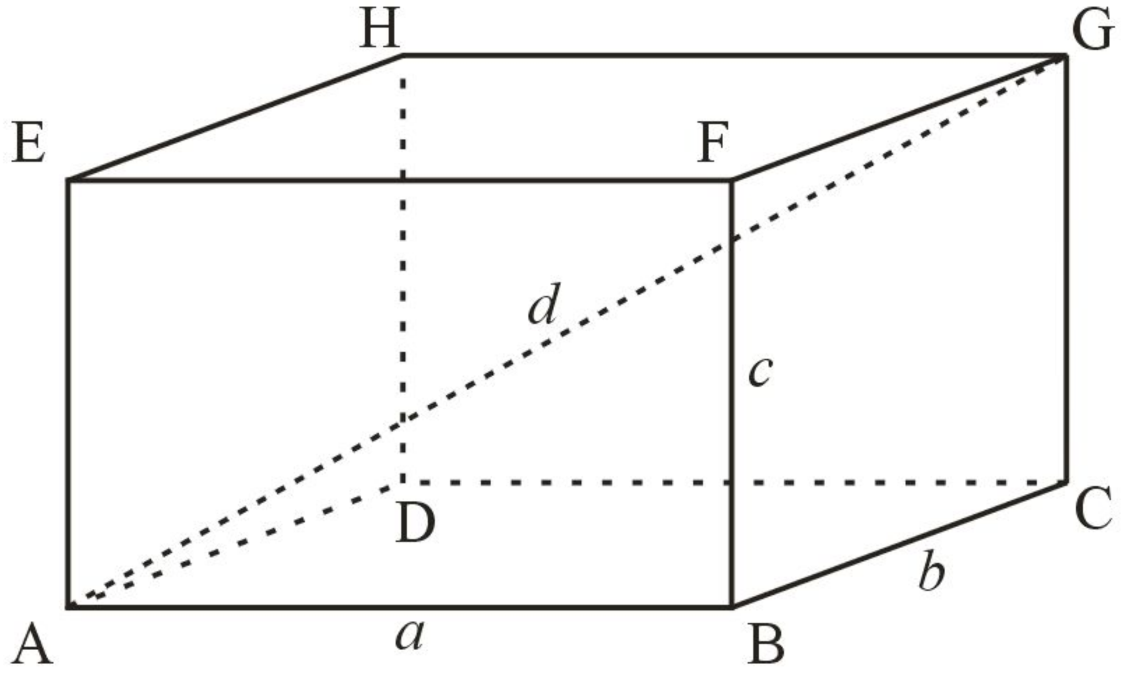
– Угол между сторонами правильного шестиугольника равен 120°.

– Меньшая диагональ правильного шестиугольника перпендикулярна его стороне.

– Треугольник, образованный стороной шестиугольника, его большей и меньшей диагоналями, прямоугольный, а его острые углы равны 30° и 60°.

Многогранник. Прямоугольный параллелепипед.

- Прямая призма, у которой основанием является прямоугольник, называется прямоугольным параллелепипедом. Длины непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его линейными размерами (измерениями).



Многогранник. Прямоугольный параллелепипед.

– Противоположные грани прямоугольного параллелепипеда — параллельные и равные прямоугольники.

– Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

– Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

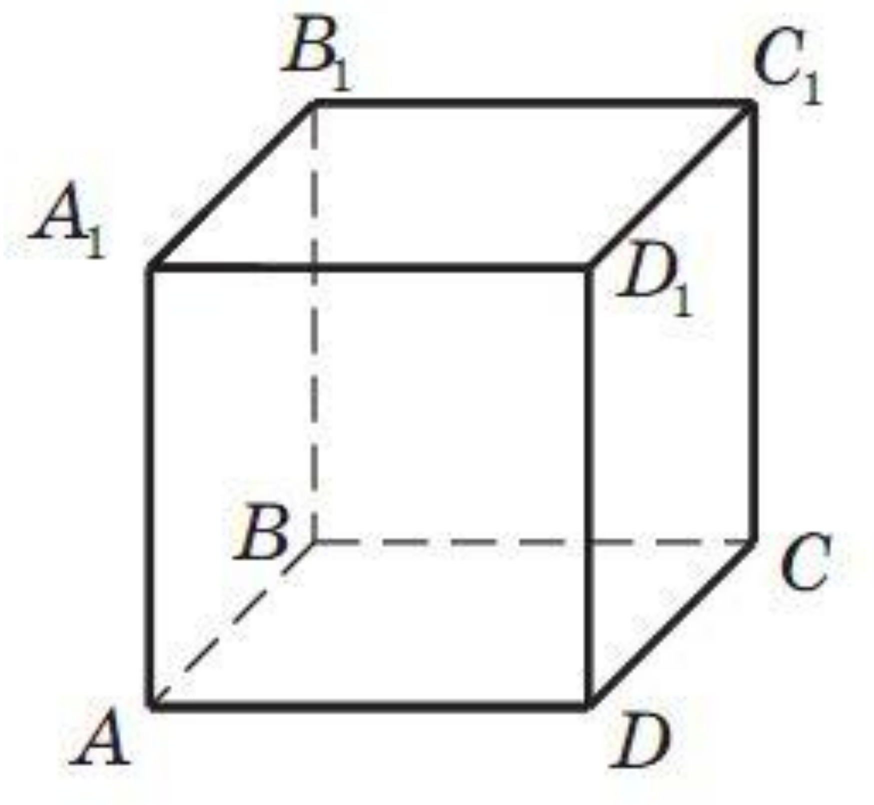
– Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна удвоенной сумме попарных произведений его измерений:

$S_{полн} = 2(ab+bc+ac)$.

– Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений : $V = abc$

Многогранник. Куб.

Куб — правильный многогранник, каждая грань которого представляет собой квадрат. Куб является частный случаем параллелепипеда и призмы, поэтому для него выполнены все их свойства.



Многогранник. Соотношения для куба.

a — длина ребра куба

d осн — диагональ основания

d — диагональ куба

S полн — площадь полной поверхности

V — объем куба

- $d_{осн} = a\sqrt{2}$

  $d = a\sqrt{3}$,

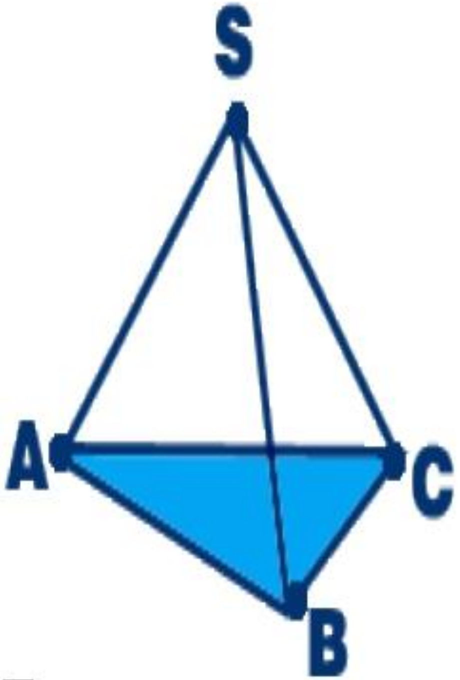
  $S_{полн} = 6a^2$,

  $V = a^3$

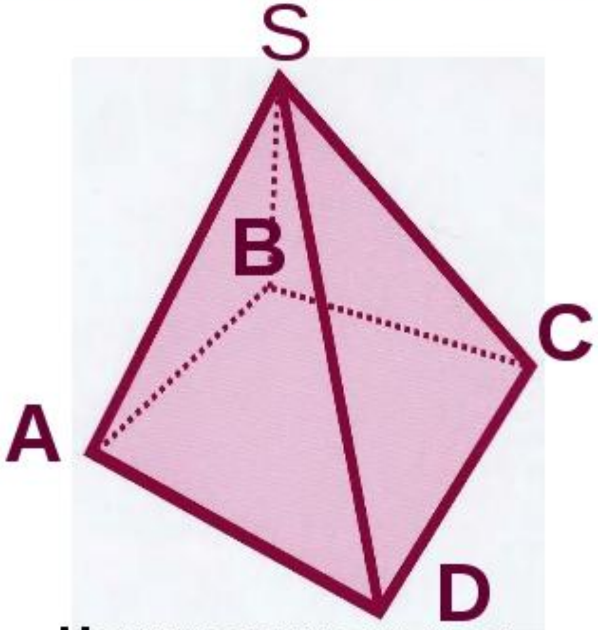
Многогранник. Пирамида.

