

ПЛАН ЛЕКЦИИ

- 1. Свободные затухающие колебания.**
- 2. Вынужденные колебания. Резонанс.**

Свободные затухающие колебания.

Мы рассмотрели идеальные колебательные системы, т.е. системы, в которых первоначально запасенная энергия не переходит в другие виды энергий, например, в тепловую.

Говорят, что в системе не происходит *диссипация энергии*.

В реальных системах всегда присутствуют процессы, приводящие к *диссипации энергии*. Это могут быть, например, силы трения. Происходит изменение амплитуды или затухание колебаний.

Рассмотрим законы изменения параметров *свободных затухающих колебаний*.

Свободные затухающие колебания – это такие свободные колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается.

Закон затухания колебаний определяется свойствами колебательных систем.

Свободные затухающие колебания.

Чаще для простоты рассматривают линейные системы, т.е. такие идеализированные системы, в которых параметры, определяющие физические свойства системы, в ходе процесса не изменяются.

Пример линейной системы: пружинный маятник при малых растяжениях пружины, когда справедлив закон Гука.

Линейные системы описываются *линейными дифференциальными уравнениями*.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы задается в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$\beta = \text{const}$ - коэффициент затухания

ω_0 - собственная частота колебательной системы.

Свободные затухающие колебания.

ω_0 - циклическая частота *свободных* незатухающих колебаний той же колебательной системы в отсутствие потерь энергии (при $\beta = 0$).

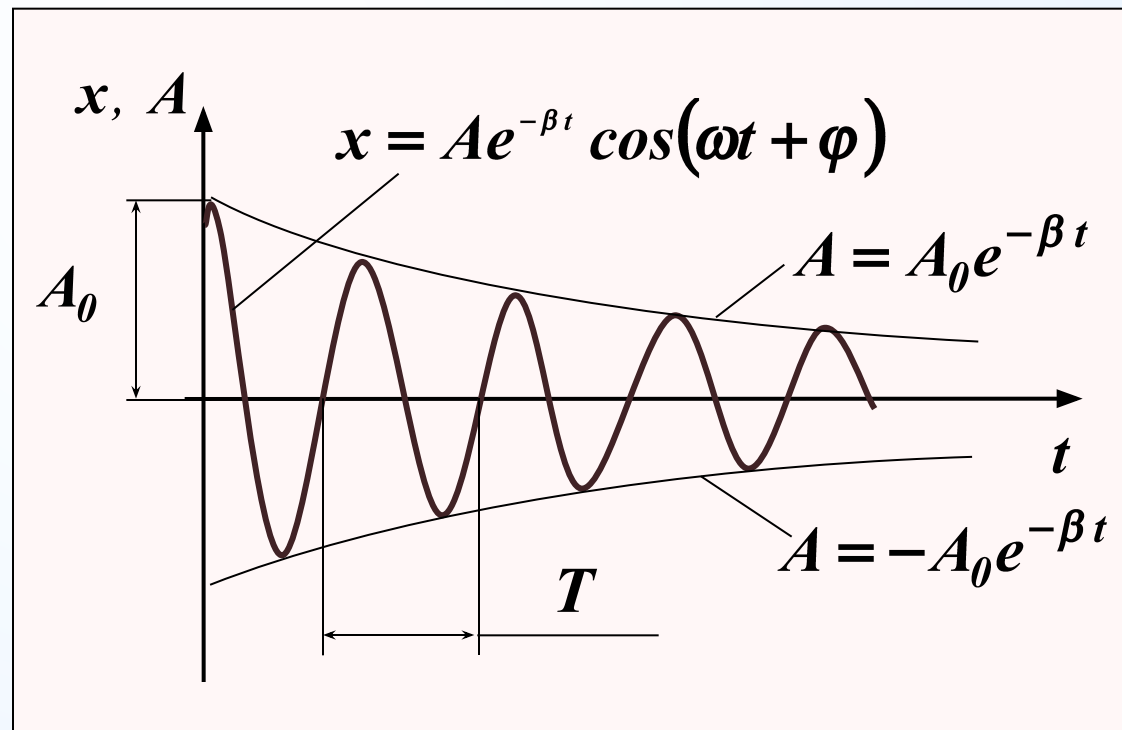
В случае малых затуханий ($\beta \ll \omega_0$) решение уравнения затухающих колебаний имеет вид

