

Лекция №9

**Основы теории напряженного
состояния**

Напряженное состояние в точке

На примерах растяжения и сдвига мы имели возможность убедиться в том, что напряжения в площадке, проходящей через заданную точку напряженного тела, зависят от ее ориентации. С поворотом площадки меняются в определенной зависимости и напряжения. **Совокупность напряжений, возникающих во множестве площадок, проходящих через рассматриваемую точку, называется напряженным состоянием в точке.** Напряженное состояние поддается анализу не только в частных случаях растяжения и сдвига, но и в общем случае нагружения тела.

На этой лекции этот вопрос и будет рассмотрен. Заметим, что исследование законов изменения напряжений в точке не является чисто отвлеченным. Оно необходимо для последующего решения более сложных задач, и в первую очередь для расчетов на прочность в общих случаях нагружения.

Положим, имеется некоторое тело (не обязательно) произвольной системой сил

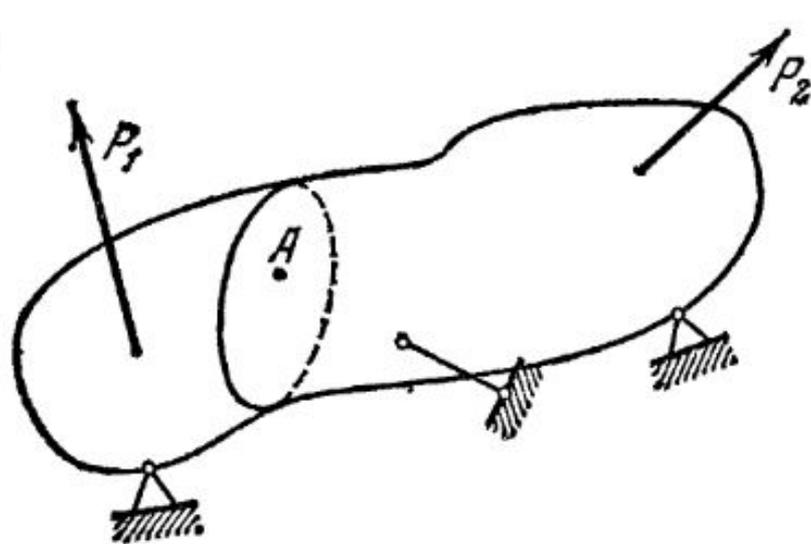


Рис.
1

При переходе от точки к точке напряженное состояние меняется достаточно медленно и всегда имеется возможность выбрать в окрестности произвольно взятой точки A (рис. 1) такую достаточно малую область, для которой напряженное состояние можно было бы рассматривать как однородное.

Чтобы охарактеризовать **напряженное состояние в точке A** , представим себе, что через нее проведены **три секущие площадки** и установлены величины возникающих в них напряжений. Затем в окрестности исследуемой точки шестью сечениями выделим элементарный объем в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 2)

Если размеры параллелепипеда уменьшать, он будет стягиваться в эту точку. В пределе все грани параллелепипеда проходят через точку A .

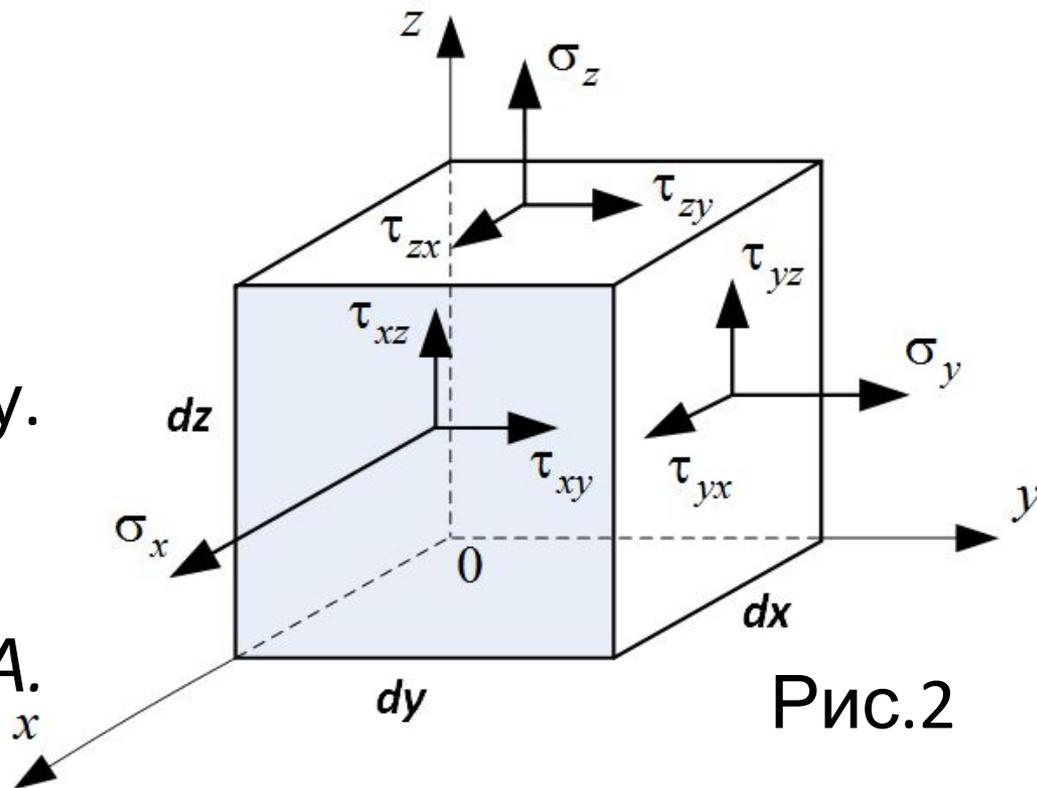


Рис.2

Напряжения в соответствующих секущих плоскостях могут рассматриваться как напряжения в исследуемой точке. Полное напряжение, возникающее на секущей площадке, может быть разложено на три составляющие: **одну по нормали к площадке и две в плоскости сечения.**

Нормальное напряжение будем обозначать буквой σ , с индексом, соответствующим осям x, y, z (рис.2). Касательное напряжение обозначим буквой τ с двумя индексами: первый соответствует оси, перпендикулярной к площадке, а второй — оси, вдоль которой направлен вектор τ . Ориентация самих осей является произвольной.

Нормальные растягивающие напряжения σ будем считать положительными, сжимающие — отрицательными. Что касается знака напряжений τ , то здесь обуславливать его не будем, поскольку в пределах рассматриваемых ниже задач знак τ роли не играет.

Напряжения, возникающие на трех гранях элемента показаны на рис. 2. На невидимых гранях элемента возникают соответственно такие же напряжения, но противоположно направленные. Система сил, приложенных к элементу, должна удовлетворять условиям равновесия. Поскольку на противоположных гранях возникают противоположные по направлению силы, то первые три условия равновесия удовлетворяются тождественно, и суммы проекций всех сил на оси x , y , z равны нулю, независимо от величины возникающих напряжений. Остается проверить, обращаются ли в нуль суммы моментов всех сил

относительно осей x, y, z :

$$\sum m_x(\mathbf{F}) = 0 \quad \sum m_y(\mathbf{F}) = 0 \quad \sum m_z(\mathbf{F}) = 0$$

При составлении уравнений равновесия легко обнаружить, что момент каждой нормальной силы уравновешивается моментом противоположной силы, расположенной на невидимой грани.

Исключение составляют касательные силы.

Например, для оси x условие равенства нулю суммы моментов соблюдается в том случае, если

момент силы $\tau_{zy} dx dy$
 равен моменту силы $\tau_{yz} dx dz dy = \tau_{zy} dx dy dz$

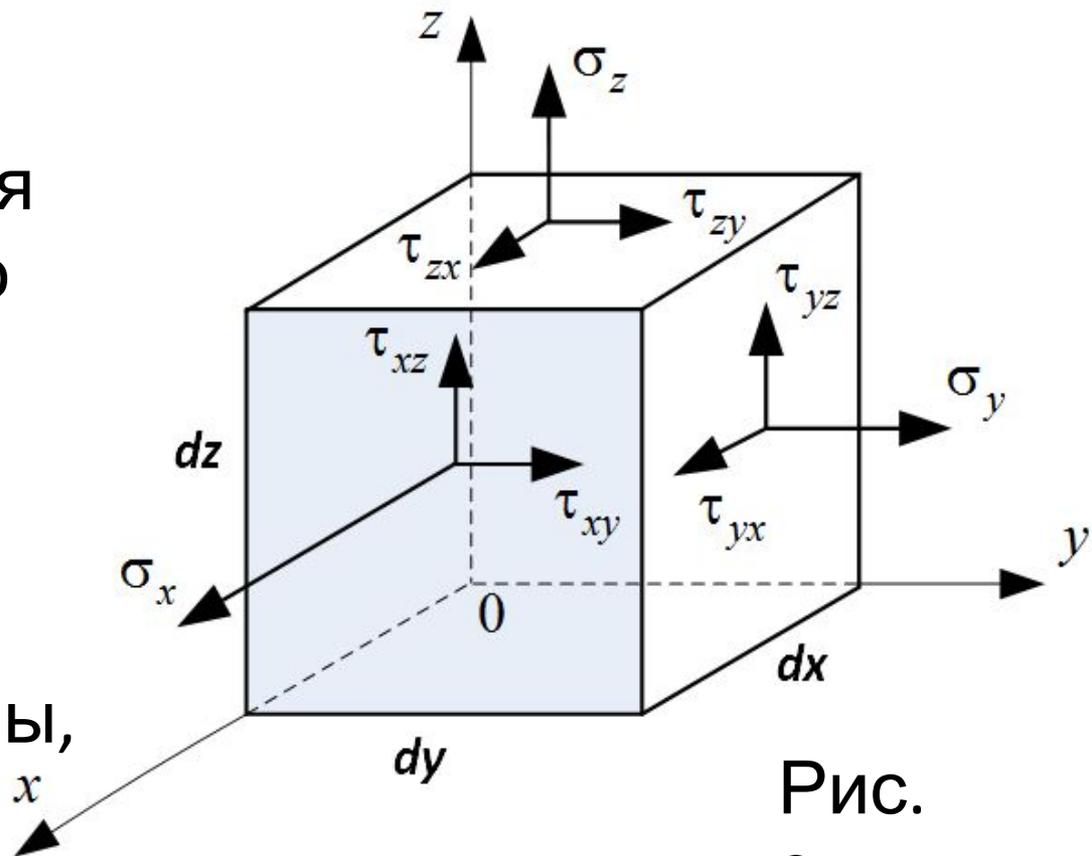


Рис.
2

Аналогично могут быть написаны еще два уравнения равновесия. Тогда получаем

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (1)$$

Таким образом, на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к общему ребру, равны и направлены обе либо к ребру, либо от ребра. Это и есть закон парности касательных напряжений, сформулированный в общем виде. Он справедлив для всех точек нагруженного тела, независимо от вида приложенных нагрузок и свойств материала.

