Лекция 4
Методы и модели линейного программирования

Вопрос 1. Общая постановка задачи линейного программирования

Вопрос 2. Составление моделей

Линейное программирование

- раздел математического программирования, в котором решаются задачи отыскания max (min) линейной функции L(x) при линейных ограничениях в виде равенств или неравенств.

Условия существования задачи линейного программирования:

- Условия задачи должны быть выражены количественно, через линейные соотношения.
- Доступность математической формулировки.
- Решение математической задачи должно иметь экономический смысл.

Элементы математических моделей

Исходные данные	Искомые переменные	Зависимости
Детерминированные Случайные	Непрерывные Дискретные	Линейные Нелинейные

Распространенные задачи математического программирования

ИД	Переменные	Зависимости	Задачи оптимизации
Детерминиро-ванные (постоянные)	Непрерывные	Линейные	Линейного (ЛП)
	Целочисленные		Целочисленного программирования (ЦЧП)
	Непрерывные, целочисленные	Нелинейные	Нелинейного программирования (НЛП)
Случайные	Непрерывные	Линейные	Стахостического программирования (СТП)

Вопрос 1. Общая постановка задачи линейного программирования

Общая задача линейного программирования в общем случае имеет вид:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1, k}; & (1.2) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{k+1; m}; & (1.3) \\ x_j \ge b_i, j = \overline{1, n}; & (1.4) \end{cases}$$

a_{ij}, b_i, c_j – коэффициенты задачи линейного программирования.

- **Задача:**
  необходимо найти такое решение $X=(x_1, x_2, \dots x_n)$, удовлетворяющее ограничениям и условию неотрицательности, при котором функция примет определенное значение.

- **Стандартная задача** – определение оптимального значения целевой функции
  (1.1) при выполнении условий (1.2), (1.4).

- **Каноническая задача** - определение максимального значения целевой функции (1.1) при выполнении условий (1.3), (1.4).

•Стандартная форма задача:

Первая стандартная форма задача ЛП – форма задачи ЛП, в которой целевая функция требует нахождения максимума, переменные неотрицательные, а компоненты произведения матрицы ограничений и вектора переменных меньше либо равны соответствующих компонент вектора ограничений.

$$\begin{aligned}
&c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Rightarrow \max\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m,\\
&x_1 \ge 0;\quad x_2 \ge 0;\quad \ldots;\quad x_n \ge 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
(\vec{c}, \vec{x}) \Rightarrow \max\\
x_1\vec{A}_1 + x_2\vec{A}_2 + \ldots + x_n\vec{A}_n \le \vec{b}\\
\vec{x} \ge \vec{0}
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\vec{c}^T\vec{x} \Rightarrow \max\\
A\vec{x} \le \vec{b}\\
\vec{x} \ge \vec{0}
\end{gathered}$$

Вторая стандартная форма задача ЛП – форма задачи ЛП, в которой целевая функция требует нахождения минимума, переменные неотрицательные, а компоненты произведения матрицы ограничений и вектора переменных больше либо равны соответствующих компонент вектора ограничений.

$$\begin{aligned}
&c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Rightarrow \min\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m,\\
&x_1 \ge 0;\quad x_2 \ge 0;\quad \ldots;\quad x_n \ge 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
(\vec{c}, \vec{x}) \Rightarrow \min\\
x_1\vec{A}_1 + x_2\vec{A}_2 + \ldots + x_n\vec{A}_n \ge \vec{b}\\
\vec{x} \ge \vec{0}
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\vec{c}^T\vec{x} \Rightarrow \min\\
A\vec{x} \ge \vec{b}\\
\vec{x} \ge \vec{0}
\end{gathered}$$

•Каноническая форма задача:

форма задачи ЛП, в которой целевая функция требует нахождения минимума, переменные неотрицательные, а компоненты произведения матрицы ограничений и вектора переменных равны соответствующим компонентам вектора ограничений.

$$
\begin{aligned}
& c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Rightarrow \min \\
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\
& x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \quad \ldots; \quad x_n \ge 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
(\vec{c}, \vec{x}) \Rightarrow \min \\
x_1\vec{A}_1 + x_2\vec{A}_2 + \ldots + x_n\vec{A}_n = \vec{b} \\
\vec{x} \ge \vec{0}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\vec{c}^T\vec{x} \Rightarrow \min \\
\mathrm{A}\vec{x} = \vec{b} \\
\vec{x} \ge \vec{0}
\end{gathered}
$$

Во всех этих задачах функцию называют целевой функцией. $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

Вектор $\vec{c} = [c_1, c_2, \ldots, c_n]^T$ называют вектором коэффициентов линейной формы, вектор - вектором ограничений.