$$x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

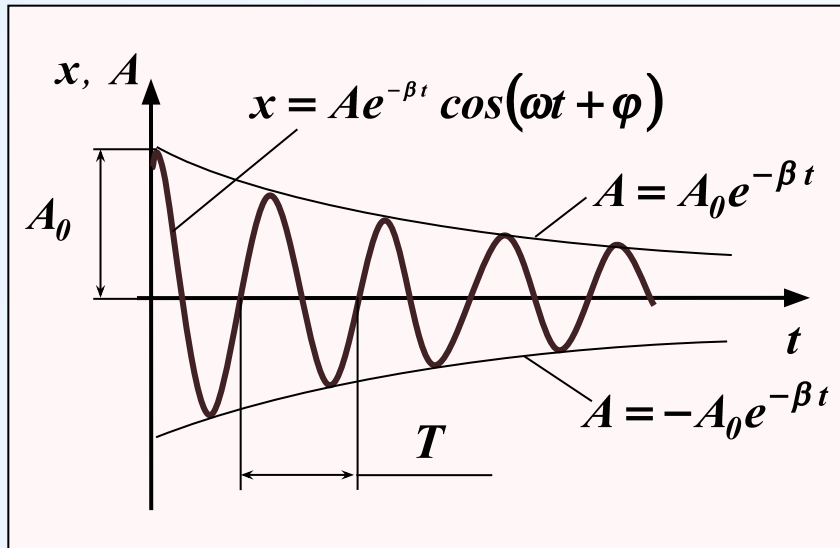
$A = A_0 e^{-\beta t}$ - амплитуда затухающих колебаний

A_0 - начальная амплитуда.

Время $\tau = 1/\beta$, за которое амплитуда колебаний уменьшится в e раз, называется временем релаксации.



Свободные затухающие колебания.



Колебание $x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$ не является периодическим и, тем более, не является гармоническим.

Периодичность такого колебания нарушается затуханием.

Следовательно, к затухающим колебаниям неприменимо понятие периода или частоты.

Но, если затухание мало, то можно условно пользоваться понятием периода как промежутка времени между двумя последующими максимумами или минимумами колеблющейся физической величины.

Тогда период затухающих колебаний равен

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Свободные затухающие колебания.

Для характеристики колебаний используют следующие параметры:

1. Логарифмический декремент затухания.

Если $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, которые соответствуют моментам времени, отличающимся на период, то отношение

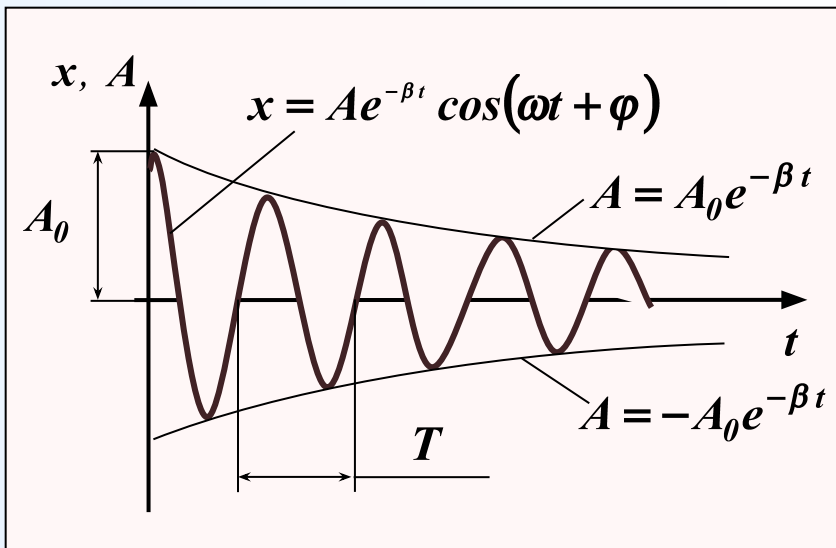
$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$$

называется *декремент затухания*.

Логарифм декремента затухания называется *логарифмическим декрементом затухания*

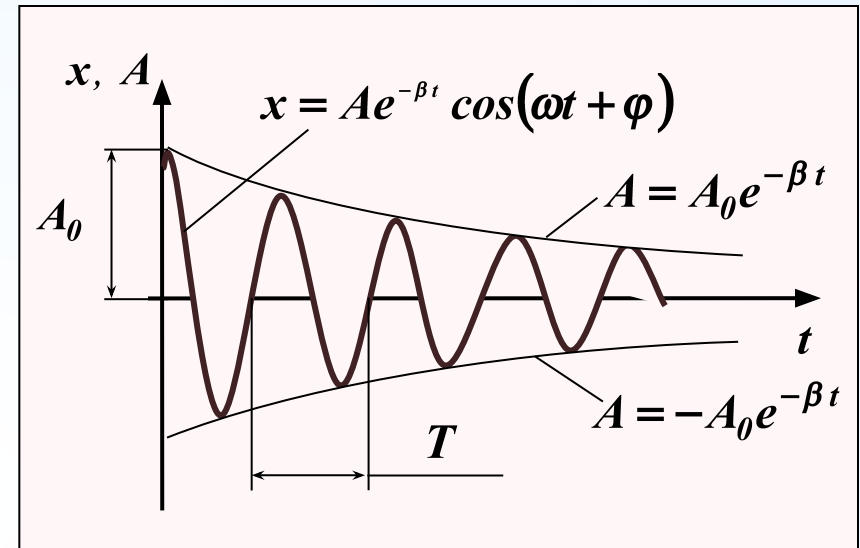
$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e},$$

N_e – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз.



