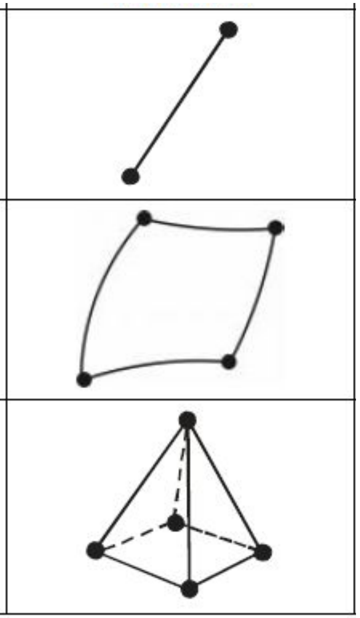
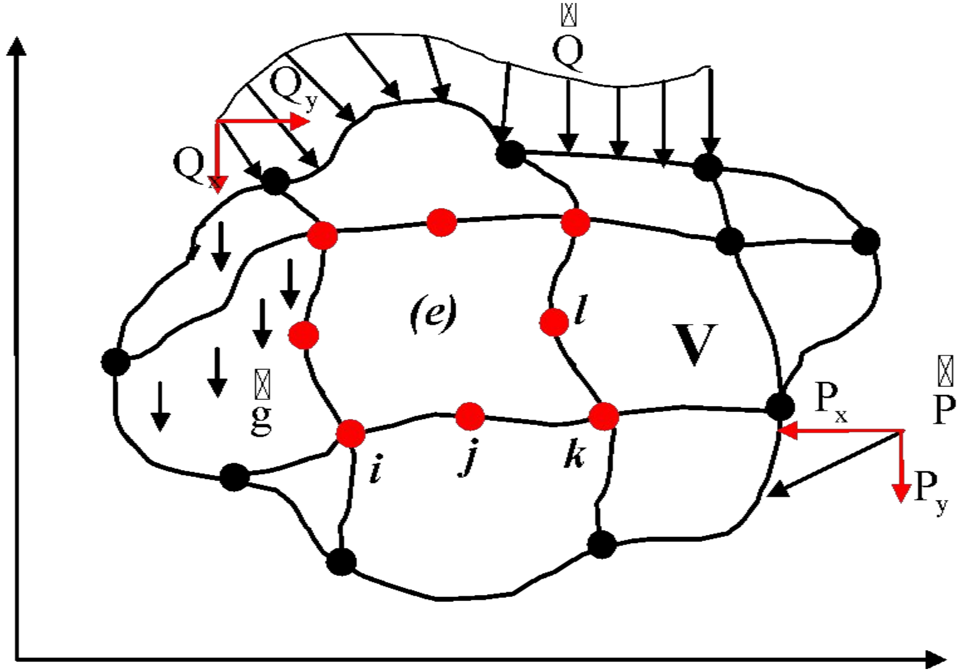
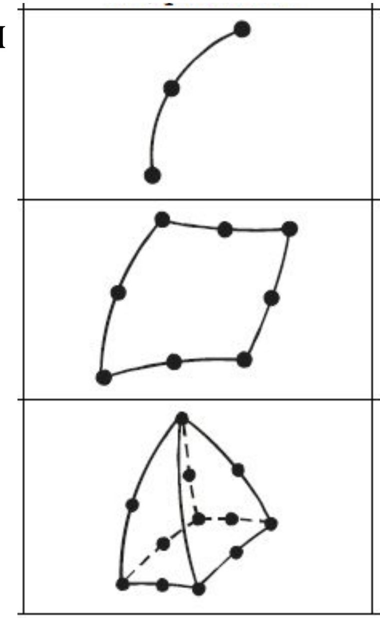
Лекция Вычислительная механика **Основные понятия МКЭ**

