Тема 4. Аффинные системы координат

Задачи темы 4:

- Ввести понятие аффинного (точечного) пространства и аффинных систем координат (в частности, ДПСК).
- Установить связь между координатами фиксированной точки в различных аффинных системах координат.
- Привести основные виды уравнений линии на плоскости в аффинной системе координат.

- Познакомить читателя с операциями векторного и смешанного произведения геометрических векторов, свойствами этих операций и основными направлениями использования.
- Обсудить свойства и возможности использования операции скалярного произведения геометрических векторов.
- Распространить операцию скалярного произведения, а также такие понятия, как длина вектора (норма) и расстояние между точками на случай вещественного n-мерного пространства.

§4.1. Связь между векторным и точечным пространством. Декартова прямоугольная система координат

Сущность метода координат заключается в том, что различным геометрическим объектам сопоставляются некоторым стандартным способом уравнения или системы уравнений , а изучение свойств геометрических объектов сводится к изучению свойств уравнений.

Определение. Под ***аффинным пространством*** Ω мы будем понимать множество точек, для которого заданы:

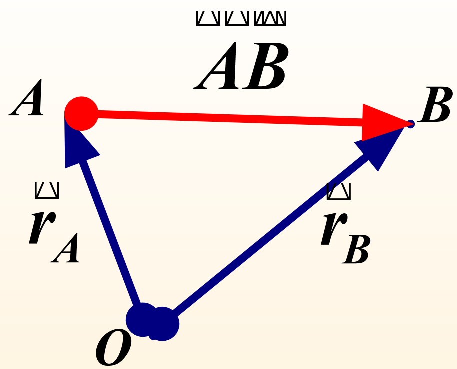
- **линейное пространство** W (ассоциированное с Ω);
- **соответствие**, сопоставляющее любым двум точкам $A, B \in \Omega$ определенный вектор $\overrightarrow{AB} \in W$;

причем выполнены аксиомы:

- Для любой точки $A \in \Omega$ и любого вектора $\vec{v} \in W$ существует единственная точка $B \in \Omega$, удовлетворяющая условию $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.
- Для произвольных точек $A,\ B,\ C \in \Omega$ справедливо так называемое правило треугольника:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Выражение вектора через радиус-векторы его начала и конца



$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

Радиус-вектор точки A

Радиус-вектор точки B

Определение. ***Аффинной системой координат*** в аффинном пространстве Ω^2, называют совокупность, состоящую из:

- **фиксированной точки** $O \in \Omega^2$ (начала координат);
- **базиса** $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ соответствующего (ассоциированного с Ω^2) линейного пространства V^2.

$$C(x_1, x_2)$$

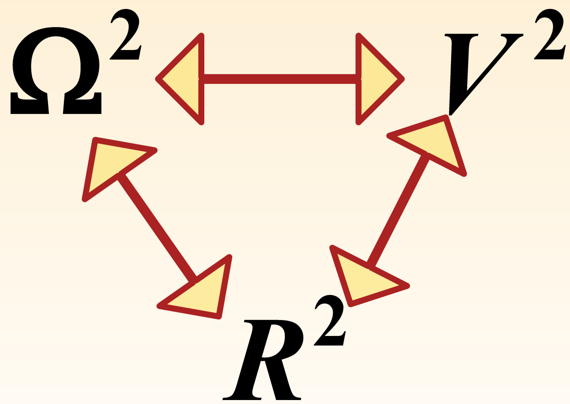
$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_C = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2$$

$$\overrightarrow{OC} = (x_1, x_2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_1^B - x_1^A)\vec{v}_1 + (x_2^B - x_2^A)\vec{v}_2$$

или $\overrightarrow{AB} = (x_1^B - x_1^A,\ x_2^B - x_2^A)$

координаты вектора $\overrightarrow{AB}$

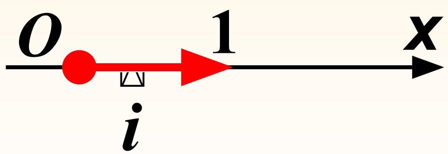


- Ортонормированный базис;

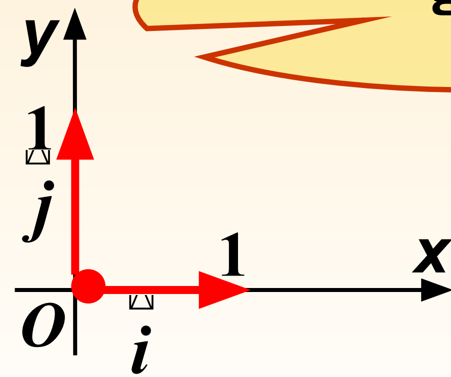
- Декартова прямоугольная система координат (ДПСК)