Свободные затухающие колебания.

Таким образом, логарифмический декремент затухания — это величина, обратная числу колебаний, совершаемых за время, в течение которого амплитуда затухающего колебания уменьшится в e раз.



2. Добротность колебательной системы.

Для характеристики колебательной системы используется величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания.

При малых затуханиях $T \approx T_0$, следовательно, можно записать:

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

Добротность колебательной системы пропорциональна числу колебаний N_e , совершаемых за время релаксации.

Вынужденные колебания.

Интерес для техники представляет возможность поддерживать колебания незатухающими.

Для этого необходимо восполнять потери реальной колебательной системы с помощью периодически действующего фактора

Пусть таким фактором в механической колебательной системе будет действие вынуждающей силы, меняющейся по гармоническому закону:

$$F = F_0 \cos \omega t$$

где F_0 и ω соответственно амплитуда и собственная частота вынуждающей силы.

Рассмотрим пружинный маятник. Уравнение движения такого маятника получено нами в виде:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

Приблизим идеализированную колебательную систему к реальной, введя фактор диссипации энергии, например, силу трения.

Вынужденные колебания.

Сила трения пропорциональна скорости, следовательно, выражение для силы трения можно записать как

$$F_{mp} = -rv = -r \frac{dx}{dt}, \quad \text{где } r - \text{коэффициент сопротивления.}$$

Учтем наличие сил трения в законе движения маятника:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} \quad \text{Это уравнение свободных затухающих колебаний пружинного маятника.}$$

Пусть потери, возникающие в колебательной системе за счет действия сил трения, компенсируются действием вынуждающей силы F .

Тогда уравнение движение маятника можно представить в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t$$

Вынужденные колебания.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t$$

Преобразуем это выражение. Разделим обе части на m , введем обозначения:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \frac{r}{2m} = \beta \quad - \text{коэффициент затухания пружинного маятника}$$

В итоге получим:
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2\beta \frac{dx}{dt} + \frac{F_0}{m} \cos \omega t, \quad \text{или}$$

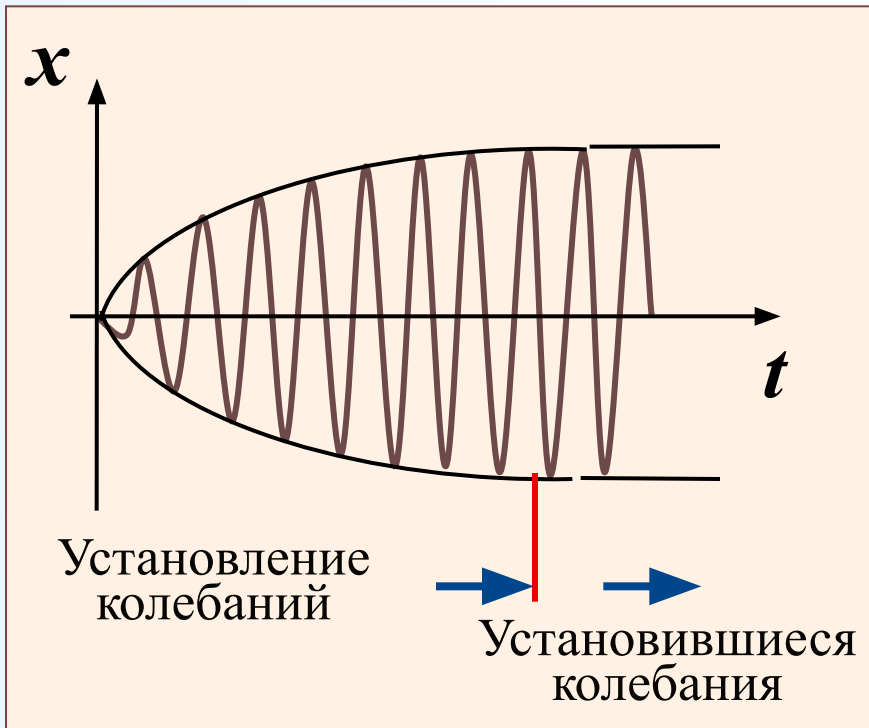
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t, \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{d^2 x}{dt^2}} + 2\beta \boxed{\frac{dx}{dt}} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение вынужденных колебаний пружинного маятника

Вынужденные колебания.

$$m\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Изобразим вынужденные колебания на графике.