К.т.н., доцент каф. ВМиМ
Каменских Анна Александровна
239-15-64

Основные понятия МКЭ, обозначения и соотношения





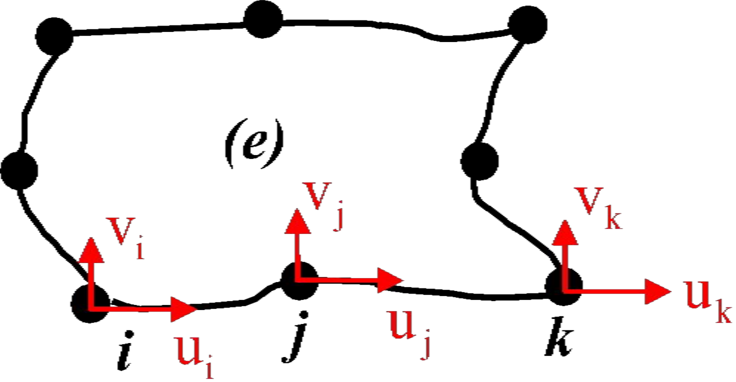


Первый этап: построение сетки – аппроксимация исходной области набором простых по форме подобластей (конечных элементов (КЭ)). Замена не точна. КЭ связаны друг с другом в некоторых точках, расположенных на их границах – узлах КЭ. Основными неизвестными считаются перемещения этих точек (узлов).

Второй этап: Выбирается система функций, однозначно определяющих неизвестные (перемещения) внутри КЭ, через неизвестные в узлах КЭ – функции формы. Поля неизвестных внутри элемента аппроксимируются через неизвестные в узлах КЭ.

Третий этап: С использованием соотношений ТУ через введённые аппроксимации полей перемещений определяются деформации, а затем и напряжения в любой точке КЭ. В результате деформации и напряжения внутри КЭ оказываются выражены через перемещения узлов КЭ.

Четвёртый этап: Записываются условия равновесия системы КЭ, отражающие тот факт, что система внутренних сил упругости, приведённых к узлам КЭ, должна уравновешивать систему внешних сил, приведённую к узлам сетки. Условия равновесия записываются в жёсткостной форме и представляют собой СЛАУ относительно перемещений в узлах сетки. Проще говоря, учитывается физическая сторона решаемой задачи будь-то ТУ или другой.



$$\sigma_{ij,j}\left(\overline{x}\right)+g_i\left(\overline{x}\right)=0$$

$$\varepsilon_{ij}\left(\overline{x}\right)=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}\left(\overline{x}\right)+u_{j,i}\left(\overline{x}\right)\right)$$

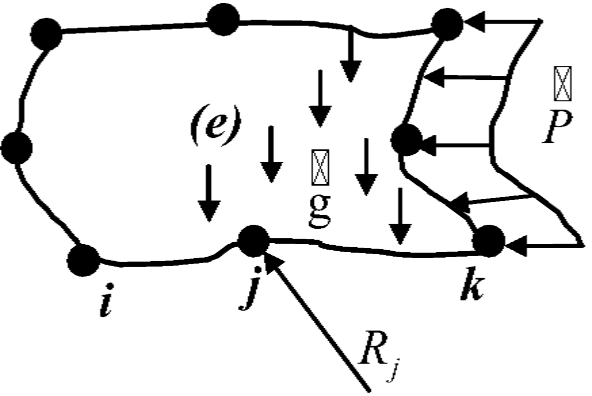
$$\sigma_{ij}\left(\overline{x}\right)=\lambda\theta\left(\overline{x}\right)\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}\left(\overline{x}\right)$$

$$u_i\left(\overline{x}\right)=U_i$$

$$\sigma_{ij}\left(\overline{x}\right)n_j=P_i$$

$$\theta=\varepsilon_x+\varepsilon_y$$

Построение КЭ соотношений из принципа возможных перемещений



Принцип возможных перемещений состоит в том, что для тела находящегося в состоянии равновесия и получившего в этом состоянии бесконечно малое возможное смещение точек, работа внутренних сил на возможное перемещение точек равна работе внешних сил на эти возможные перемещения.