Пусть вне плоскости многоугольника A1, A2,…An задана точка P. Тогда фигура, образованная треугольниками A1PA2 , A2 P A3 , …, An P A1 и многоугольником A1A2… An вместе с их внутренними областями называется пирамидой (n-угольной пирамидой). Пирамида называется правильной, если ее основание — правильный многоугольник, а основание ее высоты — центр этого многоугольника.

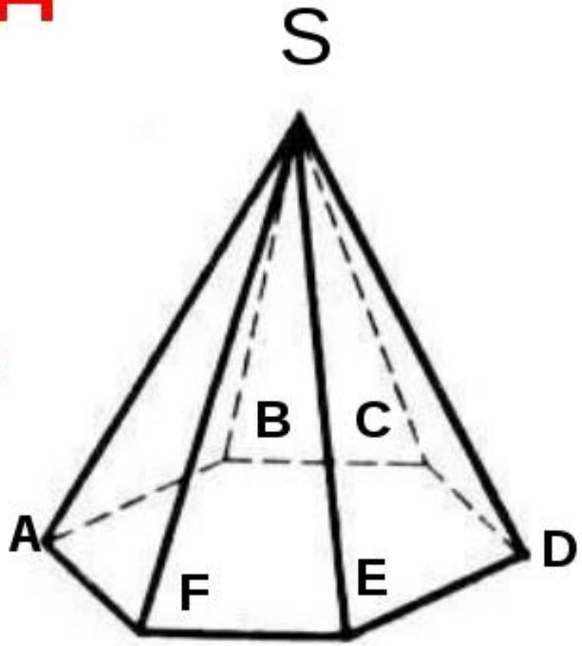
ВИДЫ ПИРАМИД



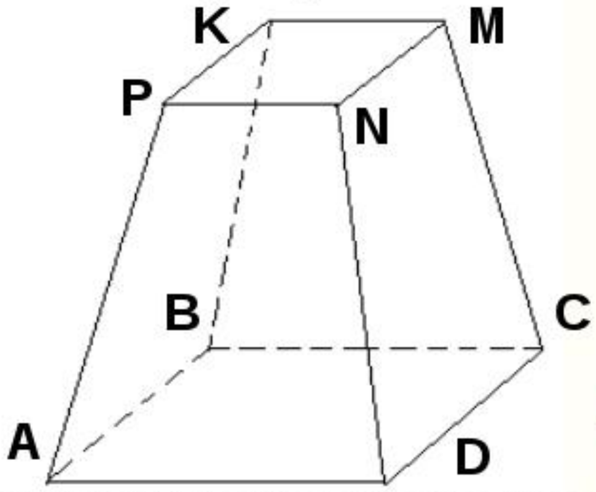
Треугольная
пирамида
SABC



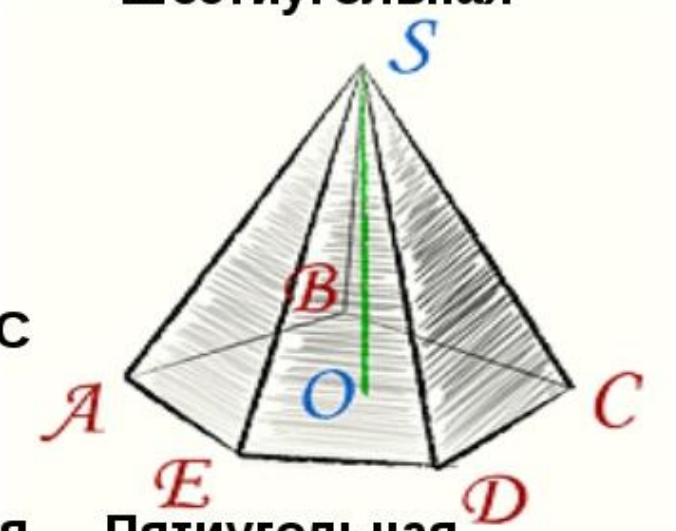
Четырехугольная



Шестиугольная



Усеченная четырехугольная



Пятиугольная

Соотношения для правильной пирамиды

H — высота правильной пирамиды

h — ее апофема

$P_{\text{осн}}$ — периметр основания пирамиды

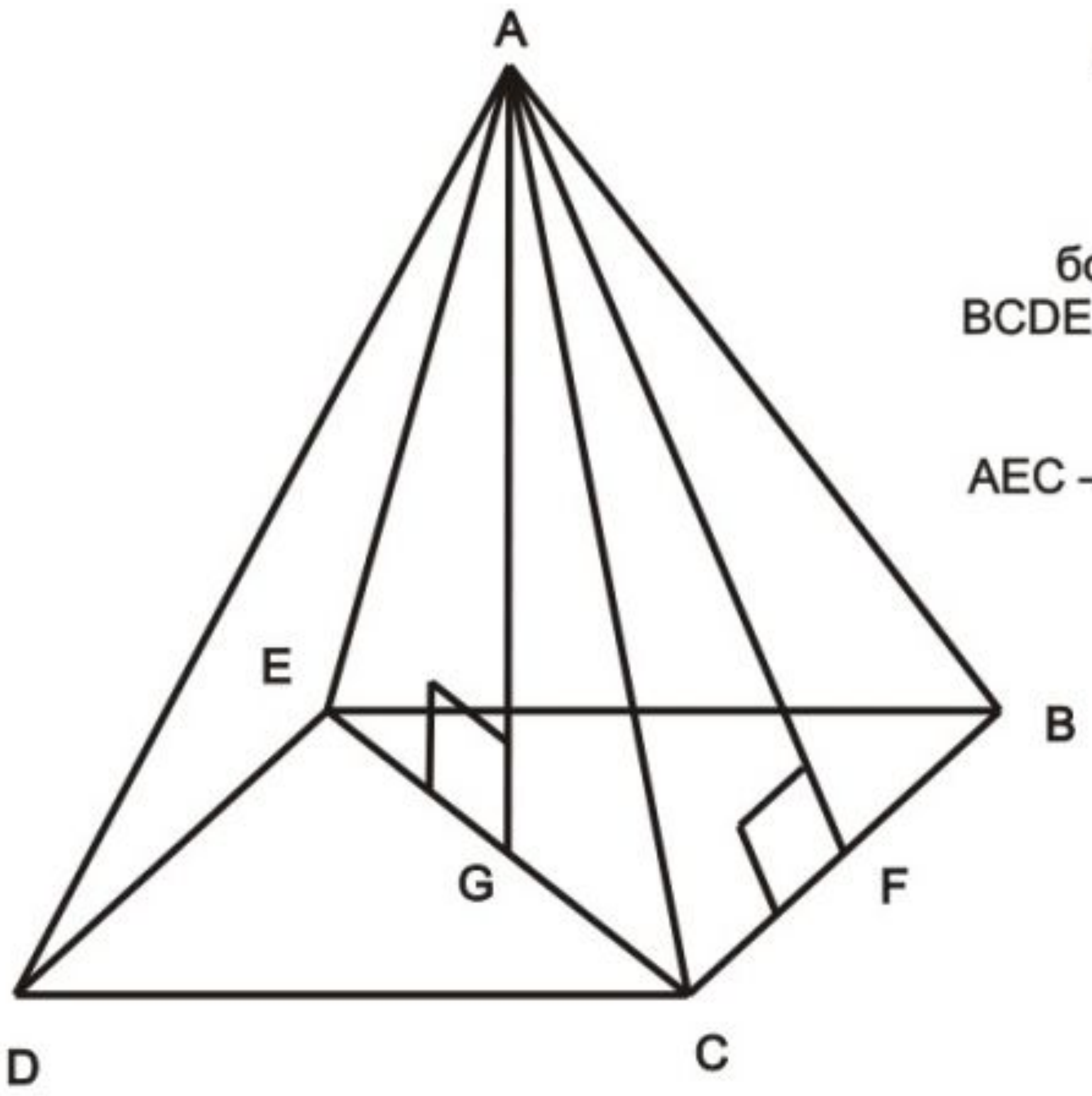
$S_{\text{осн}}$ — площадь основания

$S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности

$S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности

V — объем правильной

- $$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}}\, h$$
  $$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$$
  $$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}}\, H$$



A – вершина пирамиды;
AB, AC, AD, AE – ребра пирамиды;
ADE, AEB, ABC, ACD – боковые грани пирамиды;
BCDE – основание пирамиды;
AG – высота;
AF – апофема;
AEC – диагональное сечение.

Сечение многогранников.

Секущей плоскостью многогранника называется любая плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного многогранника. Секущая плоскость пересекает грани многогранника по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением многогранника.

Примеры сечения.