Следствием из условия парности касательных напряжений является то, что на гранях выделенного элемента (рис. 2) имеем не девять, а **только шесть независимых компонент напряжений**, поскольку касательные напряжения попарно равны. То есть напряженное состояние в точке определяется шестью компонентами, или ***тензором напряжений***. ***Тензор напряжений*** – совокупность значений напряжений по трём взаимно перпендикулярным площадкам, проведенных в окрестности данной точки

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Анализ напряженного состояния в точке начинается всегда с определения напряжений на гранях выделенного в окрестности точки элемента. Через точку проводится три взаимно перпендикулярные плоскости, ориентация которых может быть произвольной, но выбирается так, чтобы напряжения в площадках могли бы быть определены наиболее простым путем.

Определение напряжений в произвольно ориентированной площадке

Если дано шесть компонент напряженного состояния, а именно $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ в трех взаимно перпендикулярных площадках, то можно определить напряжения в любой площадке, проходящей через данную точку.

Из напряженного тела (рис. 1) еще раз выделим в окрестности точки **A** элементарный объем, но уже не в виде параллелепипеда, как было сделано ранее, а в виде четырехгранника (рис. 3). Три грани выделенного элемента лежат в координатных плоскостях системы **Axyz**.

Четвертая грань образована произвольной секущей плоскостью. Ее ориентацию в пространстве будем определять направляющими косинусами l, m, n нормали \mathbf{v} к секущей плоскости:

$$l = \cos(\mathbf{x}, \mathbf{v}); \quad m = \cos(\mathbf{y}, \mathbf{v}); \quad n = \cos(\mathbf{z}, \mathbf{v}).$$

Напряжения на гранях элемента рассматривают как напряжения в исследуемой точке на соответствующим образом ориентированных площадках.

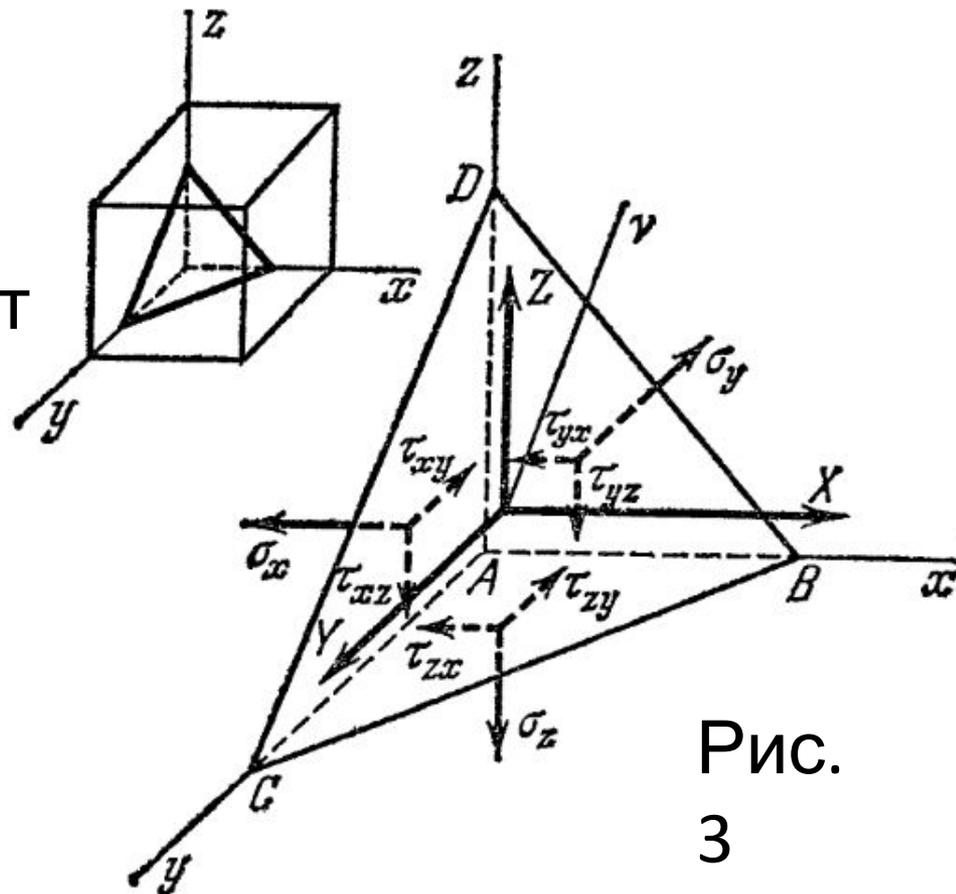


Рис.
3

На рис. 3 штрихами показаны составляющие напряжений на невидимых гранях. Вектор полного напряжения на площадке BCD спроецируем на оси x , y и z . Обозначим эти проекции через X , Y и Z соответственно. Если эти три величины найдены, то по ним, очевидно, могут быть найдены нормальная и касательные составляющие на произвольной площадке.

Площадь треугольника BCD обозначим через F , площади треугольников ACD , ABD и ABC — соответственно через F_x , F_y , F_z . Очевидно

$$F_x = Fl; \quad F_y = Fm; \quad F_z = Fn \quad (2)$$

Проецируя все силы, действующие на элемент, последовательно на оси x , y и z , получим:

$$XF = \sigma_x F_x + \tau_{yx} F_y + \tau_{zx} F_z$$

$$YF = \tau_{xy} F_x + \sigma_y F_y + \tau_{zy} F_z$$

$$ZF = \tau_{xz} F_x + \tau_{yz} F_y + \sigma_z F_z$$

ИЛИ В СООТВЕТСТВИИ С СООТНОШЕНИЯМИ (2)

$$X = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n$$

$$Y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \quad (3)$$

$$Z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n$$

Таким образом, действительно для любой площадки, определяемой направляющими косинусами l, m, n проекции X, Y и Z выражаются через шесть исходных компонент $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$. Иными словами, *напряженное состояние в точке определяется шестью компонентами.*

Запишем (3) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

При помощи формул (3) легко определяется вектор полного напряжения на любой площадке, проходящей через рассматриваемую точку (рис. 4).

4) Напряженное состояние в точке представляет собой понятие, более сложное чем те, которыми мы оперировали до сих пор. Нам известно понятие числа и понятие вектора как величины, определяемой тремя числами.

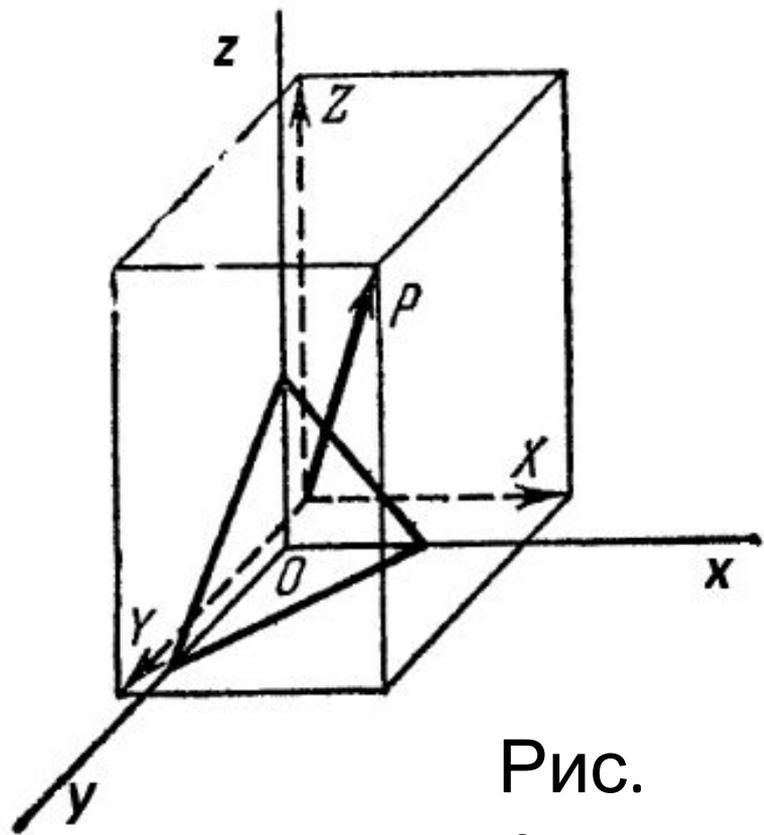


Рис.
4

Напряженное состояние определяется уже не тремя, а шестью числами и представляет собой **тензор**.

Тензору в отличие от вектора не может быть дано простое геометрическое толкование и тензор задают матрицей.

Если взамен исходной системы осей x, y, z выбрать какую-то новую систему, компоненты тензора изменятся, т. е. значения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ будут иными. Однако сам тензор напряженного состояния остается тем же.

Остановимся более подробно на некоторых свойствах напряженного состояния в связи с преобразованием системы координат.