Работа внешних сил

$$\delta A_F^e = R_{x_j}\delta u_j + R_{y_j}\delta \upsilon_j + \ldots + Q_{x_i}\delta u_i + Q_{y_i}\delta \upsilon_i + \ldots + \int\limits_{V^e}\left(g_x\delta u + g_y\delta\upsilon + \ldots\right)dV^e + \int\limits_{\Gamma^e}\left(p_x\delta u + p_y\delta\upsilon + \ldots\right)d\Gamma^e$$

$$\delta A_F = \delta\left\{\delta^e\right\}^T\left\{R^e\right\} + \delta\left\{\delta^e\right\}^T\left\{Q^e\right\} + \int\limits_{V^e}\delta\left\{f\right\}^T\left\{g\right\}dV^e + \int\limits_{\Gamma^e}\delta\left\{f\right\}^T\left\{p\right\}d\Gamma^e$$

$$\left\{f\right\} = \left[N^e\right]\left\{\delta^e\right\}$$

$$\boxed{\delta\left\{f\right\} = \delta\left[N^e\right]\left\{\delta^e\right\} \qquad \delta\left\{f\right\}^T = \delta\left\{\delta^e\right\}^T\left[N^e\right]^T}$$

$$\delta A_F^e = \delta\left\{\delta^e\right\}^T\left\{R^e\right\} + \delta\left\{\delta^e\right\}^T\left\{Q^e\right\} + \delta\left\{\delta^e\right\}^T\int\limits_{V^e}\left[N^e\right]^T\left\{g\right\}dV^e + \delta\left\{\delta^e\right\}^T\int\limits_{\Gamma^e}\left[N^e\right]^T\left\{p\right\}d\Gamma^e$$

$$\delta A_F^e = \delta\left\{\delta^e\right\}^T\left(\left\{R^e\right\} + \left\{Q^e\right\} + \int\limits_{V^e}\left[N^e\right]^T\left\{g\right\}dV^e + \int\limits_{\Gamma^e}\left[N^e\right]^T\left\{p\right\}d\Gamma^e\right)$$

$$\delta A_F^e = \delta\left\{\delta^e\right\}^T\left(\left\{R^e\right\} + \left\{Q^e\right\} + \left\{F_g^e\right\} + \left\{F_p^e\right\}\right)$$

$$\left\{F_g^e\right\} = \int\limits_{V^e}\left[N^e\right]^T\left\{g\right\}dV^e$$

$$\left\{F_p^e\right\} = \int\limits_{\Gamma^e}\left[N^e\right]^T\left\{p\right\}d\Gamma^e$$

Работа внутренних сил

$$\delta A_{\sigma}^{e}=\int\limits_{V^e}\left(\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\right)dV^e=\int\limits_{V^e}\left(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}\right)dV^e=\int\limits_{V^e}\delta\left\{\varepsilon\right\}^T\left\{\sigma\right\}dV^e$$

$$\int\limits_{V^e}\delta\left\{\varepsilon\right\}^T\left\{\sigma\right\}dV^e=\left|\begin{matrix}\left\{\sigma\right\}=\left[D^e\right]\left(\left\{\varepsilon\right\}-\left\{\varepsilon_0\right\}\right)+\left\{\sigma_0\right\}\\ \left\{\varepsilon\right\}=\left[B^e\right]\left\{\delta^e\right\}\end{matrix}\right|=\int\limits_{V^e}\delta\left(\left[B^e\right]\left\{\delta^e\right\}\right)^T\left(\left[D^e\right]\left(\left[B^e\right]\left\{\delta^e\right\}-\left\{\varepsilon_0\right\}\right)+\left\{\sigma_0\right\}\right)dV^e$$

$$\delta A_{\sigma}^{e}=\int\limits_{V^e}\delta\left\{\delta^e\right\}^T\left[B^e\right]^T\left(\left[D^e\right]\left(\left[B^e\right]\left\{\delta^e\right\}-\left\{\varepsilon_0\right\}\right)+\left\{\sigma_0\right\}\right)dV^e$$

