МАЛОИЗВЕСТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ПЛАНИМЕТРИИ

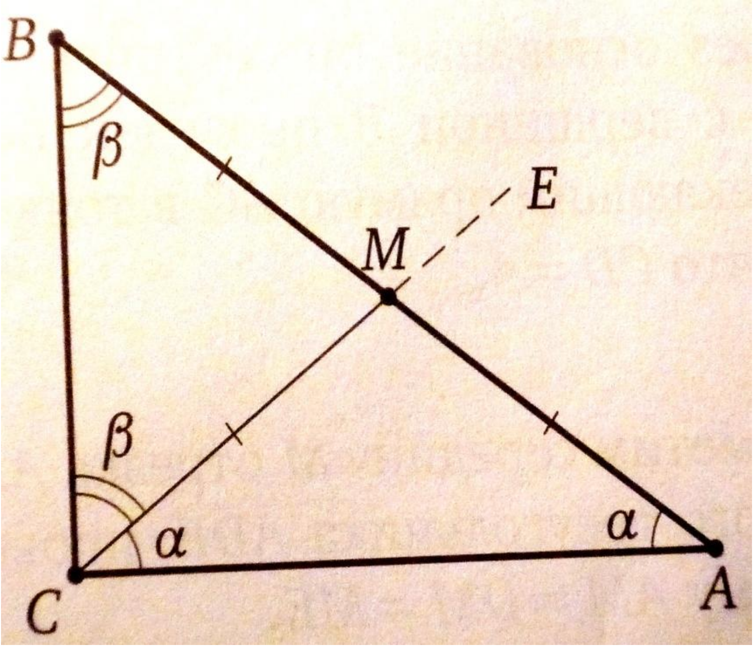
Методическая разработка

Учитель математики
Потапова Ф.Ф. .

2014-2015 уч. год.

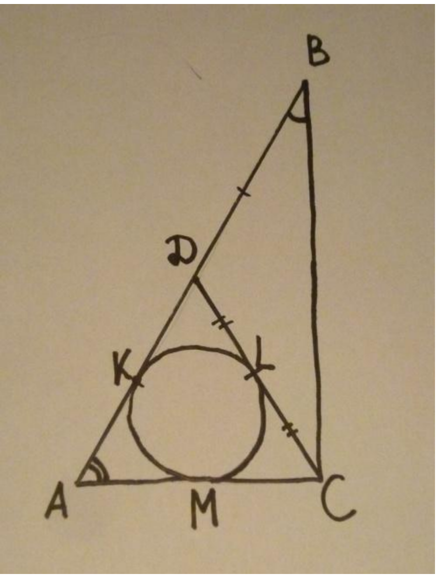
§ Медиана прямоугольного треугольника.

Теорема. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.



Теорема (обратная). Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

Пример: Точка *D* – середина гипотенузы *AB* прямоугольного треугольника *ABC.* Окружность, вписанная в треугольник *ACD,* касается отрезка *CD,* в его середине. Найдите острые углы треугольника *ABC.*



Решение.

Пусть *L* – точка касания вписанной окружности с *DC;*

K – точка касания вписанной окружности с *AD;*

M – точка касания вписанной окружности с *AC.*

ΔADC – равнобедренный, т.к. *DC* – медиана прямоугольного треугольника.

Известно, что $DL=LC$. При этом $KD=DL$

$AK=LC$, т.к. ΔADC – равнобедренный.

$AK=AM$, $MC=LC$ – как отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки.

Тогда $KD=DL=LC=MC=AK=AM$, то есть треугольник равносторонний.

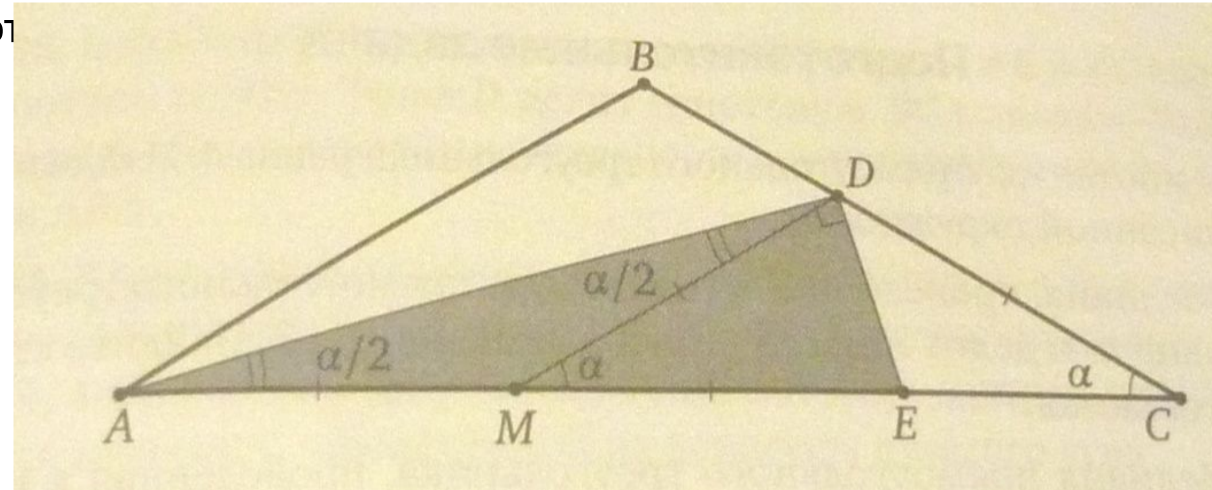
Тогда $AD=DC=AC$, $\angle DAC=\angle DCA=\angle ADC=60^\circ.$