Рассмотрим решение уравнения

Из математики: решение неоднородного дифференциального уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Общее решение имеет вид

$$x = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

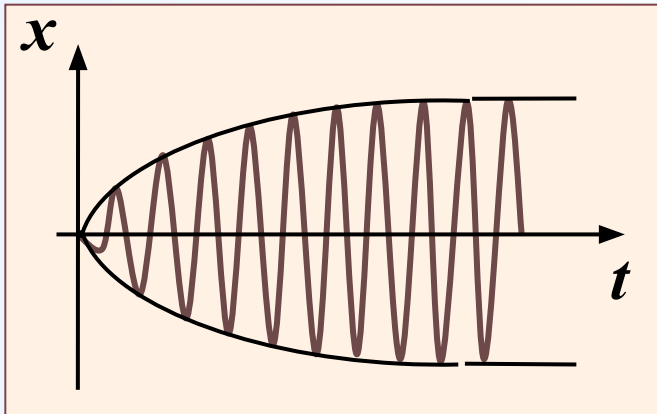
и соответствует свободным затухающим колебаниям.

Это решение играет заметную роль только в начальной стадии процесса, при установлении колебаний.

С течением времени из-за множителя $e^{-\beta t}$ роль этого слагаемого в общем решении дифференциального уравнения уменьшается.

Вынужденные колебания.

$$m\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$



По прошествии достаточно большого для установления колебаний промежутка времени общим решением можно пренебречь, сохраняя лишь частное решение неоднородного уравнения.

Частное решение, отвечающее установившимся вынужденным колебаниям маятника, имеет вид:

$$x = A \cos(\omega t - \varphi)$$

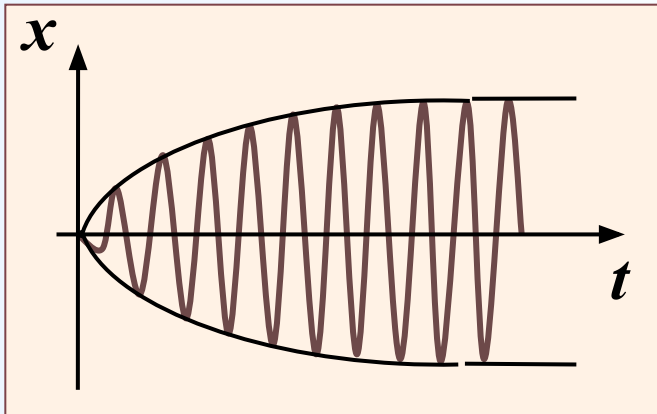
Запишем справочно выражения для амплитуды A вынужденных колебаний и величины φ , которая имеет смысл разности фаз между вынуждающей силой и вынужденными колебаниями.

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Вынужденные колебания.

$$m\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$



Таким образом, установившиеся вынужденные колебания представляют собой *гармонические колебания* с частотой, равной частоте вынуждающей силы.

Для рассматриваемой колебательной системы с заданными параметрами (ω_0 и β) амплитуда вынужденных колебаний зависит от величины и частоты вынуждающей силы.

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\varphi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания φ также зависит от частоты вынуждающей силы.

Вынужденные колебания.

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения

Колебательная система оказывается наиболее отзывчивой на действие вынуждающей силы именно на этой частоте.

Это явление называется *резонансом*, а соответствующая частота – *резонансной частотой*.

Для определения резонансной частоты нужно найти минимум выражения, стоящего в знаменателе соотношения для амплитуды вынужденных колебаний.

Если продифференцировать знаменатель $A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$ и приравнять его к нулю, получим выражение для резонансной частоты в виде:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Вынужденные колебания.

Если подставить полученную формулу в выражение для амплитуды вынужденных колебаний в установившемся состоянии, получим выражение для амплитуды при резонансе:

$$A = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Из этого выражения следует, что при отсутствии сопротивления среды ($\beta = 0$) амплитуда при резонансе обращалась бы в бесконечность.

Кроме того, при этом условии резонансная частота $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ совпадает с собственной частотой колебаний системы ω_0 .

Явление резонанса часто оказывается полезным, особенно в акустике, радиотехнике. Вместе с тем, это явление необходимо учитывать. Например, собственная частота вибраций корпуса корабля или крыльев самолета должны сильно отличаться от частоты колебаний, которые могут возбуждаться вращением гребного винта или пропеллера. В противном случае могут возникнуть опасные вибрации.