$$\delta A_{\sigma}^{e}=\delta\left\{\delta^e\right\}^T\left(\int\limits_{V^e}\left[B^e\right]^T\left[D^e\right]\left[B^e\right]dV^e\right)\cdot\left\{\delta^e\right\}-\delta\left\{\delta^e\right\}^T\left(\int\limits_{V^e}\left[B^e\right]^T\left[D^e\right]\left\{\varepsilon_0\right\}dV^e\right)+\delta\left\{\delta^e\right\}^T\left(\int\limits_{V^e}\left[B\right]^T\left\{\sigma_0\right\}dV^e\right)$$

$$\delta A_{\sigma}^{e}=\delta\left\{\delta^e\right\}^T\left(\left[K^e\right]\left\{\delta^e\right\}-\left\{F_{\varepsilon_0}^{e}\right\}+\left\{F_{\sigma_0}^{e}\right\}\right)$$

$$\left[K^e\right]=\int\limits_{V^e}\left[B^e\right]^T\left[D^e\right]\left[B^e\right]dV^e$$

$$\left\{F_{\varepsilon_0}^{e}\right\}=\int\limits_{V^e}\left[B^e\right]^T\left[D^e\right]\left\{\varepsilon_0\right\}dV^e \qquad \left\{F_{\sigma_0}^{e}\right\}=\int\limits_{V^e}\left[B\right]^T\left\{\sigma_0\right\}dV^e$$

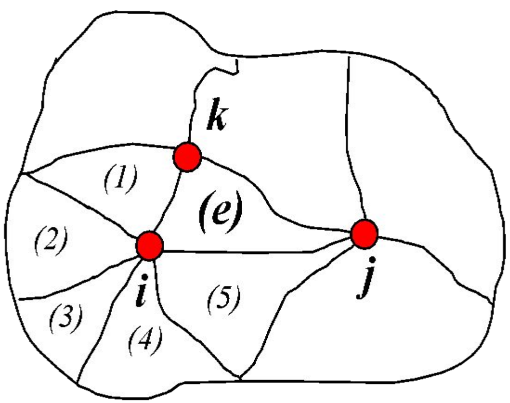
$$\delta A_\sigma^e = \delta A_F^e$$

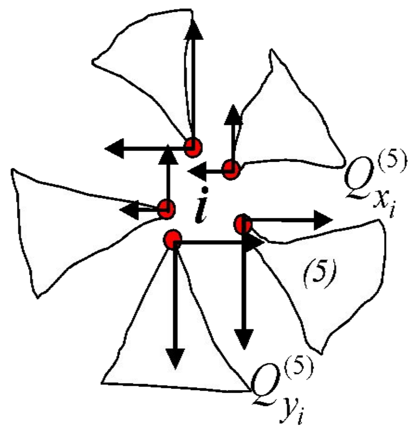
$$\delta\left\{\delta^e\right\}^T\left(\left[K^e\right]\left\{\delta^e\right\}-\left\{F_{\varepsilon_0}^e\right\}+\left\{F_{\sigma_0}^e\right\}\right)=\delta\left\{\delta^e\right\}^T\left(\left\{R^e\right\}+\left\{Q^e\right\}+\left\{F_g^e\right\}+\left\{F_p^e\right\}\right)$$

$$\delta\left\{\delta^e\right\}^T\left(\left[K^e\right]\left\{\delta^e\right\}-\left\{F_{\varepsilon_0}^e\right\}+\left\{F_{\sigma_0}^e\right\}-\left\{R^e\right\}-\left\{Q^e\right\}-\left\{F_g^e\right\}-\left\{F_p^e\right\}\right)=0$$

$$\delta\left\{\delta^e\right\}^T \neq 0$$

Выражение в скобках равно нулю!