ДПСК в Ω^1, Ω^2 и Ω^3

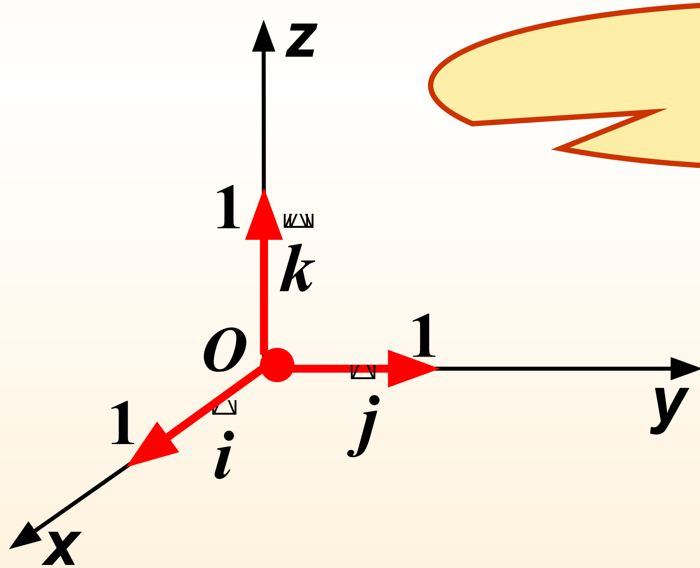
ДПСК в Ω^1



ДПСК в Ω^2

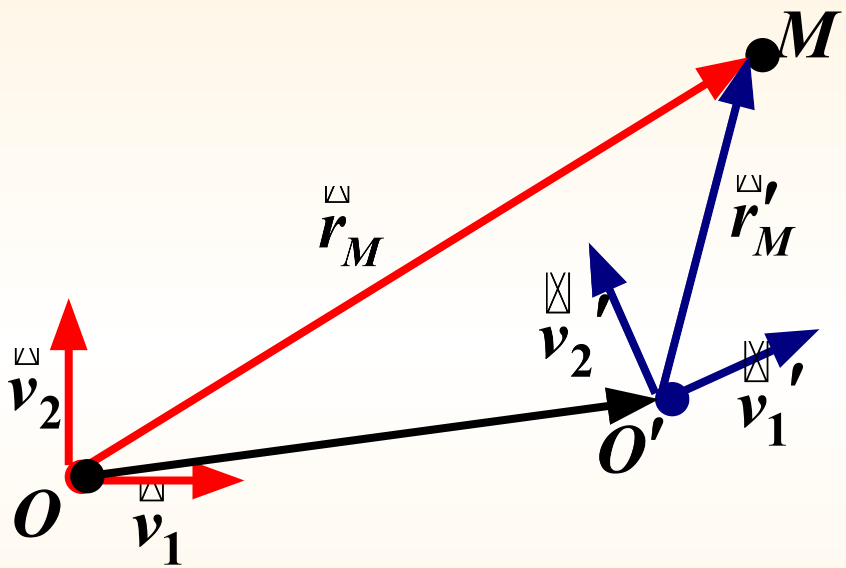


ДПСК в Ω^3



§4.2. Связь между координатами точки в различных аффинных системах координат

Две аффинные системы координат



$$\vec r_M = \overrightarrow{OM} = x\vec v_1 + y\vec v_2$$

$$\vec r'_M = \overrightarrow{O'M} = x'\vec v_1' + y'\vec v_2'$$

$$\begin{cases} \vec{v}_1{}' = t_{11}\vec{v}_1 + t_{12}\vec{v}_2, \\ \vec{v}_2{}' = t_{21}\vec{v}_1 + t_{22}\vec{v}_2, \\ \overrightarrow{OO'} = p\vec{v}_1 + q\vec{v}_2. \end{cases}$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

Матрица перехода от базиса $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ к базису $\{\vec{v}_1{}', \vec{v}_2{}'\}$

$$\vec{r}_M = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2$$

$$\vec{r}_M = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}\,'_M =$$

$$= p\vec{v}_1 + q\vec{v}_2 + x'\left(t_{11}\vec{v}_1 + t_{12}\vec{v}_2\right) + y'\left(t_{21}\vec{v}_1 + t_{22}\vec{v}_2\right)$$

$$\begin{cases} x = p + t_{11}x' + t_{21}y' \\ y = q + t_{12}x' + t_{22}y' \end{cases}$$

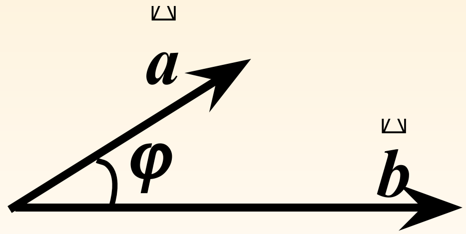
Координаты точки M в первой системе координат

Координаты точки M во второй системе координат

Свойство 1. Координаты фиксированной точки аффинного пространства в одной аффинной системе координат являются линейными функциями координат той же точки в другой аффинной системе координат.