Матрицу $\mathrm{A} = [a_{ij}]$ ывают матрицей коэффициентов.

Любая задача ЛП может быть сведена к канонической, стандартной или общей задаче.

1. Если целевая функция в задаче линейного программирования задана в виде $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Rightarrow \min$

то умножая её на (- 1), приведем её к виду

$$(-c_1)x_1 + (-c_2)x_2 + \ldots + (-c_n)x_n \Rightarrow \max$$

2. Смена знака неравенства.

Если ограничение задано в виде

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i,$$

то его можно заменить эквивалентной системой двух неравенств

$$(-a_{i1})x_1 + (-a_{i2})x_2 + \ldots + (-a_{in})x_n \le -b_i,$$

или такой же системой неравенств со знаками больше либо равно .

3. Превращение равенства в систему неравенств.

- Если ограничение задано в виде

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i,$$

то его можно заменить эквивалентной системой двух неравенств

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i,$$

$$(-a_{i1})x_1 + (-a_{i2})x_2 + \ldots + (-a_{in})x_n \le -b_i,$$

или такой же системой неравенств со знаками больше либо равно .

- Указанные выше приемы позволяют приводить задачи линейного программирования к **стандартной форме**.

Вопрос 1. Общая постановка задачи линейного программирования

4. Превращение неравенств в равенства.

- Пусть исходная форма задачи линейного программирования имеет вид

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n \le b_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{r+1,1}x_1 + a_{r+1,2}x_2 + \ldots + a_{r+1,n}x_n \ge b_{r+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n \ge b_p \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{p+1,1}x_1 + a_{p+1,2}x_2 + \ldots + a_{p+1,n}x_n = b_{p+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \quad \ldots \quad x_n \ge 0.$$

Вопрос 1. Общая постановка задачи линейного программирования

Для приведения задачи к канонической форме, где **все** ограничения имеют вид **равенств**, вводят **дополнительные переменные** $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+p}$, которые тоже считаются неотрицательными и записывают исходную задачу в виде

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + \ldots + 0 \cdot x_{n+p} \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n + x_{n+r} = b_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{r+1,1}x_1 + a_{r+1,2}x_2 + \ldots + a_{r+1,n}x_n - x_{n+r+1} = b_{r+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n - x_{n+p} = b_p \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{p+1,1}x_1 + a_{p+1,2}x_2 + \ldots + a_{p+1,n}x_n = b_{p+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad \ldots \quad x_n \geq 0; \quad x_{n+1} \geq 0; \quad \ldots \quad x_{n+p} \geq 0 \quad ,$$

Пример

Привести к каноническому виду задачу

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max \\ & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0; \ \ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Введем дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 . Переводя max в min, запишем задачу в виде

$$\begin{aligned} & -x_1 - 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \Rightarrow \min \\ & x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1 \geq 0; \ \ x_2 \geq 0; \ \ x_3 \geq 0; \ \ x_4 \geq 0; \ \ x_5 \geq 0, \end{aligned}$$

что и дает эквивалентную задачу в канонической форме.

5. Ограничения на неотрицательность переменных.

Во всех приведенных выше формах требуется, чтобы все переменные были неотрицательны, т.е. $\forall i = \overline{1,n} \quad x_1 \geq 0$. В реальных задачах часто на переменные накладываются ограничение вида $b_i \leq x_i \leq d_i$ (они называются двусторонними ограничениями), или же условие неотрицательности какой-то переменной x_i может отсутствовать вообще.

Постановка задачи и её математическая модель

- Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у m поставщиков A_i в количестве a_i (i=1,2,…,m) единиц соответственно, необходимо доставить n потребителям b_j (j=1, 2, …, n) единиц.
  Известна стоимость C_{ij} перевозки единиц груза от i-го поставщика к j-му потребителю.
- Необходимо составить план перевозок, позволяющий вывезти все грузы, полностью удовлетворив потребности, и имеющий минимальную стоимость.

Решение

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, запланированных к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю.

Тогда условие задачи можно записать в виде таблицы – ***матрицы планирования***.

Матрица планирования

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}	…	C_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}	…	C_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	C_{m1} x_{m1}	C_{m2} x_{m2}	…	C_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Если $\sum a_i = \sum b_j$, то такую транспортную задачу называют сбалансированной, или закрытой.