Главные оси и главные напряжения

Выразим через X , Y и Z нормальное напряжение σ_v наклонной площадке. Очевидно

$$\sigma_v = Xl + Ym + Zn$$

или, согласно выражениям

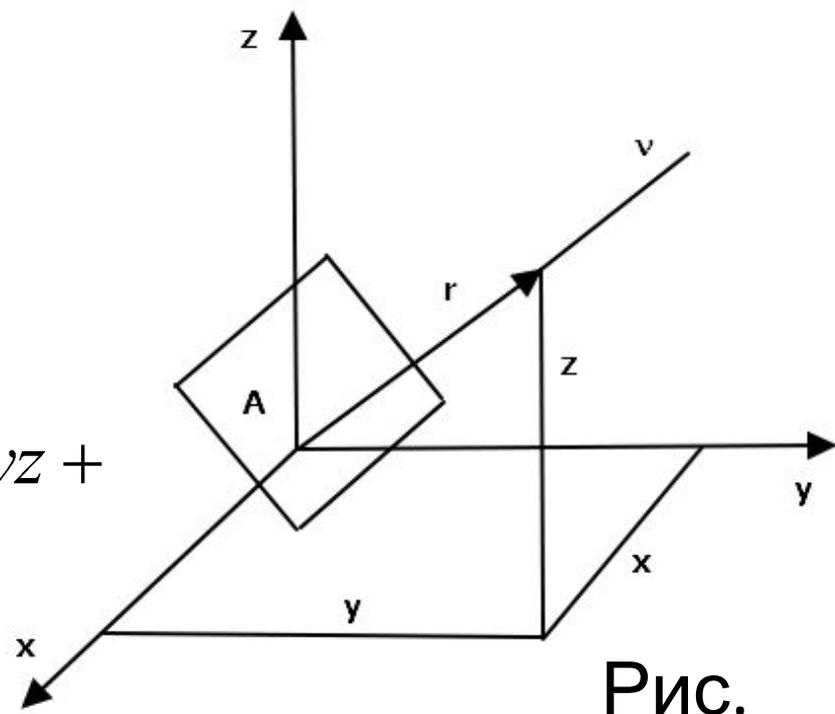
$$\sigma_v^{(3)} = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl + 2\tau_{xy} lm \quad (4)$$

Рассмотрим множество секущих площадок, проходящих через исследуемую точку. По нормали к каждой площадке отложим отрезок $f(\sigma_v)$ (рис.5).

Координаты конца этого вектора будут следующими; $y = rm$; $z = rn$.

Исключая из выражения σ_v направляющие косинусы l, m, n получим геометрическое место точек концов вектора:

$$\sigma_v r^2 = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{yz} yz + 2\tau_{zx} zx + 2\tau_{xy} xy \quad (5)$$



Теперь решим, в какой зависимости от σ_v откладывать абсолютную величину отрезка r . Обычно такой вопрос решается из условий наглядности геометрического образа. В данном же случае, не стремясь к наглядности, а исключительно в целях простоты полученного выражения примем формально, что $r^2 = \frac{k}{|\sigma_v|}$

k - произвольная постоянная, отражающая масштаб построения. Тогда

$$k = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{yz} yz + 2\tau_{zx} zx + 2\tau_{xy} xy$$

Полученное соотношение мало что говорит о законах изменения напряжений в точке, зато оно дает уравнение центральной поверхности второго порядка. А из курса аналитической геометрии известно, что путем поворота системы координат это уравнение может быть преобразовано таким образом, что в нем исчезнут попарные произведения координат, или, иначе говоря, обратятся в нуль коэффициенты при членах попарных произведений.

В данном случае это значит, что в каждой точке напряженного тела **существует такая система осей x, y, z , в которой касательные напряжения $\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ равны нулю.** Такие оси называются **главными осями.** Соответствующие им взаимно перпендикулярные площадки называются **главными площадками,** а нормальные напряжения на них — **главными напряжениями.** В порядке возрастания эти напряжения обозначаются через $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$. Если в окрестности исследуемой точки элементарный объем выделен главными площадками, то система сил, возникающих на гранях элемента, упрощается (рис. 6)

Существенно упрощаются также выражения (3). Они принимают вид

$$X = \sigma_1 l; \quad Y = \sigma_2 m; \quad Z = \sigma_3 n \quad (6)$$

$$\text{Так как } l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (7)$$

Выражая направляющие косинусы из выражения (6), подставим их в выражение (7), получим

$$\frac{X^2}{\sigma_1^2} + \frac{Y^2}{\sigma_2^2} + \frac{Z^2}{\sigma_3^2} = 1$$

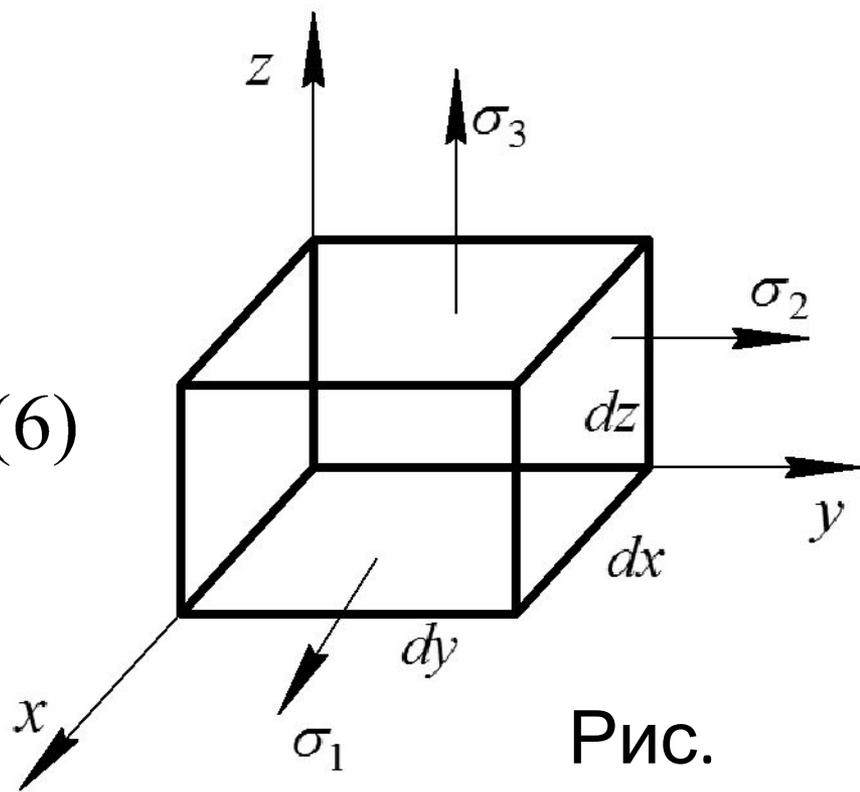


Рис.
6

Этому соотношению можно дать не только простое, но на этот раз и наглядное толкование. Величины X, Y, Z можно рассматривать как координаты конца вектора полного напряжения p , возникающего на произвольно ориентированной площадке. *Геометрическое место концов вектора полного напряжения образует эллипсоид, полуосями которого являются главные напряжения $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$ (рис.7)*

Полученный эллипсоид носит название **эллипсоида напряжений.**

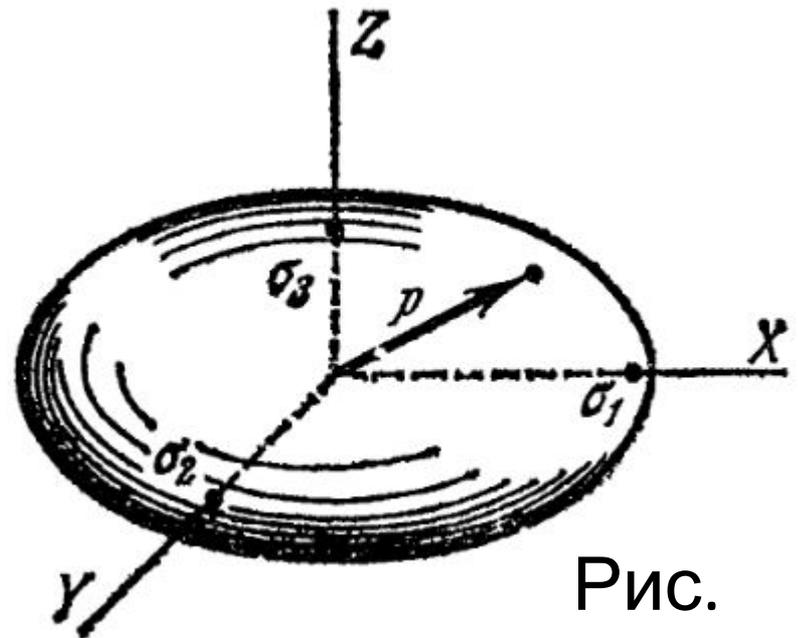


Рис.
7

Из этого геометрического образа вытекает как следствие, что наибольшее из трех главных напряжений является одновременно наибольшим из возможных значений полного напряжения на множестве площадок, проходящих через исследуемую точку. С другой стороны, наименьшее из главных напряжений будет наименьшим среди множества значений полных напряжений.

В случае равенства двух главных напряжений эллипсоид принимает форму тела вращения. Тогда каждая плоскость, проходящая через ось вращения, становится главной. В случае, когда равны не два, а все три главных напряжения, эллипсоид принимает форму сферы и в исследуемой точке все плоскости являются

Определим величины главных напряжений по заданным значениям шести компонент напряженного состояния в произвольной системе $Oxyz$. Возвращаясь к рис. 4 и соотношениям (3), положим, что наклонная площадка является главной. Тогда полное напряжение на этой площадке (оно же главное) будет направлено по нормали \mathbf{v} . Обозначим его через σ , и разложим его на три составляющих (проекции σ на оси x, y, z):

$$X = \sigma l, \quad Y = \sigma m, \quad Z = \sigma n \quad (8)$$

Подставляя (8) в (3)

получим

$$\sigma l = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n$$

$$\sigma m = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n$$

$$\sigma n = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n$$

$$\text{Или } (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0$$

$$\tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n = 0 \quad (9)$$

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0$$

Их можно рассматривать как систему уравнений относительно неизвестных l , m и n , определяющих ориентацию главной площадки в системе исходных заданных осей x , y , z . Полученная система является однородной. Вместе с тем она должна давать для l , m и n ненулевое решение, так как направляющие косинусы не могут быть все одновременно равны нулю, поскольку

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

Для того чтобы система однородных уравнений (9) имела решение, отличное от нулевого, необходимо, чтобы определитель этой системы

был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

Достигается это надлежащим выбором величины σ .

Раскрыв определитель и расположив его члены по степеням σ получим:

$$\sigma^3 - \sigma^2 I_1 + \sigma I_2 - I_3 = 0 \quad (11)$$

В уравнении

$$(11): I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Можно показать, что все три корня уравнения (11) являются вещественными. Они дают три значения главных напряжений $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$.

Корни уравнения (11), определяются характером напряженного состояния и не зависят от того, какая система осей была принята в качестве исходной. Следовательно, при повороте системы осей коэффициенты I_1 , I_2 и I_3 уравнения (11) должны оставаться неизменными. Они называются ***инвариантами напряженного состояния***. В некоторых случаях инварианты могут принимать нулевые значения.

Классификация напряженных состояний

В зависимости от числа главных напряжений отличных от нуля различают следующие классы напряженных состояний:

а) Если все три главных напряжения отличны от нуля, то напряженное состояние называется **объемным или трехосным**.