Тетраэдр имеет четыре грани, поэтому его сечениями могут быть только треугольники и четырехугольники (рис. 1). Параллелепипед имеет шесть граней. Его сечениями могут быть треугольники, четырехугольники, пятиугольники и шестиугольники (рис. 2).

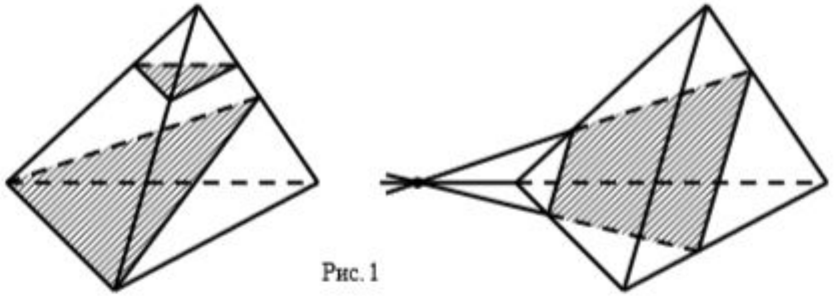


Рис. 1

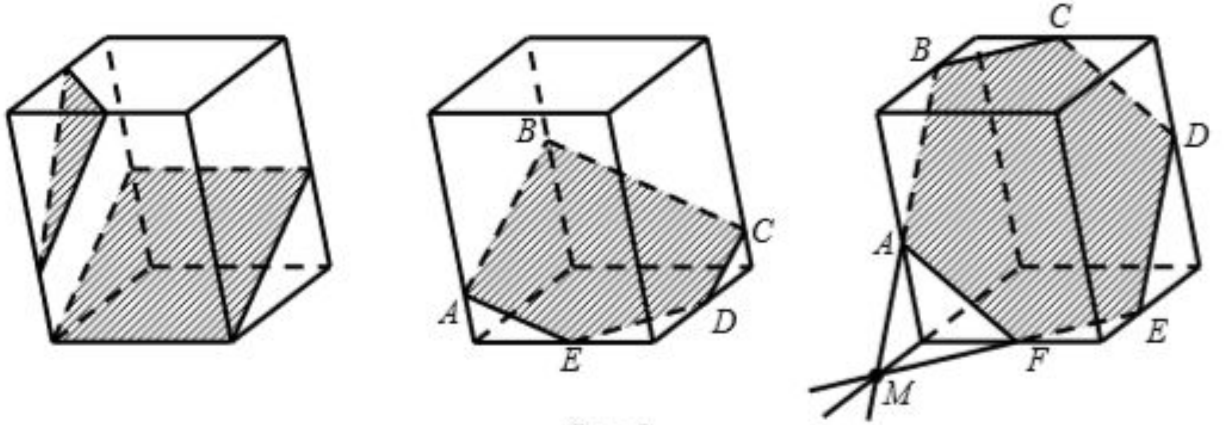


Рис. 2

Теорема 1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны. Поэтому секущая плоскость пересекает плоскости параллельных граней по параллельным прямым.

Теорема 2. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Теорема 3. Если прямая l параллельна какой либо прямой m, проведённой в плоскости α, то она параллельна и самой плоскости α.

Теорема 4. Если прямая, лежащая в плоскости сечения, не параллельна плоскости некоторой грани, то она пересекается со своей проекцией на эту грань.

Алгоритм построения сечения

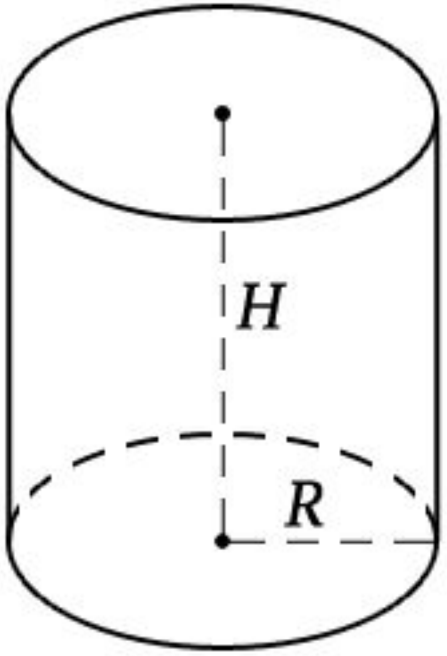
1. Если две точки секущей плоскости лежат в плоскости одной грани, то проводим через них прямую. Часть прямой, лежащая в плоскости грани — сторона сечения.