Если $\sum a_i \neq \sum b_j$, то задача является не сбалансированной, или открытой.

Алгоритм приведения открытой модели к закрытой

1. В случае, когда суммарные запасы превышают суммарные потребности $\sum a_i > \sum b_j$, вводится фиктивный потребитель B_{n+1}, потребности которого определяются выражением

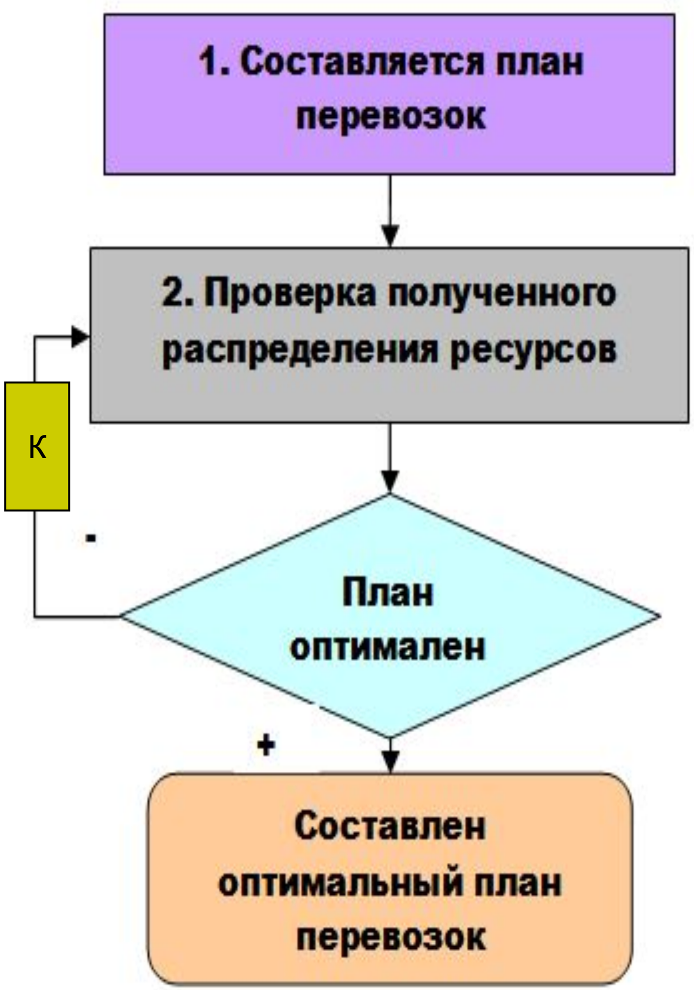
$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

2. В случае, когда суммарные потребности превышают суммарные запасы $\sum a_i < \sum b_j$, вводится фиктивный поставщик A_{m+1}, запасы которого

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Стоимость (С)перевозки единицы груза полагают равными нулю

Алгоритм решения закрытой транспортной задачи



1. Заполняются клетки таблицы
   - Количество заполненных клеток m+n-1
   - Используемый метод:
     - Минимальной стоимости
     - Метод Фогеля
     - Северо-западного угла и т.д.
2. Проверка полученного распределения ресурсов.
   - Используемый метод:
     - Метод ступенек
     - Метод модифицированных распределений (МОДИ)
3. Если полученное распределение ресурсов не оптимально, то перераспределяют, корректируют план
4. Повторная проверка

Задачи о назначениях и распределении работ

- это частный случай транспортной задачи, в которой приняты следующие допущения:

- Число поставщиков m равно числу потребителей n;
- Запасы каждого поставщика $a_i=1$;
- Заявки каждого потребителя $b_i=1$;
- Каждый поставщик может поставлять грузы только одному потребителю;
- Каждый покупатель может получить грузы только от одного поставщика.

Методы решения

- Методы линейного программирования,
- Алгоритм решения транспортной задачи
- Венгерский метод

Постановка задачи о назначениях и распределении работ

Если через Q обозначить ресурсы, а через R – результат их применения, то при заданных зависимостях результата и потребных ресурсов от количества выпускаемой продукции $R=f(x_j)$; $Q=f(x_j)$ две постановки задачи распределения ресурсов можно записать следующим образом:

- Для первой постановки: $F_1 = R \rightarrow \max$; $Q \le Q_3$
- Для второй постановки: $F_2 = Q \rightarrow \min$; $R \ge R_3$

Значит поставить ее возможно в одном из двух вариантов:

- Либо максимизировать производство
- Либор минимизировать ресурсы

Алгоритм венгерского метода

1 этап:

1. Формализация проблемы в виде транспортной таблицы
2. В каждой строке таблицы найти наименьший элемент и вычесть его из всех элементов данной строки
3. Повторить ту же процедуру для столбцов
4. Задачей является распределение всех подлежащих назначению единиц в клетки с нулевой стоимостью. Оптимальное значение целевой функции в этом случае равно нулю.