б) Когда одно из главных напряжений равно нулю, а два других главных напряжения отличны от нуля, напряженное состояние **называется плоским или двуосным**. Кубичный инвариант при этом равен нулю:
$$I_3 = 0$$

В этом случае уравнение (11) принимает вид

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma = 0$$

Откуда следует, что один из корней равен нулю. Два остальных найдутся из решения квадратного уравнения

$$\sigma^2 - I_1\sigma + I_2 = 0$$

$$\sigma' = \frac{I_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{I_1^2 - 4I_2}$$

Если напряжения действуют только лишь в одной плоскости, например, в плоскости, параллельной координатной плоскости x - y то тензор напряжений будет состоять из трех независимых компонентов (нулевых).

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ т. е. } \sigma_z = \mathbf{0}, \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mathbf{0}, \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mathbf{0}$$

Инварианты напряженного состояния будут

равны:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y \quad I_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2$$

Получаем главные

напряжения:

$$\sigma'' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

в) Когда два главных напряжения равны нулю, кубичный и квадратичный инварианты одновременно равны нулю, то уравнение (11) дает лишь один корень отличный от нуля.

$$I_1 = I_2 = 0; \sigma^2 (\sigma - I_1) = 0; \sigma = I_1$$

Напряженное состояние называется в это случае ***линейным или одноосным.***

Приведенная выше классификация не является исчерпывающей, и поэтому принято классифицировать напряженное состояние еще в зависимости от **знака главных напряжений.**

В этом случае все напряженные состояния можно разделить на три класса:

Всестороннее растяжение (трехосные растяжения). В этом случае ни одно из главных напряжений не является сжимающим.

Всестороннее сжатие (трехосные сжатия). В этом случае ни одно из главных напряжений не является растягивающим.

Смешанное напряженное состояние, когда наибольшее и наименьшее главные напряжения имеют разные знаки.

Круговая диаграмма напряженного состояния

Определение главных напряжений является необходимым **промежуточным этапом** при ведении **расчетов на прочность** в сложном напряженном состоянии. Поэтому подсчитывать величину главных напряжений приходится довольно часто.

Однако это не значит, что всегда необходимо решать кубическое уравнение (11). В большинстве встречающихся на практике случаев положение одной из главных площадок в исследуемой точке может быть указано заранее. Тогда две другие главные площадки определяются в семействе площадок, перпендикулярных первой, что значительно

Рассмотрим условия равновесия треугольной призмы, показанной на рис. 8. Эта призма образована путем сечения элементарного параллелепипеда наклонной площадкой, которая, независимо от угла наклона α остается параллельной одной из главных осей. В данном сл

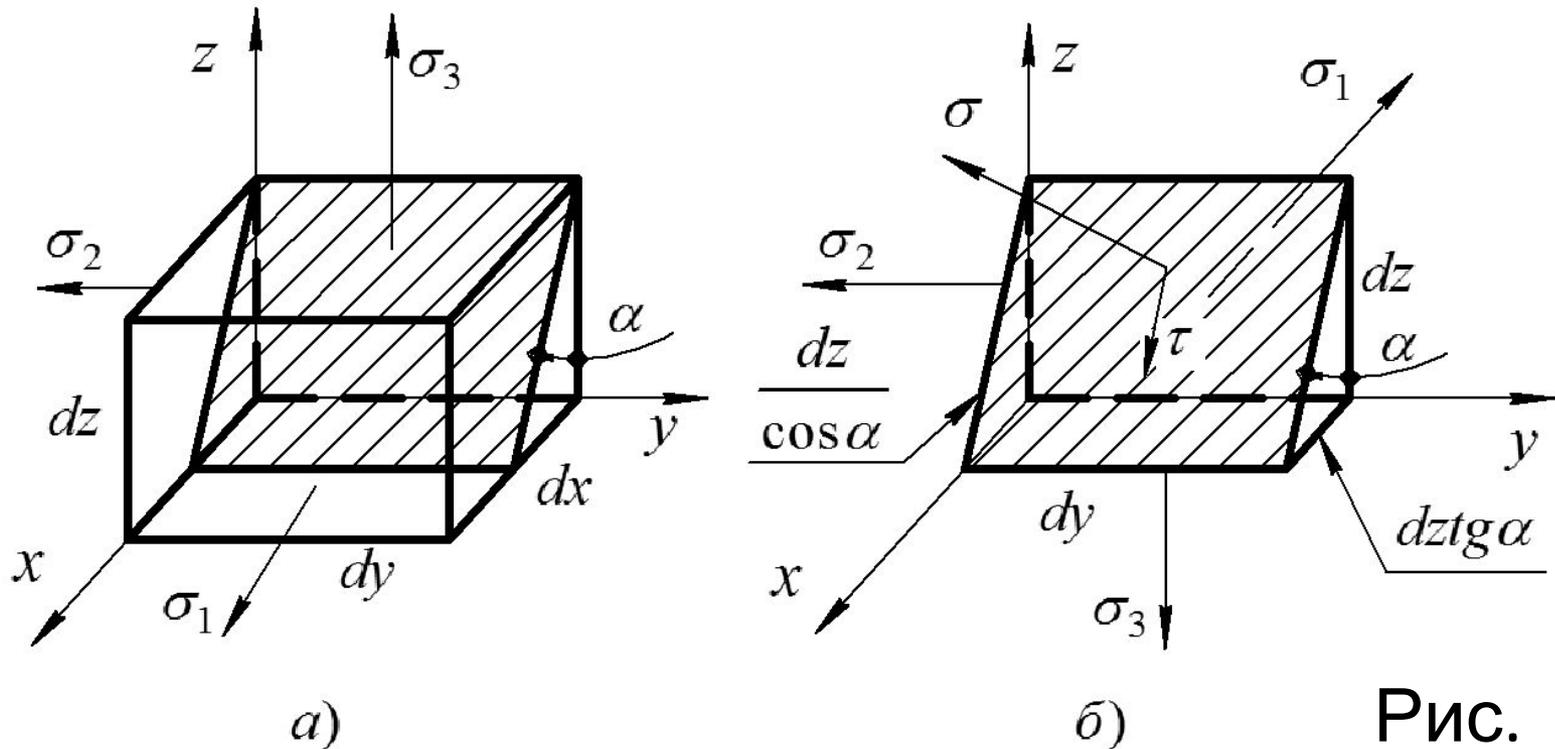


Рис.
8

Проецируя все силы, действующие на отсеченную призму, на оси, параллельные векторам σ и τ , получим

$$\sigma dy \frac{dz}{\cos \alpha} = \sigma_1 dy dz \cdot \cos \alpha + \sigma_3 dy dz \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha$$

$$\tau dy \frac{dz}{\cos \alpha} = \sigma_1 dy dz \cdot \sin \alpha - \sigma_3 dy dz \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha$$

После не сложных математических

преобразований

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha \quad \tau = (\sigma_1 - \sigma_3) \sin \alpha \cos \alpha$$

Эти выражения можно переписать в

виде

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha; \quad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha \quad (12)$$

Таким образом определяются напряжения в семействе площадок, параллельных одной из главных осей.

Выражениям (12) можно дать простое геометрическое толкование. Перенесем полусумму главных

напряжений $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ в левую часть первого уравнения (12):

$$\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha; \quad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha \quad (13)$$

Далее, возводя в квадрат левые и правые части уравнений (13), складываем их

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \cos^2 2\alpha + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \sin^2 2\alpha$$

ИЛИ

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 (\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha)$$

исключаем угол α .

Получим

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2$$

В системе координат σ и τ это есть уравнение окружности, центр которой находится на оси σ на расстоянии $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ от начала координат. Радиус окружности равен полуразности главных напряжений.

Иначе говоря, окружность построена на отрезке $\sigma_1 - \sigma_3$, как на диаметре (рис. 9)