2. Если прямая a является общей прямой секущей плоскости и плоскости какой-либо грани, то находим точки пересечения прямой a с прямыми, содержащими ребра этой грани. Полученные точки — новые точки секущей плоскости, лежащие в плоскостях граней.

3. Если никакие две из данных точек не лежат в плоскости одной грани, то строим вспомогательное сечение, содержащее любые две данные точки, а затем выполняем шаги 1, 2.

Круглые тела. Цилиндр

Цилиндр. Цилиндром называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону.



Соотношения для цилиндра.

h — высота цилиндра

r — радиус основания

$S_{бок}$ — площадь боковой поверхности

$S_{полн}$ — площадь полной поверхности

V — объем цилиндра

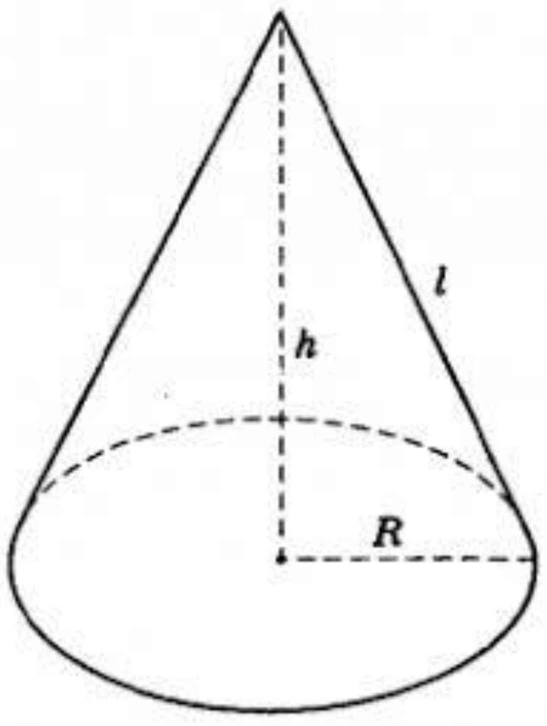
$$S_{бок} = 2\Pi rh$$

$$S_{полн} = 2\Pi r^2 + 2\Pi rh$$

$$V = S_{осн}\, h = \Pi r^2 h$$

Круглые тела. Конус.

Конусом называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет.



Соотношения для конуса.

h — высота конуса

r — радиус основания

l — образующая

$S_{бок}$— площадь боковой поверхности

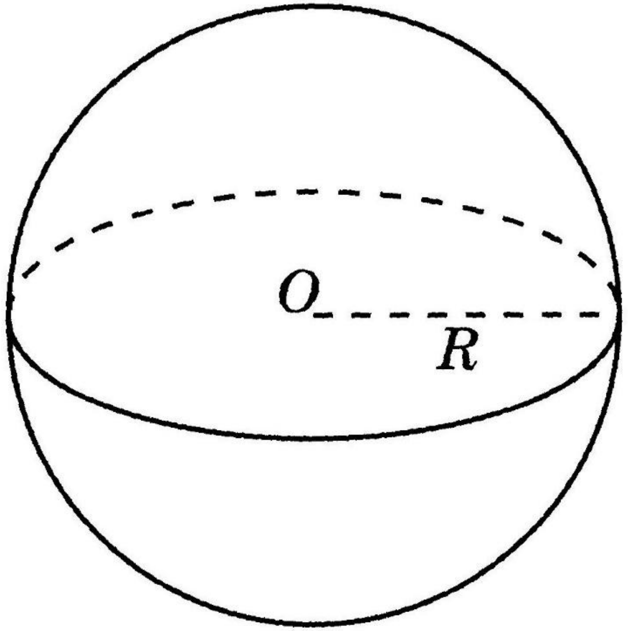
$S_{полн}$— площадь полной поверхности

V — объем конуса

- $$H^2+r^2 = l^2$$
  $$S_{бок} = \Pi rl$$
  $$S_{полн} = \Pi r^2+\Pi rl$$
  $$V = S_{осн}\, h = \frac{1}{3}\Pi r^2 h$$

Круглые тела. Сфера и шар.

- Шаром называется фигура, полученная при вращении полукруга вокруг оси, содержащей его диаметр. Сферой называется поверхность шара.