Алгоритм венгерского метода

2 этап:

1. Найти строку, содержащую только одно нулевое значение, в его клетку помещается один элемент (0 обводится квадратиком). Если такие строки отсутствуют, допустимо начать с любой строки.
2. Зачеркнуть оставшиеся нулевые значения данного столбца
3. Повторять пп.1-2, пока продолжение указанной процедуры окажется невозможным
4. Если окажется, что имеется несколько нулей, которым не соответствуют назначения, и которые остались незачеркнутыми, необходимо:
5. Найти столбец, содержащий только одно нулевое значение, в его клетку помещается один элемент.
6. Зачеркнуть оставшиеся нули в данной строке
7. Повторять пп.4-5, пока продолжение указанной процедуры окажется невозможным

Если выяснится, что таблица содержит неучтенные нули - повторить пп. 1-6

Если решение является допустимым, оно оптимально. Если нет - перейти к этапу 3.

Алгоритм венгерского метода

3 этап: (Если решение является недопустимым)

1. Провести минимальное количество прямых через столбцы и строки матрицы таким образом, чтобы они проходили через все нули, содержащиеся в таблице
2. Найти наименьший из элементов, через которые не проходит ни одна прямая
3. Вычесть его из всех элементов, через которые не проходят прямые
4. Прибавить его ко всем элементам, лежащим на пересечении прямых
5. Элементы, через которые проходит только одна прямая, оставить неизменными
6. В результате в таблице появится как минимум одно новое нулевое значение. Вернуться к этапу 2 и повторить решение заново.

Симплексный метод -

это итерационный процесс, который начинается с одного решения и в поисках наилучшего варианта движется по угловым точкам области возможных решений до тех пор, пока не достигнет оптимального значения.

Цель симплексного метода

- последовательное улучшение решения.

Элементы симплексного метода

1) Способ определения какого-либо первоначального допустимого базисного решения задачи;
2) Правило перехода к лучшему (точнее, не худшему) решению;
3) Критерий проверки оптимальности найденного решения.

Симплекс метод

Алгоритм решения

1. 4) Применяются формулы пересчета элементов таблицы:

- Поделим разрешающую строку на генеральный элемент.
- Для заполнения оставшихся элементов строк в следующей
2. симплексной таблице необходимо воспользоваться формулой:

$x_{ij2} = x_{ij1} - (РС_{j1} * РГ_{i1} / ГЭ)$,

где x_{ij1} – соответствующий элемент предыдущей симплексной таблицы;

$РС_j$ – соответствующий элемент разрешающей строки;

$РГ_i$ – соответствующий элемент разрешающего столбца (графы);

ГЭ – генеральный элемент таблицы.

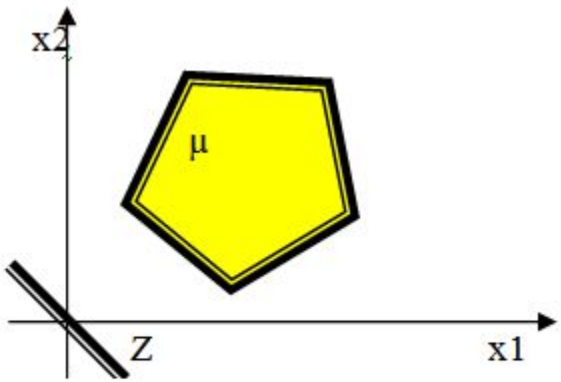
3.

Графический метод

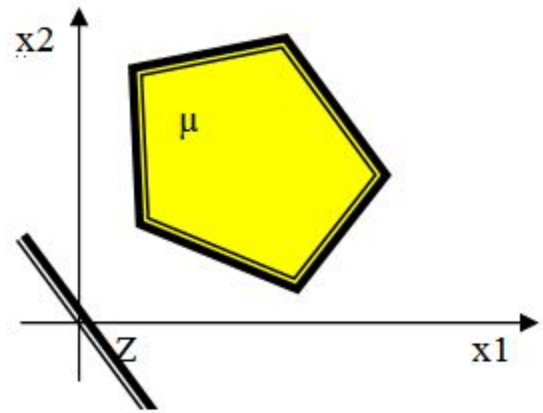
Алгоритм решения

1. Записывают уравнения граничных прямых.
2. Строят графики граничных прямых на плоскости.
3. Выделяют область решения неравенств системы.
4. <u>Строят многоугольник решений.</u>
5. Строят графики линейной формы.
6. Определяют экстремальную точку многоугольника.
7. Вычисляют значение линейной формы в полученной точке.