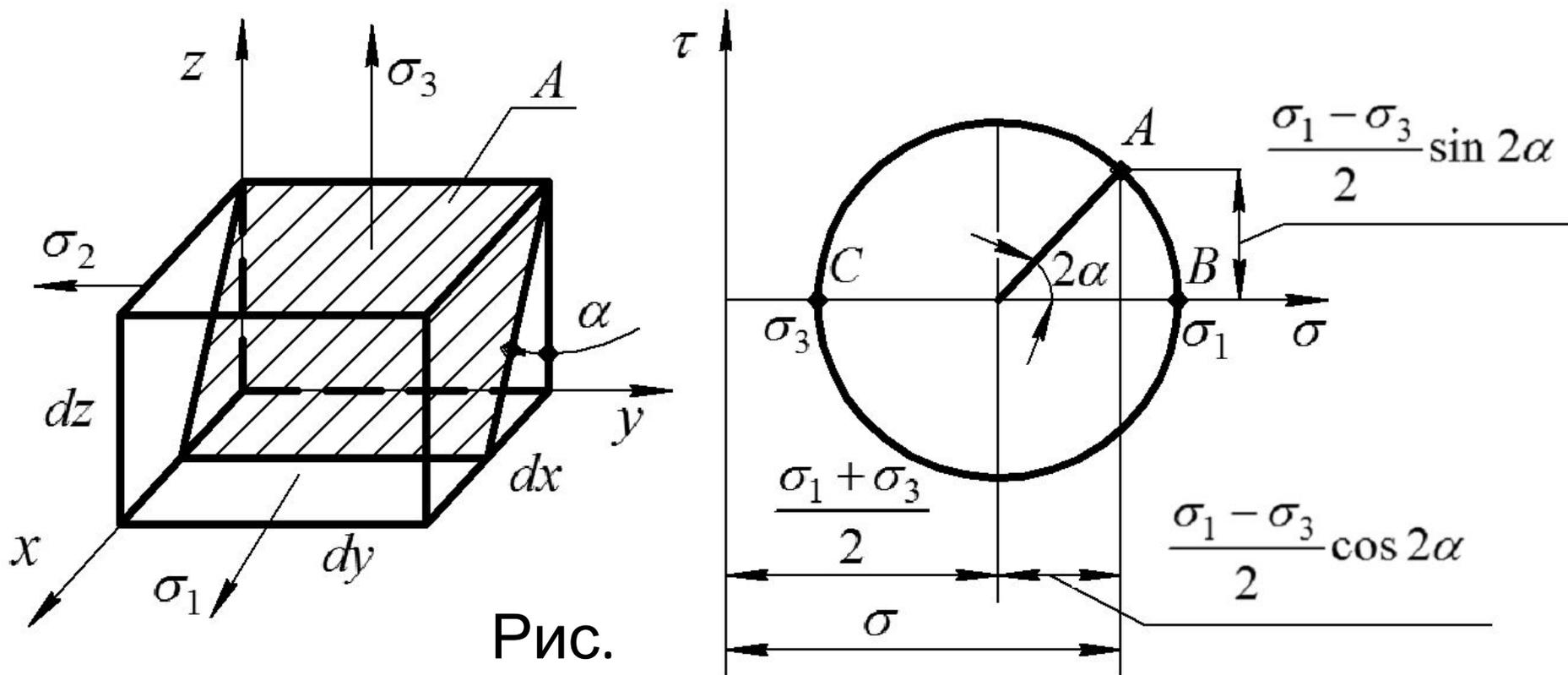
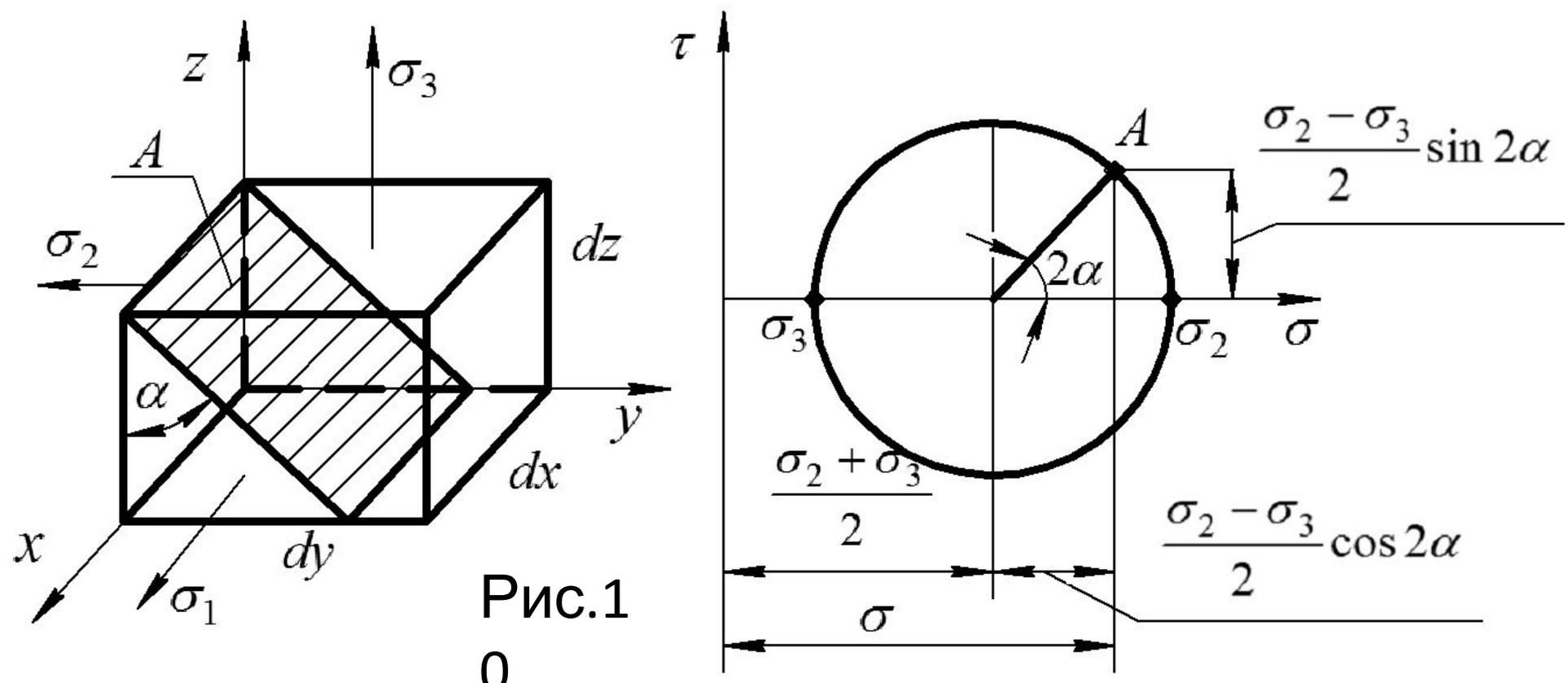


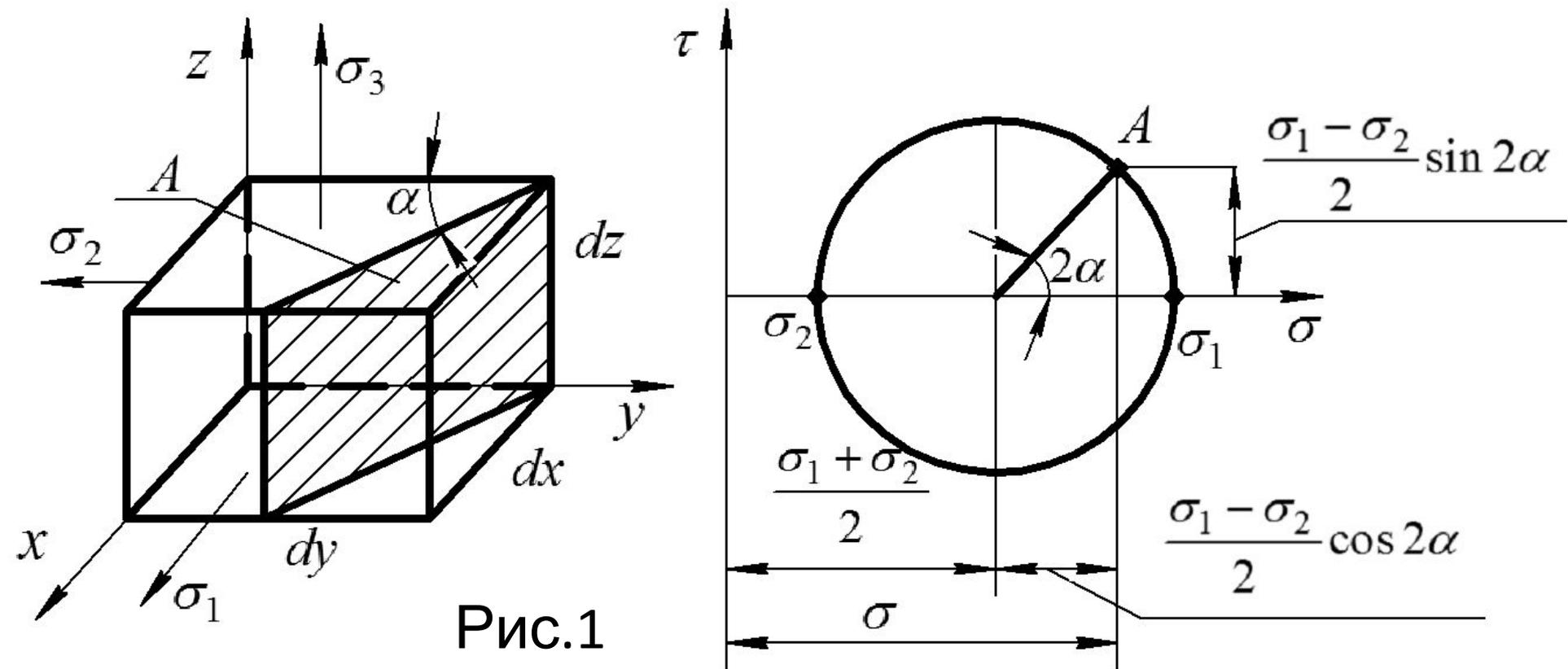
Рис.
9

Полученный круг называется **кругом Мора** или **круговой диаграммой напряженного состояния**.

Что касается уравнений (12), то их можно рассматривать как уравнение окружности, написанное в параметрическом виде. Роль параметра играет угол α , устанавливающий соответствие между точкой окружности и секущей площадкой. Каждой секущей площадке соответствует определенная точка на круге Мора. В частности, если угол $\alpha=0$, секущая площадка совпадает с главной площадкой наибольшего напряжения (точка B *рис.9*). Если $\alpha=90$, секущая площадка совпадает с другой главной площадкой из того же семейства (точка C на окружности). Показанная на рис.9 окружность построена для семейства площадок, параллельных вектору σ_2 .

Аналогичным образом можно построить круги Мора и для семейств площадок, параллельных векторам σ_1 (рис.10) и σ_3 (рис.11). В этих случаях круги строятся соответственно на отрезках $\sigma_2 - \sigma_3$ и $\sigma_1 - \sigma_2$, как на диаметрах. Таким образом, может быть построено три круга Мора.





1

Каждой точке любой окружности соответствует определенная секущая площадка в соответствующем семействе. Понятно, однако, что точки, расположенные на трех кругах, не исчерпывают всего множества секущих площадок.

Площадки, не параллельные ни одной из главных осей, не вписываются в рассматриваемую схему. Можно показать, что секущим площадкам соответствуют на плоскости σ, τ точки, лежащие внутри заштрихованного криволинейного треугольника $B C D$, образованного тремя