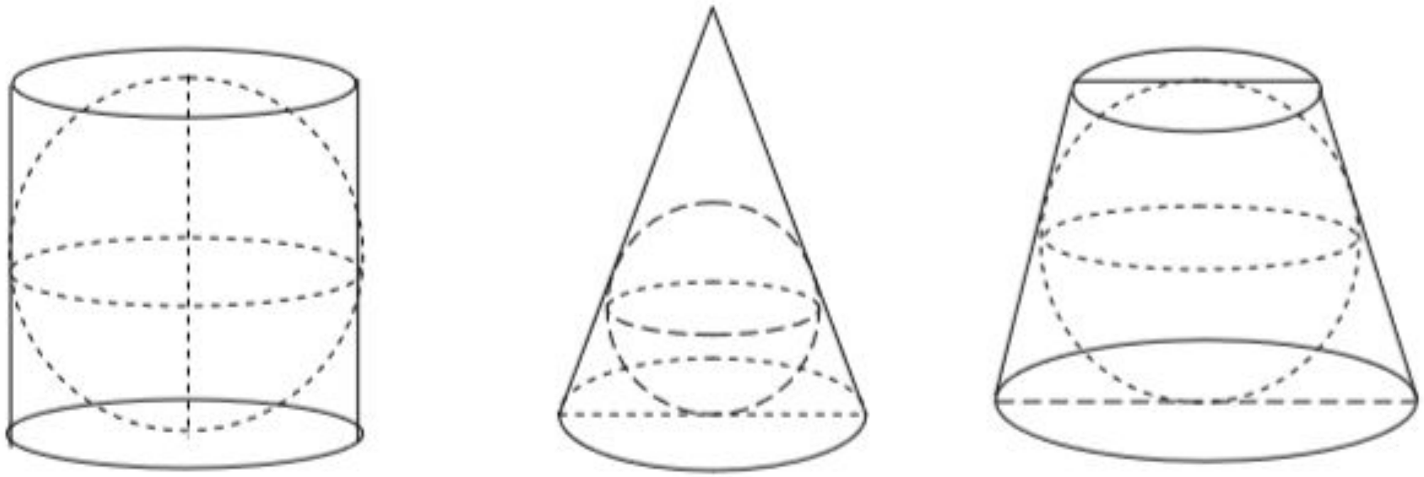
Соотношения для сферы и шара

- R — радиус шара S — площадь сферы V — объем шара

$$\boxed{S = 2\Pi R^2 \quad V = \frac{4}{3}\Pi R^3}$$

Комбинации круглых тел. Вписанные сферы

- Сфера называется вписанной в цилиндр, если она касается обоих оснований цилиндра и каждой его образующей.
- Сфера называется вписанной в конус, если она касается основания конуса и каждой его образующей.
- Сфера называется вписанной в усечённый конус, если она касается обоих оснований конуса и всех его образующих.



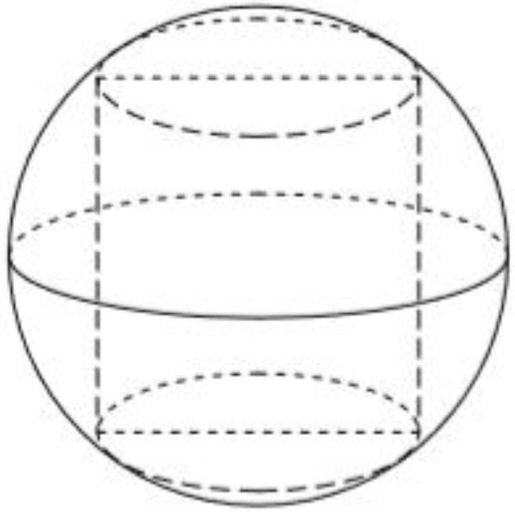
Теорема 1. В прямой круговой цилиндр можно вписать сферу тогда и только тогда, когда его высота равна диаметру основания. Причём центр сферы есть середина оси цилиндра.