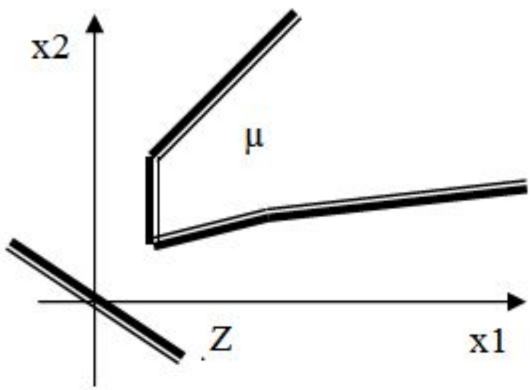
- При решении задачи линейного программирования графическим методом могут встретиться следующие случаи:



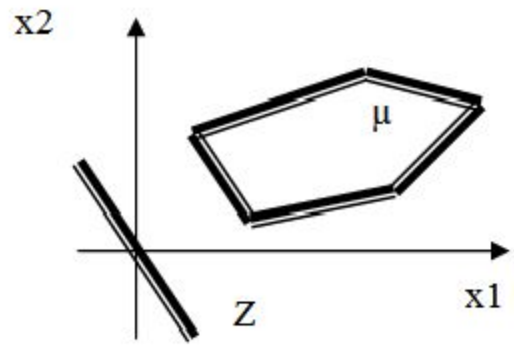
Задача имеет единственное решение



Задача имеет единственное бесконечное множество решение



Линейная форма не ограничена



Система ограничений несовместна

Транспортная задача. Метод потенциалов

Задача:

В хозяйстве требуется перевезти во время уборки 1000 тонн зерна с 5 полей на 4 сушильно-сортировальных пункта: с 1-ого поля 200 т.; со 2-го – 250 т.; с 3-го – 100 т.; с 4 –го – 300 т.; с 5-го – 250 т.

На первом сушильно-сортировальном пункте можно переработать 100 т., на 2-ом – 100 т., на 3-ем – 250 т., на 4-ом – 550 т.

Известны расстояния от полей до сушильно-сортировальных пунктов:

ССП / Поле	1	2	3	4
1	5	6	2	2
2	9	7	4	6
3	7	1	4	5
4	5	2	2	4
5	6	4	3	4

Требуется составить оптимальный план перевозок, при котором транспортные затраты будут минимальными.

Транспортная задача. Метод потенциалов

- **Решение**

1) составить таблицу следующего вид:

ССП / Поле	1	2	3	4	Наличие зерна	Ui
1	5 5)	6)	2)	2)	200	
2	9)	7)	4)	6)	150	
3	7)	1)	4)	5)	100	
4	5)	2)	2)	4)	300	
5	6)	4)	3)	4)	250	
Объем перера-ботки	100	100	250	550	1000	X
Vj					X	

Вопрос 2.2 Решение задач линейного программирования

Поле \ ССП	1	2	3	4	Наличие зерна	i
1	5)	6)	2)	2) 200	200	0
2	9) 50	7)	4)	6) 100	150	4
3	7) 50	1) 50	4)	5)	100	2
4	5)	2) 50	2) 250	4)	300	3
5	6)	4)	3)	4) 250	250	2
Объем перера-ботки	100	100	250	550	1000	
Vj	5	-1	-1	2	X	

min {50, 250}
50

$c_{ij} = u_i + v_j$

$c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$

$5-(0+5)=0$

$6-(0+\ldots$

Графический метод

ПРИМЕР

$$Z=3x_1+8x_2 \square \max$$

при условиях:

$$x_1+5x_2 \le 15,$$
$$2x_1+x_2 \le 7,$$
$$4x_1 \le 9,$$
$$9x_2 \le 13,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