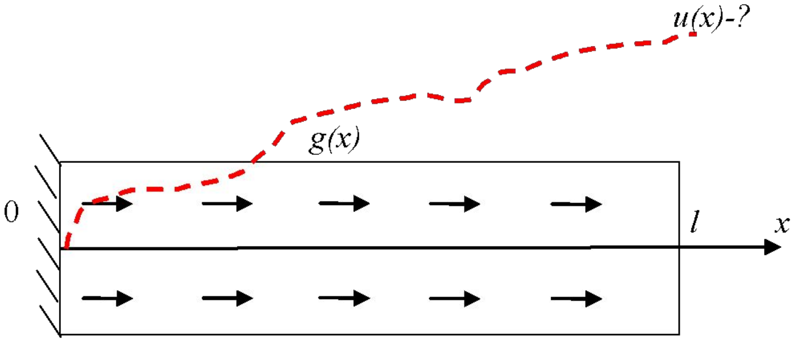
$$\left\{F^e\right\}=\left\{F_g^e\right\}+\left\{F_p^e\right\}+\left\{F_{\varepsilon_0}^e\right\}-\left\{F_{\sigma_0}^e\right\}+\left\{R^e\right\}$$

$$\sum_e Q_{x_i}^e = 0 \qquad \sum_e Q_{y_i}^e = 0 \qquad \sum_e Q^e = 0$$

$$\left[K^e\right]\left\{\delta^e\right\}-\left\{F^e\right\}-\left\{Q^e\right\}=0 \qquad \left[K^e\right]\left\{\delta^e\right\}=\left\{F^e\right\}+\left\{Q^e\right\} \qquad \left\{Q^e\right\}=\left[K^e\right]\left\{\delta^e\right\}-\left\{F^e\right\}$$

$$\sum_e\left[K^e\right]\left\{\delta^e\right\}=\sum_e\left\{F^e\right\}$$

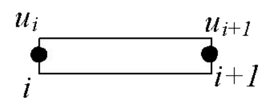
$$\left[K\right]\left\{\delta\right\}=\left\{F\right\}$$



$$U^{(i)}(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

$$\begin{cases} U_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i \\ U_{i+1} = \alpha_1 + \alpha_2 x_{i+1} \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{U_{i+1} - U_i}{x_{i+1} - x_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = U_i - \frac{U_{i+1} - U_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot x_i = \frac{U_i \cdot x_{i+1} - U_{i+1} \cdot x_i}{x_{i+1} - x_i};$$

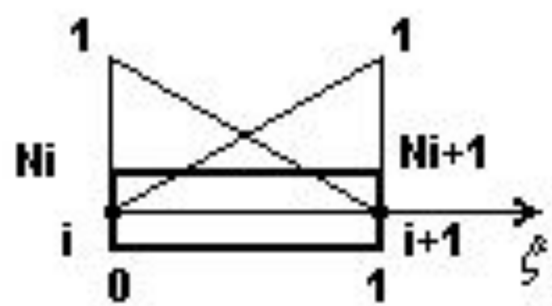


$$U^{(i)}(x) = \frac{U_i \cdot x_{i+1} - U_{i+1} \cdot x_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{U_{i+1} - U_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot x = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \cdot U_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot U_{i+1} = N_i(x) \cdot U_i + N_{i+1}(x) \cdot U_{i+1}$$

$$N_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}; \; N_{i+1}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$N_i(\xi) = 1 - \xi; \quad N_{i+1}(\xi) = \xi$$

$$U^{(i)}(x) = \begin{cases} U^{(i)}(x) = N_i(x) U_i + N_{i+1}(x) U_{i+1}, x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, \quad x \notin [x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$



$$U(x) = \sum_{i=1}^{4} U^{(i)}(x)$$

$$\Pi = \Pi_\varepsilon + \Pi_F = \Pi_\varepsilon - A_F = \sum_{i=1}^{4} \left(\Pi_\varepsilon^i - A_F^i \right)$$