Обратно

§4.3. Скалярное произведение геометрических векторов в ДПСК



$$(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

Свойства скалярного произведения

Свойство 1. $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a}).$

Свойство 2. $\lambda(\vec{a},\vec{b}) = (\lambda\vec{a},\vec{b}) \quad \forall\lambda\in\mathbf{R}^1.$

Свойство 3. $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c}).$

Свойство 4. $(\vec{b},\vec{b}) \geq 0; \quad (\vec{b},\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{b} = \overline{0}.$

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j})\cdot(b_1\vec{i} + b_2\vec{j}) =$$

$$a_1b_1(\vec{i},\vec{i}) + a_2b_2(\vec{j},\vec{j}) + (a_1b_2 + a_2b_1)(\vec{i},\vec{j}) = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Выражения для угла между ненулевыми векторами, длины вектора и для орта произвольного ненулевого вектора $\vec{a}$ в ДПСК:

$$\varphi = \arccos\frac{(\vec{a},\vec{b})}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\vec{a}$$

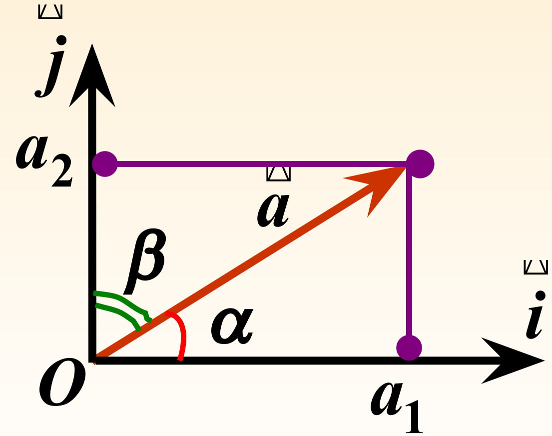
Необходимое и достаточное условие перпендикулярности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

Расстояние между точками $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$

$$\rho(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Направляющие косинусы вектора



$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{a_1}{|\vec{a}|}\vec{i} + \frac{a_2}{|\vec{a}|}\vec{j} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j}$$

Направляющие косинусы

§4.4. Скалярное произведение, норма и расстояние в n-мерном пространстве

$$a=(a_1,\dots,a_n),\ b=(b_1,\dots,b_n)\in R^n$$

$$a.b=(a,b)=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$$

Домашнее задание

- **понятие нормированного и метрического пространства.**
- неравенство Коши-Буняковского;
- аналитическое выражение для угла между векторами; длины вектора и для орта произвольного ненулевого вектора;

§4.5. Представление о векторном и смешанном произведении геометрических векторов

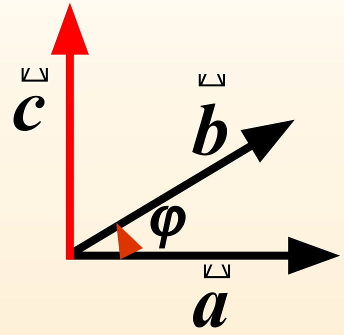
Векторное произведение (вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}:$$

- модуль вектора $\vec{c}$ равен произведению модулей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла между ними:

$$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi;$$

- вектор $\vec{c}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{b}$;
- тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ является правой:



Свойства векторного произведения

Свойство 1. $\vec{a}\times\vec{b}=\bar{0} \Leftrightarrow$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Свойство 2. $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a}).$

Свойство 3. $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b} \quad \forall\lambda\in\mathbf{R}^1.$

Свойство 4. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$

Свойство 5. $\vec{a}\times\vec{a}=\bar{0}.$

Теорема. Пусть (x_a, y_a, z_a) и (x_b, y_b, z_b) – координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно в ортонормированном базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ пространства V^3. Тогда координаты вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ в том же базисе могут быть найдены по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}\vec{k}$$

Применение операции векторного произведения векторов

- Определение множества векторов, перпендикулярных двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

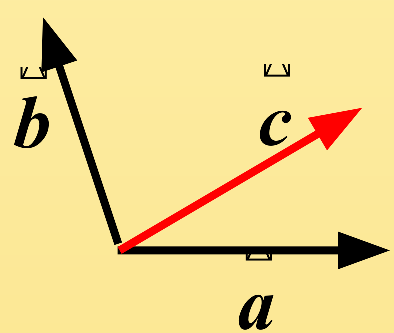
- Поиск площади треугольника и параллелограмма.

Домашнее задание

- **Свойства смешанного произведения векторов**

векторов

угол, образованный векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?