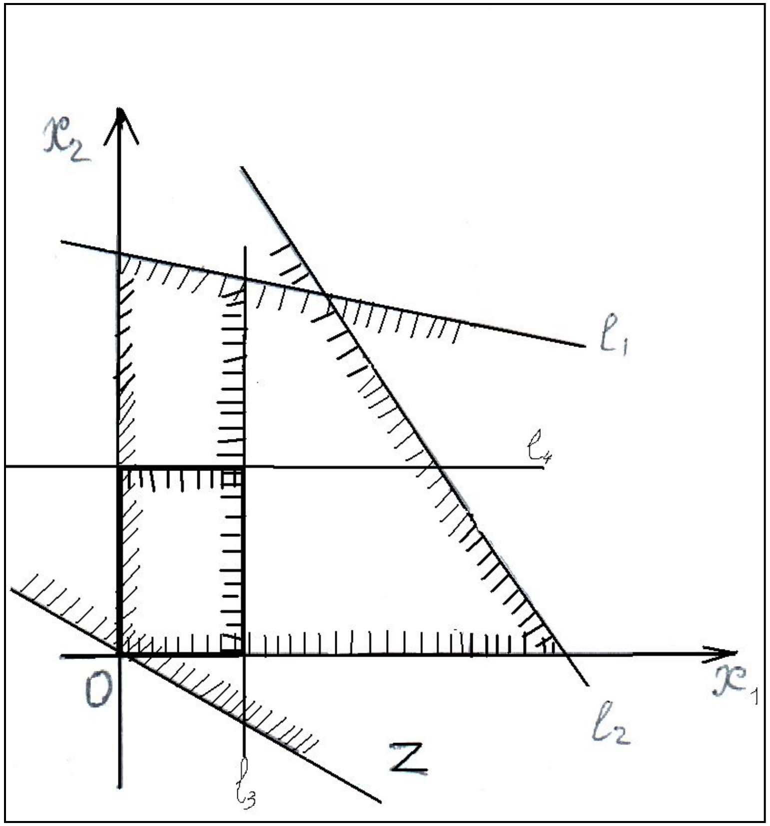
Решение. Запишем уравнения граничных прямых и построим графики на плоскости в выбранной системе координат:

$$x_1+5x_2 =15 \ (L_1),$$
$$2x_1+x_2 = 7 \ (L_2),$$
$$4x_1=9 \ (L_3),$$
$$9x_2 =13 \ (L_4),$$
$$x_1=0 \ (L_5),$$
$$x_2 =0 \ (L_6).$$

Выделим область решения каждого неравенства и построим многоугольник решений μ.

Построим также график, соответствующий полученному уравнению прямой:

$$\mathbf{3x_1+8x_2 =0.}$$



Параллельно перемещая прямую Z в направлении вектора (7,5), видим, что экстремальной точной является точка 1,4;2,25).

Max Z C(1,4;2,25) = 3*1,4+8*2,25=17.95 (18.3)

Ответ: max Z=17.95, x1=1,4, x2=2,25.

Симплекс метод

- **Пример задания на MAX**

  Площадь пашни, отводимая под зерновые культуры, составляет 2000 га, резерв минеральных удобрений – 1600 ц д.в. и имеется 14600 человеко-дней затрат живого труда.

  Требуется определить такое сочетание посевов озимой пшеницы, проса и гречихи, чтобы прибыль при этом была бы максимальной.

Показатель	Культура		
	Озимая пшеница	Просо	Гречиха
1. Урожайность (ц/га)	24	14	12
2. Затраты труда (чел. – дни/ц)	0,4	0,5	0,6
3. Затраты удобрений (ц ч.в./га)	0,6	0,4	0,8
4. Себестоимость (руб/ц)	6	5	16
5. Цена реализации (руб/ц)	8	8	20

Симплекс метод

Таблица 1 – Урожайность, нормативы затрат и цены реализации продукции

Показатель	Культура		
	Озимая пшеница	Просо	Гречиха
1. Урожайность (ц/га)	24	14	12
2. Затраты труда (чел. – дни/ц)	0,4	0,5	0,6
3. Затраты удобрений (ц ч.в./га)	0,6	0,4	0,8
4. Себестоимость (руб/ц)	6	5	16
5. Цена реализации (руб/ц)	8	8	20

- Решение Обозначим через

$$X_1 + X_2 + X_3 \le 2000;$$
$$0{,}4*24*X_1 + 0{,}5*14*X_2 + 0{,}6*12*X_3 \le 14600;$$
$$0{,}6*X_1 + 0{,}4*X_2 + 0{,}8*X_3 \le 1600.$$