Таким образом, в ΔABC $\angle A=60^\circ$

$B=90^\circ- 60^\circ=\angle 0^\circ$

Ответ: 60˚, 30˚.

Пример. Через основание биссектрисы *AD* равнобедренного треугольника *ABC* с вершиной *B* проведен перпендикуляр к этой биссектрисе, пересекающей прямую *AC* в точке *E.* Найдите от



Решение.

Отметим середину *M* отрезка *AE*. Отрезок *DM* – медиана прямоугольного треугольника *ADE*,

проведенна $\angle BAC = \angle BCA = \angle\alpha$. По теореме о внешнем угле треугольника

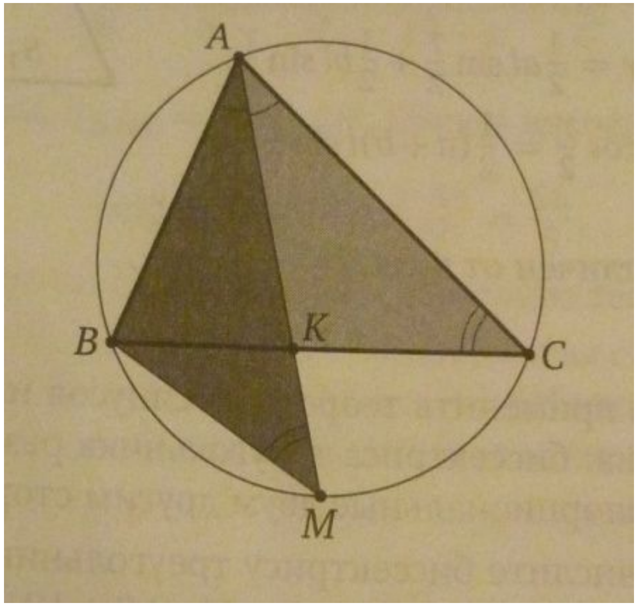
Обозначим, $\angle DME = \angle DAC + \angle ADM = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\alpha}{2} = \alpha = \angle DCM$,

значит, треугольник *CDM* равнобедренный. Следовательно, *AE=2DM=2DC=8*.

Ответ: 8.

§ Биссектриса.

Утверждение. *Квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, её заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой.*



Доказательство.
Пусть *M* – точка пересечения продолжения биссектрисы *AK* треугольника *ABC* с описанной около этого треугольника окружностью. Тогда треугольник *ACK* подобен треугольнику *AMB* по двум углам.
Поэтому $\frac{AK}{AB} = \frac{AC}{AM}$, или $AK(AK + KM) = AB \cdot AC$,

$$AK^2 + AK \cdot KM = AB \cdot AC.$$

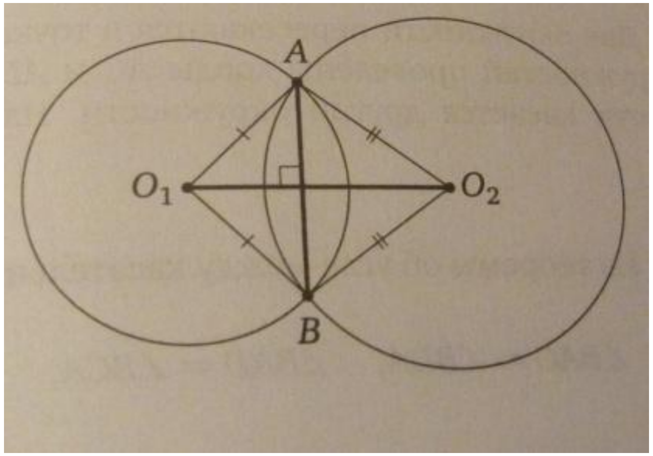
Следовательно,

$$AK^2 = AB \cdot AC - AK \cdot KM = AB \cdot AC - BK \cdot KC$$

$AK \cdot KM = BK \cdot KC$(по теореме о произведениях отрезков пересекающихся хорд), чтд.

§ Пересекающиеся окружности.