§4.6. Задание линий на плоскости с помощью уравнений

$O\vec{v}_1\vec{v}_2$ – аффинная система координат на плоскости R^2

$$M(x, y) \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_M = \overrightarrow{OM} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2$$

Определение. ***Уравнение линии*** L на плоскости R^2 ***относительно заданной аффинной системы координат***: $F(x, y) = 0,$

где F – совокупность некоторых операций над вещественными числами x и y, причем выполнены два условия:

- координаты x и y любой точки $M(x, y) \in L$ удовлет-воряют уравнению линии $F(x, y) = 0;$
- любая пара чисел x и y, удовлетворяющих уравнению линии, представляет собой координаты некоторой точки $M(x,y)$ на линии L.

Определение. ***Параметрические уравнения линии L*** на плоскости R^2 относительно заданной аффинной системы координат:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in T, \qquad (*)$$

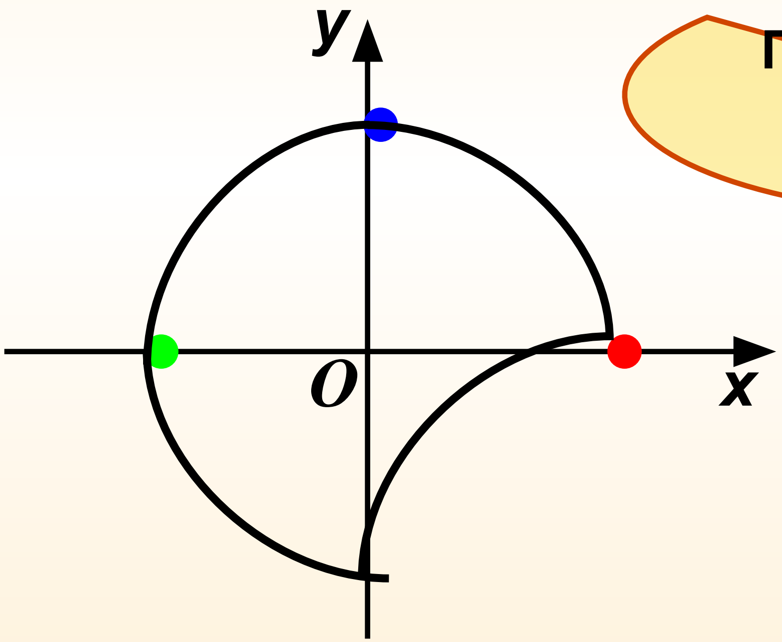
где $t \in T \subset R^2$ – вещественный параметр, причем:

- координаты x и y каждой точки $M(x, y) \in L$ получа-ются из системы $(*)$ при некотором значении пара-метра $t \in T$;
- каждое значение параметра $t \in T$ определяет по-средством $(*)$ координаты $x(t)$ и $y(t)$ некоторой точ-ки $M \in L$.

Пример.

Уравнение окружности L радиуса 2 с центром в начале ДПСК

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \quad t \in T = [0, 2\pi)$$



$t = 0$

$t = \dfrac{\pi}{2}$

$t = \pi$

Параметрически е уравнения линии

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

- Как выбрать систему координат, в которой уравнение заданной линии выглядит наиболее простым образом?

Естественная (каноническая) система координат

Пример алгебраического полинома третьего порядка относительно переменных x и y:

$$P_3(x, y) = 2x^2 y + 5xy^2 - xy + x - 1$$

Алгебраическое уравнение n-го порядка (относительно x и y)

$$F(x, y) = P_n(x, y) = 0$$

Если линия L на плоскости определяется в некоторой ДПСК алгебраическим уравнением n-го порядка, то в любой другой аффинной системе координат эта линия будет определяться алгебраическим уравнением того же порядка.

К свойству

Определение. Линия L на плоскости (или поверхность S в пространстве) называется алгебраической порядка n, если в некоторой ДПСК эта линия (поверхность) определяется алгебраическим уравнение n-го порядка.

Выводы

- Аффинная система координат на плоскости устанавливает взаимно однозначные соответствия между множеством Ω^2 всех точек плоскости, множеством V^2 их радиус-векторов и множеством R^2 наборов координат этих точек.
- Координаты фиксированной точки аффинного пространства в одной аффинной системе координат являются линейными функциями координат той же точки в другой аффинной системе координат.
- Операция скалярного произведения геометрических векторов позволяет находить угол между векторами, длину вектора, а также расстояние между точками в R^2 и R^3.

- Операция скалярного произведения естественным образом распространяется на случай пространства R^n, что позволяет определить норму и расстояние в R^n.
- Операция векторного произведения позволяет описать множество всех векторов, перпендикулярных двум заданным неколлинеарным векторам, а также находить площади треугольников и параллелограммов.
- Если линия L на плоскости определяется в некоторой ДПСК алгебраическим уравнением n-го порядка, то в любой другой аффинной системе координат эта линия будет определяться алгебраическим уравнением того же порядка.