Целевая функция задачи при этом будет выглядеть так:

$$Z = 24*(8-6)*X_1 + 14*(8-5)*X_2 + 12*(20-16)*X_3 \to \max.$$

Симплекс метод

- После упрощения получим следующую систему неравенств:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 &\le 2000; \\ 9{,}6X_1 + 7X_2 + 7{,}2X_3 &\le 14600; \\ 0{,}6X_1 + 0{,}4X_2 + 0{,}8X_3 &\le 1600; \\ Z = 48X_1 + 42X_2 + 48X_3 &\to \max. \end{aligned}$$

- Введем дополнительные переменные: X4, X5, X6, преобразующие неравенства в уравнения. Тогда система (I) без целевой функции запишется так **(II):**

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &= 2000; \\ 9{,}6X_1 + 7X_2 + 7{,}2X_3 + X_5 &= 14600; \\ 0{,}6X_1 + 0{,}4X_2 + 0{,}8X_3 + X_6 &= 1600. \end{aligned}$$

Симплекс метод

- Каждое уравнение системы (II), эквивалентной системе (I), можно разрешить относительно X4 , X5 и X6. Проделав это, получим новую систему – **(III),** эквивалентную системе (I) и (II):

$$X_4 = 2000 - (X_1 + X_2 + X_3);$$
$$X_5 = 14600 - (9{,}6X_1 + 7X_2 + 7{,}2X_3);$$
$$X_6 = 1600 - (0{,}6X_1 + 0{,}4X_2 + 0{,}8X_3).$$

- Целевую функцию перепишем в виде:

$$Z = 0-(-48X_1 - 42X_2 - 48X_3).$$

- От системы (**III**) переходим к составлению первой симплексной таблицы.

Базисная неиз-вестная	Свободный член	Основные неизвестные			Дополнительные неизвестные		
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_4	2000	1	1	1	1	0	0
X_5	14600	9,6	7,0	7,2	0	1	0
X_6	1600	0,6	0,4	0,8	0	0	1
Z	0	-48	-42	-48	0	0	0

Симплекс метод

1) **Просматривая последнюю строку** симплекс-таблицы 1, видим, что **максимальный по модулю элемент** принадлежит столбцу X1 и X3 и равен – 48.

- Любой из этих столбцов, пусть столбец X1, примем за ***разрешающий.***
- Выделим его стрелочкой (↑).

2) Рассмотрим отношение элементов столбца свободных членов к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца и выберем среди этого отношения **наименьшее**:

Симплексная таблица 1

Базисная неиз-вестная	Свободный член	Основные неизвестные			Дополнительные неизвестные		
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_4	2000	1	1	1	1	0	0
X_5	14600	**9,6**	7,0	7,2	0	1	0
X_6	1600	0,6	0,4	0,8	0	0	1
Z	0	-48	-42	-48	0	0	0

↑

Симплекс метод

- Переходим к составлению симплекс-таблицы 2.
- Поделим разрешающую строку на генеральный элемент, предварительно выведя из базиса X5 и введя X1.
- В результате подсчета **получим 2-ую симплексную таблицу:**

БН	Свободный член	Основные неизвестные			Дополнительные неизвестные		
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_4	479.2	0.0	0.3	**0.3**	1.0	-0.1	0.0
X_1	1520.8	1.0	0.7	0.8	0.0	0.1	0.0
X_6	687.5	0.0	0.0	0.4	0.0	-0.1	1.0
Z	73000.0	0.0	-7.0	-12.0	0.0	5.0	0.0

- В результате аналогичных преобразований **получим 3-ю симплекс-таблицу**:

БН	Свободный член	Основные неизвестные			Дополнительные неизвестные		
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
x3	1916.7	0	1	1	4	0	0
x1	83.3	1.0	-0.1	0.0	-3.0	0.4	0.0
X_6	16.7	0.0	-0.4	0.0	-1.4	0.1	1.0
Z	96000.0	0.0	6.0	0.0	48.0	0.0	0.0

Симплекс метод

- Пример задания на MIN
- Требуется определить оптимальный вариант суточного рациона кормления мясо-молочных коров в стойловый период. Средний живой вес коровы 450 кг, среднесуточный удой 16 кг, жирность молока 3,8%.
- Хозяйство располагает следующими кормами: концентрированные, грубые (сено многолетних трав и солома зерновых), силосные.
- Минимально допустимая потребность в питательных веществах, рассчитанная с учетом веса коровы и её продуктивности задана.
- В рационе кормов необходимо иметь не менее: 6 кг сена, 20 кг силоса и 4 кг концентрированных кормов.
- Среднее содержание питательных веществ и себестоимость в расчете на единицу корма установлены (табл. 2).
- Критерием оптимальности рациона является его себестоимость.