Утверждение. *Линия центров пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам.*

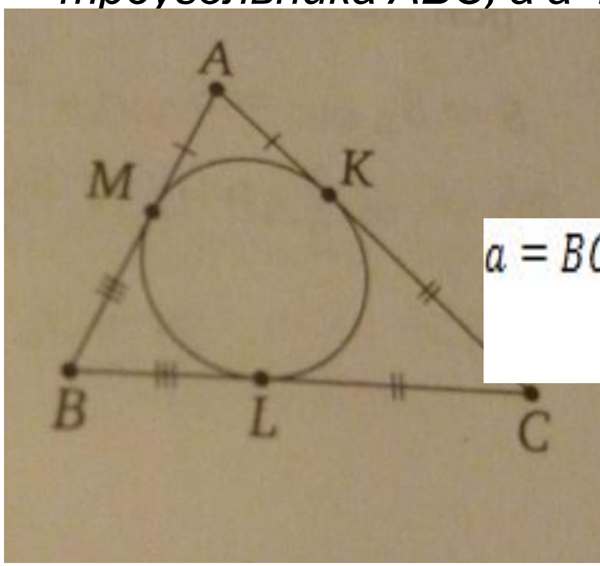


Доказательство.

Пусть *AB* – общая хорда пересекающихся окружностей с центрами   Точки равноудалены от концов отрезка *AB,* поэтому   - серединный перпендикуляр к отрезку *AB,* чтд.

§ Окружности, связанные с треугольником и четырёхугольником.

Утверждение 1. *Если вписанная окружность касается стороны AB треугольника ABC в точке M, то AM=p-a, где p – полупериметр треугольника ABC, а a=BC.*

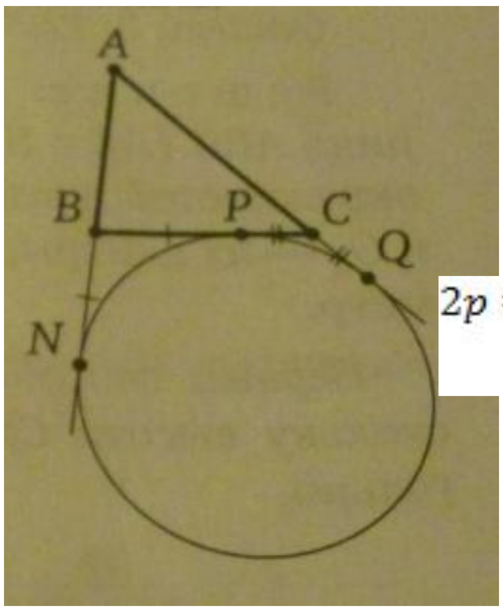


Доказательство. Обозначим *AC=b, AB=c.* Пусть *K* и *L* – точки касания вписанной окружности со сторонами *AC* и *BC* соответственно. Тогда,

$$a = BC + LC = BM + CK = (AB - AM) + (AC - AK) = (c - AM) + (b - AM)$$
$$= b + c - 2AM,$$

откуда $AM = \dfrac{b + c - a}{2} = p - a$, чтд.

Утверждение 2. *Если окружность касается стороны ВС треугольника АВС, продолжения стороны АВ в точке N и продолжения стороны АС, то АN=р, где р – полупериметр треугольника.*



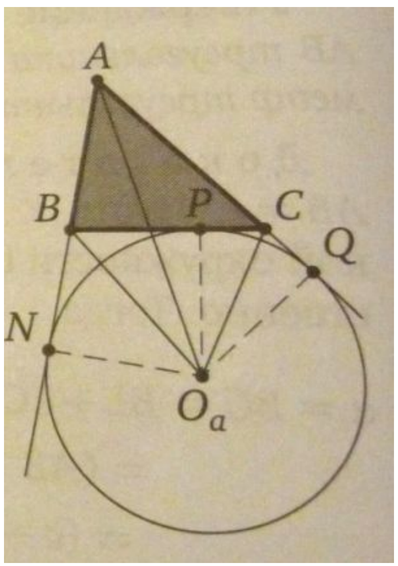
Доказательство. Пусть окружность касается стороны BC в точке P, а продолжения стороны AC – в точке Q. Тогда

$$2p = AB + BC + AC = AB + (BP + CP) + AC = AB + (BN + CQ) + AC = (AB + BN) + (CQ + AC) = AN + AQ = 2AN$$

откуда $AN=p$.

Утверждение. *Если р – полупериметр треугольника , r – радиус его вписанной окружности, а – радиус вневписанной окружности, касающейся стороны, равной а, то*

$$S = pr, \quad S = (p-a)r_a.$$



Доказательство (формулы 2). Обозначим BC=a, AC=b, AB=c. Пусть - центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC; P, N и Q – точки касания этой окружности со стороной BC и продолжениями сторон AB и AC соответственно. Тогда

$$S = S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AO_aB} + S_{\Delta AO_aC} + S_{\Delta BO_aC} =$$

$$= \frac{1}{2}AB \cdot O_aN + \frac{1}{2}AC \cdot O_aQ - \frac{1}{2}BC \cdot O_aP =$$

$$= \frac{1}{2}cr_a + \frac{1}{2}br_a - \frac{1}{2}ar_a = \frac{c+b-a}{2} \cdot r_a = (p-a)r_a$$, чтд.