$$\Pi_\varepsilon^i = \frac{1}{2} \cdot F \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sigma_x \varepsilon_x dx = \frac{1}{2} EF \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2$$

$$A_F^i = F \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) U(x) dx \qquad U_1 = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial U_i} = 0, i = \overline{2,5}$$

$$\Pi_\varepsilon^i = \frac{EF}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} U_i + \frac{\partial N_{i+1}}{\partial x} U_{i+1} \right) dx = \frac{EF}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{U_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{U_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \right)^2 dx = \frac{EF}{2(x_{i+1} - x_i)^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(U_{i+1} - U_i \right)^2 dx =$$

$$= \frac{EF}{2} \left(U_{i+1} - U_i \right)^2 \frac{1}{x_{i+1} - x_i}$$

$$A_F^i = F \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) \left(N_i U_i + N_{i+1} U_{i+1} \right) dx$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_2} = \frac{\partial \Pi^1}{\partial U_2} + \frac{\partial \Pi^2}{\partial U_2} = \frac{EF}{(x_2 - x_1)} U_2 - F \int_{x_1}^{x_2} g(x) N_2(x) dx - \frac{EF}{(x_3 - x_2)} \left(U_3 - U_2 \right) - F \int_{x_2}^{x_3} g(x) N_2(x) dx =$$

$$= K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} U_2 + K_{23}^{(2)} U_3 - F_2^{(1)} - F_2^{(2)} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_3} = \frac{\partial \Pi^2}{\partial U_3} + \frac{\partial \Pi^3}{\partial U_3} = \frac{EF}{(x_3 - x_2)} \left(U_3 - U_2 \right) - F \int_{x_2}^{x_3} g(x) N_3(x) dx - \frac{EF}{(x_4 - x_3)} \left(U_4 - U_3 \right) - F \int_{x_3}^{x_4} g(x) N_3(x) dx =$$

$$= K_{33}^{(2)} U_3 + K_{32}^{(2)} U_2 + K_{33}^{(3)} U_3 + K_{34}^{(3)} U_4 - F_3^{(2)} - F_3^{(3)} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_4} = K_{44}^{(3)} U_4 + K_{43}^{(3)} U_3 + K_{45}^{(4)} U_5 + K_{44}^{(4)} U_4 - F_4^{(3)} - F_4^{(4)} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_5} = K_{54}^{(4)} U_4 + K_{55}^{(4)} U_5 - F_5^{(4)} = 0$$

$$K_{23}^{(2)} = -\frac{EF}{x_3 - x_2}, \quad K_{32}^{(2)} = -\frac{EF}{x_3 - x_2}, \Rightarrow K_{23}^{(2)} = K_{32}^{(2)}$$

$$
\begin{cases}
\left(K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)}\right)U_2 + K_{23}^{(2)}U_3 = F_2^{(1)} + F_2^{(2)} \\
K_{32}^{(2)}U_2 + \left(K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(3)}\right)U_3 + K_{34}^{(3)}U_4 = F_3^{(2)} + F_3^{(3)} \\
K_{43}^{(3)}U_3 + \left(K_{44}^{(3)} + K_{44}^{(4)}\right)U_4 + K_{45}^{(4)}U_5 = F_4^{(3)} + F_4^{(4)} \\
K_{54}^{(4)}U_4 + K_{55}^{(4)}U_5 = F_5^{(4)}
\end{cases}
$$

$$
[K]\{U\} = \{F\}
$$

$$
\begin{vmatrix}
K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & 0 & 0 \\
K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} & 0 \\
0 & K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)} + K_{44}^{(4)} & K_{45}^{(4)} \\
0 & 0 & K_{54}^{(4)} & K_{55}^{(4)}
\end{vmatrix}
\begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} F_2^{(1)} + F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} + F_3^{(3)} \\ F_4^{(3)} + F_4^{(4)} \\ F_5^{(4)} \end{Bmatrix}
$$