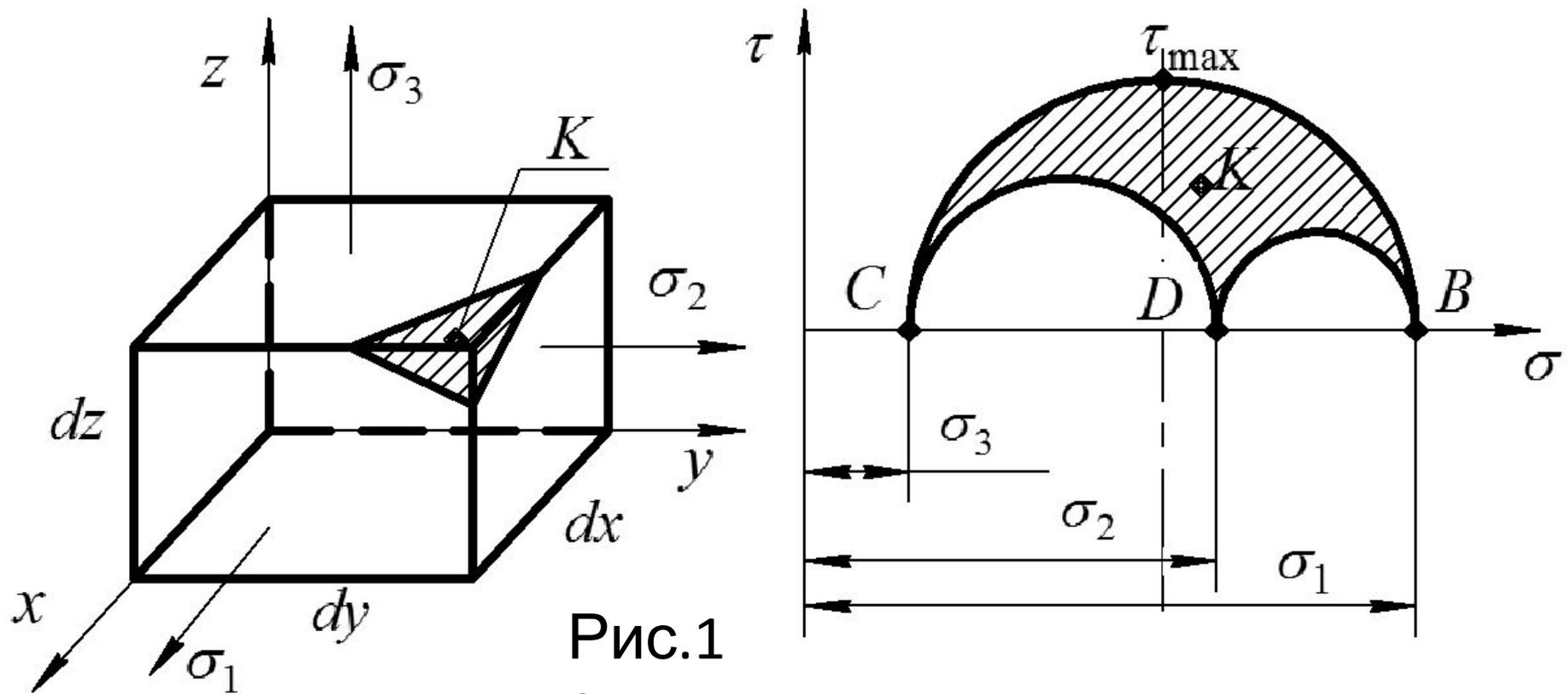


Рис.1

Поскольку знак не оговаривается, ограничиваются обычно построением только верхней половины кругов. Имеются также и методы определения напряжений в соответствующих площадках. Поскольку ни одна из точек не выходит за пределы заштрихованного криволинейного треугольника, очевидно, **наибольшее касательное напряжение равно радиусу наибольшего круга**

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (14)$$

Это напряжение возникает в площадке, равно наклонённой к главным площадкам, на которых действуют максимальное и минимальное из главных напряжений.

Определение напряжений на площадках параллельных направлению одного из главных напряжений

Круговая диаграмма может быть построена не только, когда заданы главные напряжения. Достаточно знать напряжения в двух любых площадках из рассматриваемого семейства площадок, **параллельных главной оси**. Положим, например, задано напряженное состояние, показанное на [рис. 13, а](#). Ось u является главной. Среди семейства ей параллельных площадок есть две, в которых напряжения известны. Это площадки I и II. Следовательно, на круговой диаграмме могут быть найдены две соответствующие им точки.

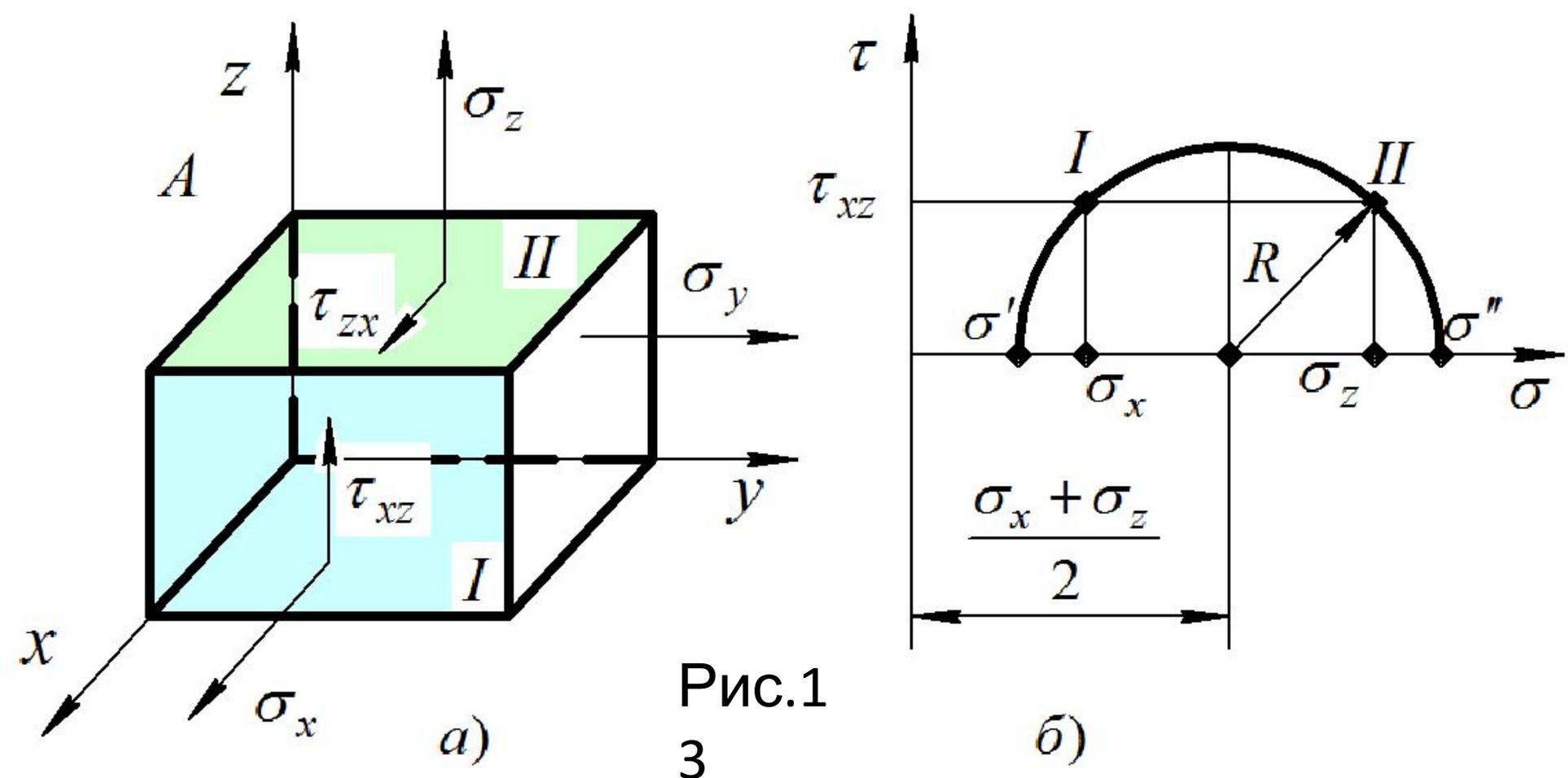


Рис.1
3

Эти точки должны располагаться на противоположных концах одного диаметра, так как угол между площадками равен 90° , а на круговой диаграмме он удваивается.

Однако, поскольку знак напряжений τ не оговаривался, ординаты обеих точек откладываем вверх. На форме круговой диаграммы это не скажется ([рис. 13, б](#)).

Из круговой диаграммы легко определяются главные напряжения: $\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - R$; $\sigma'' = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + R$

где $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$ - радиус круга.

Таким образом

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

$$\sigma'' = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \quad (15)$$

После того как напряжения σ' и σ'' найдены, они сопоставляются с величиной σ_y , и все главные напряжения переименовываются на $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в порядке убывания.

Обзор различных типов напряженных состояний

При исследовании вопросов прочности при сложном напряженном состоянии существенное значение имеет вид напряженного состояния. Большинство материалов по-разному разрушается в зависимости от того, являются ли напряжения растягивающими или сжимающими. Как показывает опыт, все материалы без исключения способны воспринимать весьма большие напряжения в условиях всестороннего сжатия, в то время как при одноосном растяжении разрушение наступает при сравнительно низких напряжениях.

Имеются напряженные состояния, при которых разрушение происходит хрупко, без образования пластических деформаций, а есть такие, при которых тот же материал способен пластически деформироваться.

В связи со сказанным очевидна необходимость более подробно остановиться на типовых признаках напряженных состояний и проследить, в каких условиях возникает то или иное состояние. На основе такого обзора в дальнейшем проще будет ориентироваться в вопросах прочности и легче дать оценку степени опасности напряженного состояния для материала.

1. *Трехосные растяжения*, т. е. такие напряженные состояния, в которых ни одно из главных напряжений не является сжимающим. Круговые диаграммы для этого класса напряженных состояний располагаются в правой части плоскости σ, τ (рис.14).

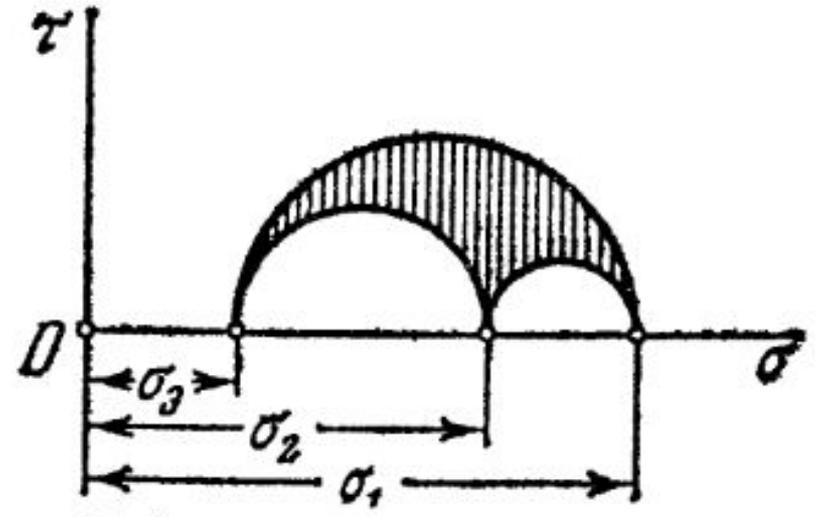
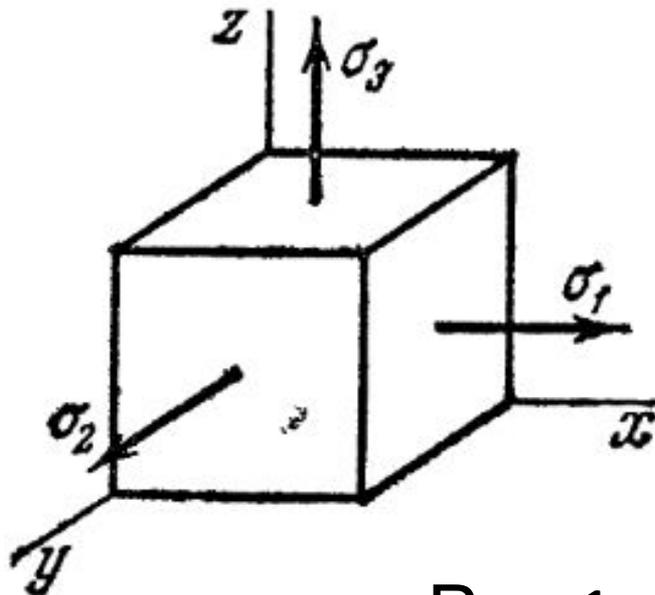


Рис.1

В частном случае все три главных растягивающих напряжения могут быть равными; такое напряженное состояние называется **чистым трехосным растяжением**. Оно возникает, например, в центральной части сплошного шара, быстро нагреваемого извне (рис.15).