Показатель	На 1 ц. корма				Суточная потребность на гол. (не менее)
	концентрированных (X_1)	сено (X_2)	солома (X_3)	силос (X_4)	
Кормовые ед. (ц)	1,0	0,4	0,2	0,15	0,13
Протеин (кг)	10,0	4,0	2,0	0,8	1,20
Себестоимость (у.ед./ц)	5,0	2,0	0,8	0,6	-

Симплекс метод

- **Решение.** С учетом принятых условных обозначений (см. табл.2) модель, описывающая минимальную стоимость рациона (Z) запишется так:

найти $Z = 5*X1 + 2*X2 + 0,8*X3 + 0,6 * X4 \rightarrow MIN$

при условии **(I):**

$X1 + 0,4X2 + 0,2*X3 + 0,15 * X4 \geq 0,13;$

$10*X1 + 4*X2 + 2*X3 + 0,8 * X4 \geq 1,20;$

$X1 \geq 0,04;$

$X2 \geq 0,06;$

$X4 \geq 0,20.$

Преобразуя неравенства системы (I) в уравнения путем введения дополнительных неизвестных X5, X6 , X7 , X8 и X9 получим **(II):**

$X1 + 0,4X2 + 0,2*X3 + 0,15 * X4 - X5 = 0,13;$

$10*X1 + 4*X2 + 2*X3 + 0,8 * X4 - X6 = 1,20;$

$X1 - X7 = 0,04;$

$X2 - X8 = 0,06;$

$X4 – X9 =0,20;$

$Z = 5*X1 + 2*X2 + 0,8*X3 + 0,6 * X4 \rightarrow MIN.$

Вопрос 2.2 Решение задач линейного программирования

Введем в левую часть каждого уравнения системы **(II)** по одному искусственному неизвестному (Уi) и получим тогда **(Ш)**:

X1 + 0,4X2 + 0,2*X3 + 0,15 * X4 - X5 + У1 = 0,13;
10*X1 + 4*X2 + 2*X3 + 0,8 * X4 - X6 + У2 = 1,20;
X1 - X7 + У3 = 0,04;
X2 - X8 + У4 = 0,06;
X4 – X9 + У5 =0,20;
Z = 5*X1 + 2*X2 + 0,8*X3 + 0,6 * X4 → MIN.

При этом У1, У2, У3, У4 и У5 должны быть равны нулю.

После этого разрешаем уравнения системы (Ш) относительно искусственных неизвестных, преобразуем функцию Z до вида:

$Z=0-(-5*X1 - 2*X2 - 0,8*X3 - 0,6 * X4)$,

а также минимизируем функцию $F=(У1 + У2 + У3 + У4 + У5)$, заранее зная,

что ее значение должно быть равно нулю (складываем по столбцам).

Получим новую систему **(IV)**:

$$
\begin{aligned}
У1 &= 0,13 - (X1 + 0,4X2 + 0,2*X3 + 0,15 * X4 - X5);\\
У2 &= 1,20 - (10*X1 + 4*X2 + 2*X3 + 0,8 * X4 - X6);\\
У3 &= 0,04 - (X1 - X7);\\
У4 &= 0,06 - (X2 - X8);\\
У5 &= 0,20 - (X4 - X9);\\
Z &= 0 - (- 5*X1 - 2*X2 - 0,8*X3 - 0,6 * X4);\\
F &= 1,63 - (12*X1 + 5,4*X2 + 2,2*X3 + 1,95* X4- X5 - X6- X7- X8- X9).
\end{aligned}
$$

В результате последовательных преобразований получим следующую симплекс-таблицу:

БН	СЧ	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
X4	0.20	0	0	0	1	0	0	0	0	-1
X3	0.20	0	0	1	0	0	-1	5	2	0
X1	0.04	1	0	0	0	0	0	-1	0	0
X2	0.06	0	1	0	0	0	0	0	-1	0
X5	0.004	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Z	0.60	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
F	0.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Ответ: $X_1 = 0{,}04$; $X_2 = 0{,}06$; $X_3 = 0{,}2$; $X_4 = 0{,}2$; $X_5 = 0{,}004$; $Z=0.60$

Экономический смысл задачи состоит в следующем: суточный рацион коров имеет оптимальную структуру при 0,04 ц концентрированного корма, 0,06 ц – сена, 0,2 ц соломы, и 0,2 ц. силоса.

При этом себестоимость корма при такой структуре составит 0,6 у.е./ц