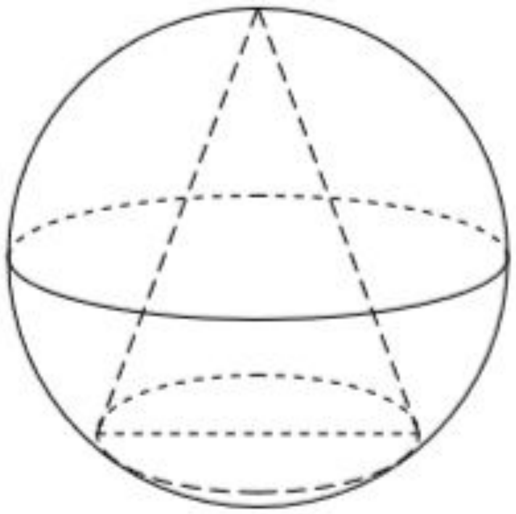
Теорема 2: в любой прямой круговой конус можно вписать сферу. Причём центр сферы есть точка пересечения оси конуса с биссектрисой угла наклона образующей конуса к плоскости его основания.

Теорема 3. в усечённый конус можно вписать сферу тогда и только тогда, когда он прямой круговой, и длина его образующей равна сумме длин радиусов оснований. Причём центр сферы есть середина оси усечённого конуса.

Описанные сферы

- Сфера называется описанной около цилиндра, если окружности его оснований лежат на сфере.
- Сфера называется описанной около конуса, если вершина конуса и его основание лежат на сфере.





Теорема 1: около цилиндра можно описать сферу тогда и только тогда, когда он прямой круговой. Причём центр сферы есть середина оси цилиндра.

Теорема 2: около конуса можно описать сферу тогда и только тогда, когда он круговой. Причём центр сферы есть точка пересечения прямой, перпендикулярной к плоскости основания и проходящей через центр его, и плоскости, перпендикулярной какой-либо его образующей конуса и проходящей середину этой образующей.

Следствие: сферу можно описать около любого прямого кругового конуса. В этом случае, центр сферы — точка пересечения прямой, содержащей высоту конуса с плоскостью, перпендикулярной какой-либо из его образующих и проходящей через ее середину.

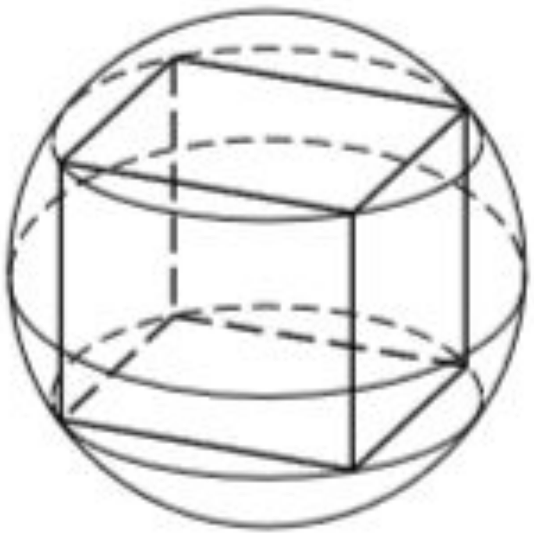
Комбинации конуса и цилиндра

Цилиндр называется вписанным в конус, если одно его основание лежит на основании конуса, а второе совпадает с сечением конуса плоскостью, параллельной основанию. Конус в этом случае называется описанным вокруг цилиндра.

Цилиндр называется описанным вокруг конуса, если центр одного из оснований цилиндра является вершиной вершина конуса, а противоположное основание цилиндра совпадает с основанием конуса. Конус в этом случае называется вписанным в цилиндр.

КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ И КРУГЛЫХ ТЕЛ. Описанные сферы

Сфера называется описанной около многогранника, если все его вершины лежат на этой сфере. Многогранник называется в этом случае вписанным в сферу. Возможность описать сферу около многогранника означает существование точки (центра сферы), равноудалённой ото всех вершин многогранника.



Теорема 1: если из центра описанной около многогранника сферы опустить перпендикуляр на какое-либо из его рёбер, то основание этого перпендикуляра разделит ребро на две равные части.

Теорема 2: если из центра описанной около многогранника сферы опустить перпендикуляр на какую-либо из его граней, то основание этого перпендикуляра попадёт в центр круга, описанного около соответствующей грани.

Теорема 3: если около многогранника описана сфера, то её центр лежит на пересечении перпендикуляров к каждой грани пирамиды, проведённых через центр окружности, описанной около соответствующей грани.

Теорема 4: если около многогранника описана сфера, то её центр является точкой пересечений всех плоскостей, проведённых через середины рёбер пирамиды перпендикулярно к этим рёбрам.

Вписанные сферы

Сфера называется вписанной в многогранник, если все его грани касаются этой сферы. Многогранник называется в этом случае описанным около сс