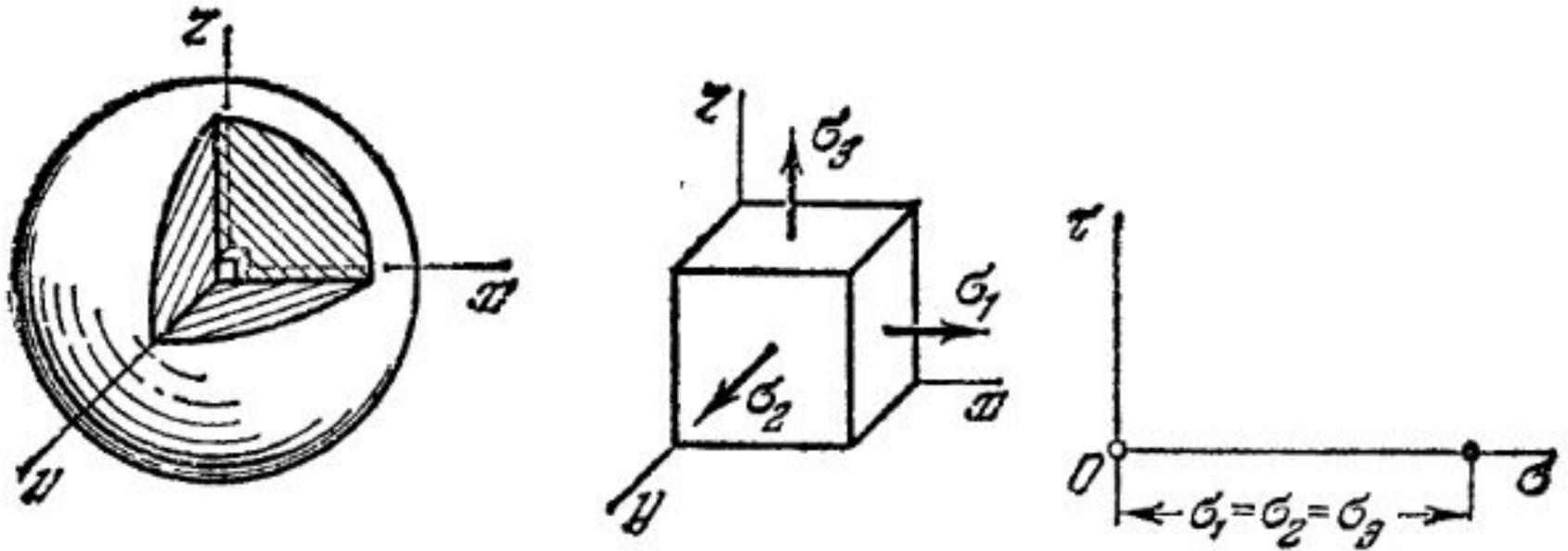


Рис.1

Расширение внешних нагретых слоев приводит к тому, что внутренняя не нагретая область шара оказывается под воздействием всестороннего растягивающего давления. Круговые диаграммы при чистом трехосном растяжении вырождаются в точку.

Трехосное растяжение, при котором **два главных напряжения равны**, но **отличны от третьего**, возникает в точках, лежащих на оси

р
в

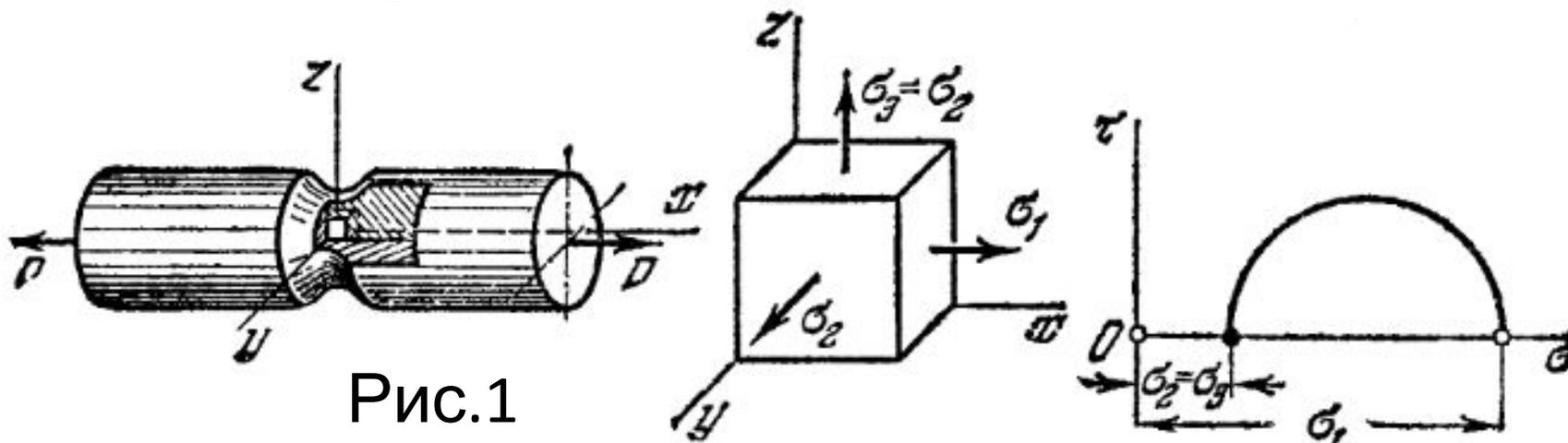


Рис.1

Весьма часто встречается напряженное состояние, в котором $\sigma_3=0$, т. е. двухосное растяжение, также относящееся к рассматриваемому классу. Двухосное растяжение, при котором $\sigma_1 \neq \sigma_2$ возникает, например, в быстровращающихся тонких дисках постоянной толщины (рис.17)

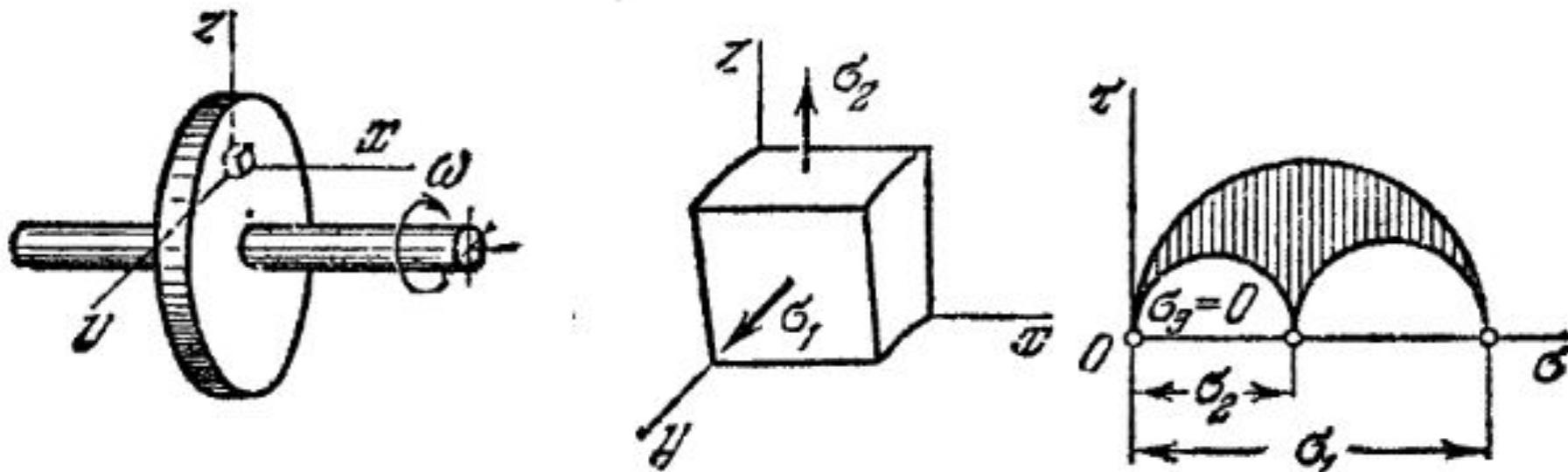


Рис.1

Равное двухосное растяжение ($\sigma_1 = \sigma_2$) возникает в точках, расположенных у внешней поверхности сферического сосуда, нагруженного внутренним давлением (рис.18)

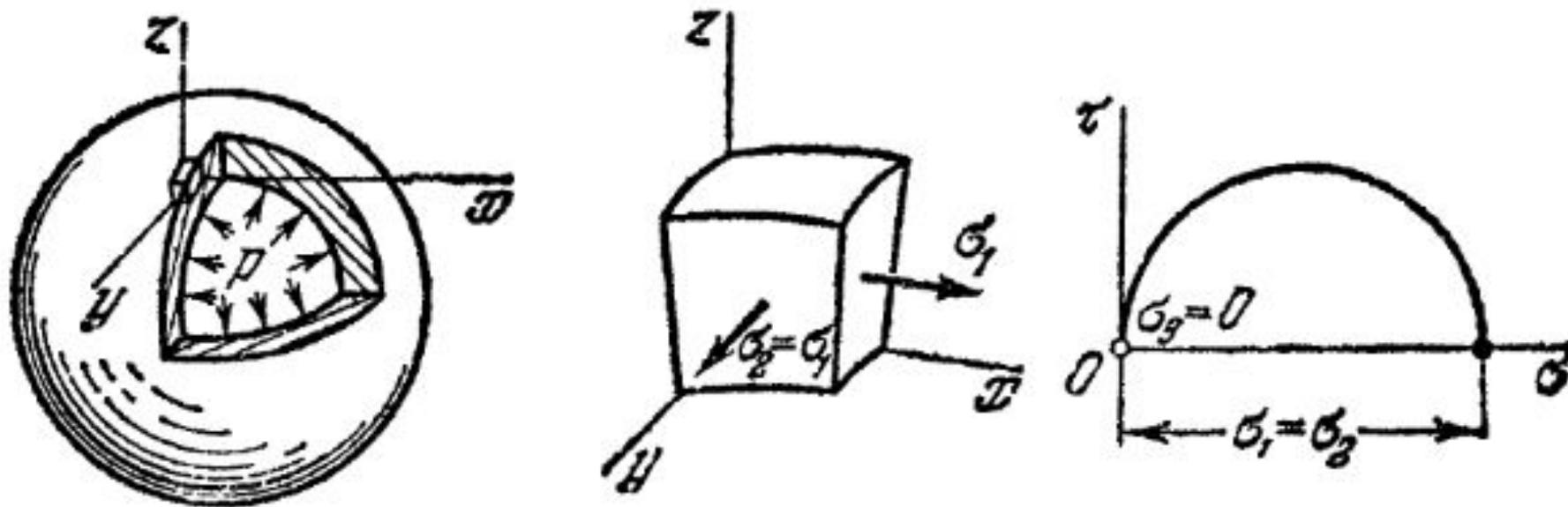


Рис.1

К рассматриваемому классу напряженных состояний относится, наконец, и простое одноосное растяжение, возникающее в однородном стержне при его растяжении или чистом изгибе (рис.19)

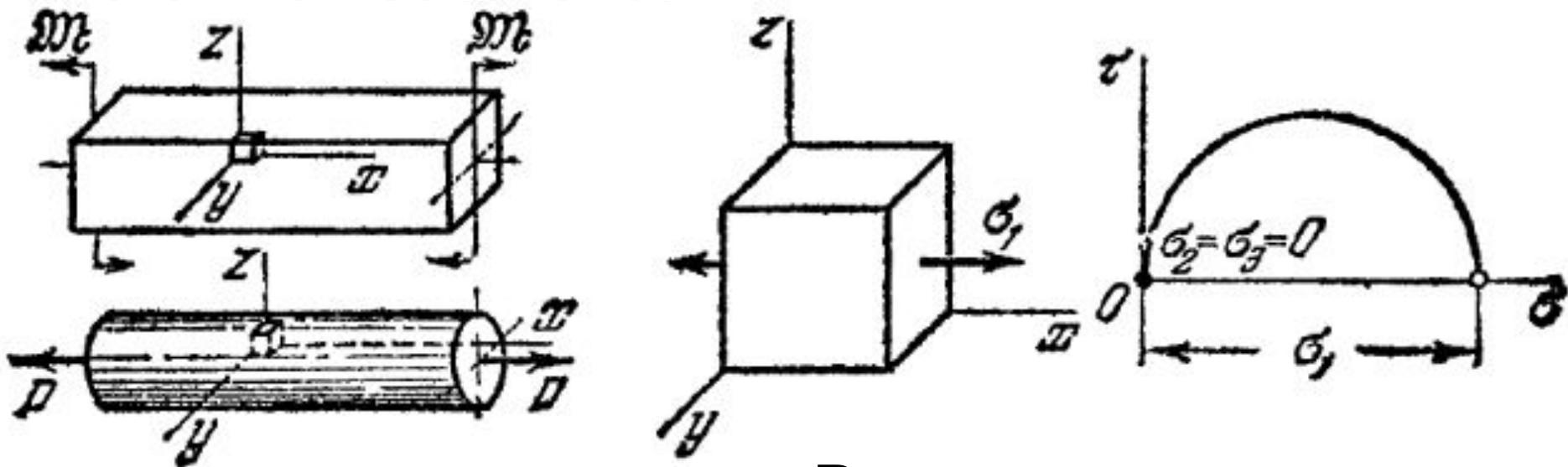


Рис.1

2. **Второй распространенный класс** составляют такие напряженные состояния, в которых ни одно из главных напряжений **не является растягивающим**. Это — так называемые **трехосные сжатия**.

Для напряженных состояний этого класса круговые диаграммы располагаются в левой части

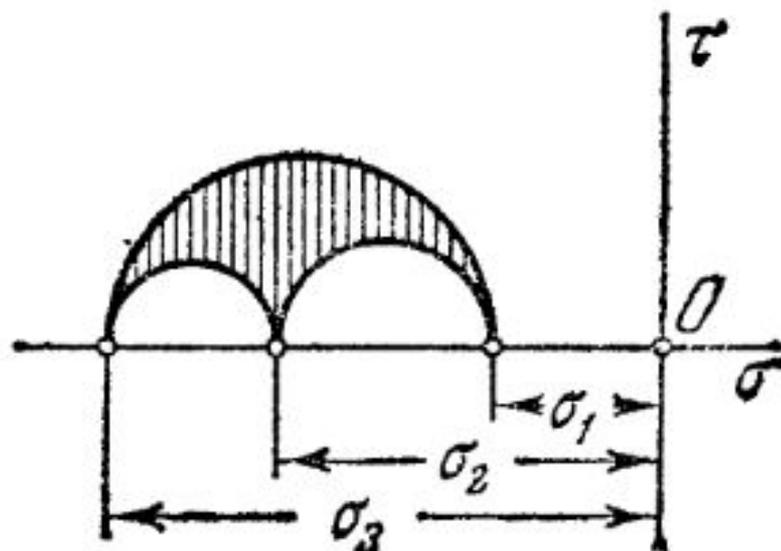
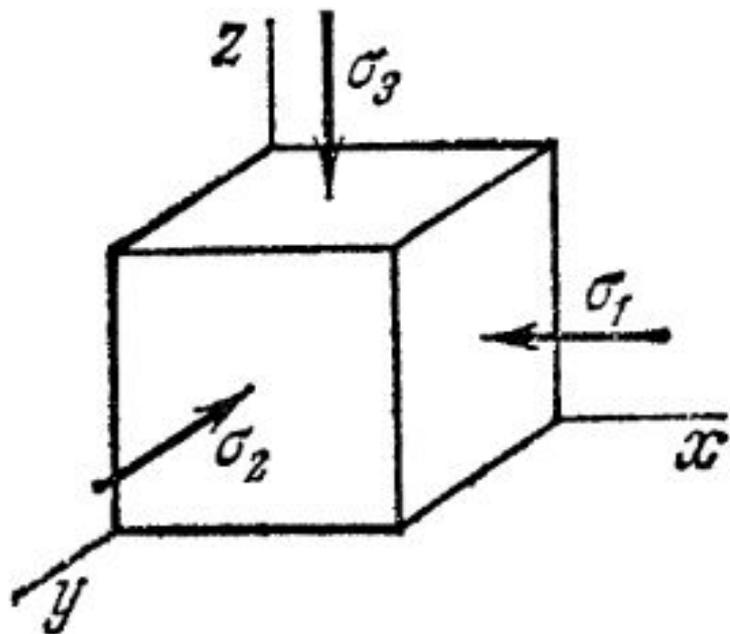


Рис.2

Чистое трехосное сжатие возникает в любом теле, независимо от его формы, при **всестороннем гидростатическом давлении** (рис.21).

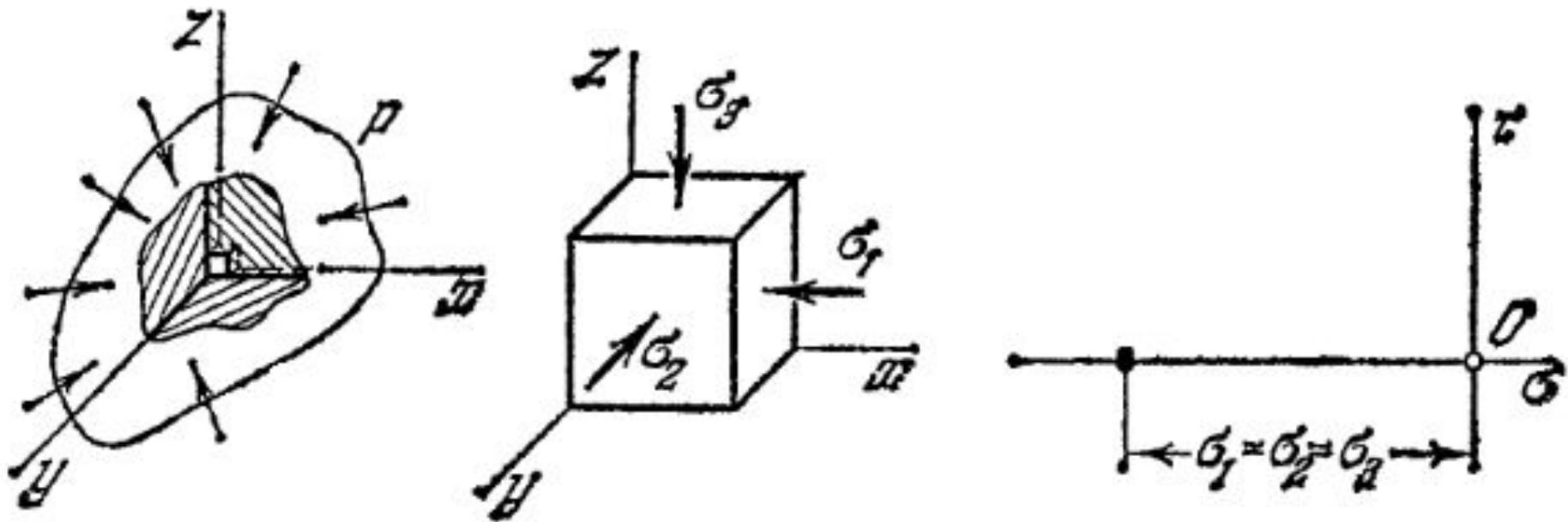


Рис.2

Неравномерное трехосное сжатие характерно для точек, расположенных в окрестности контактирующих тел, таких как, например, ролики и обоймы подшипников, втулки и валы (рис.22)

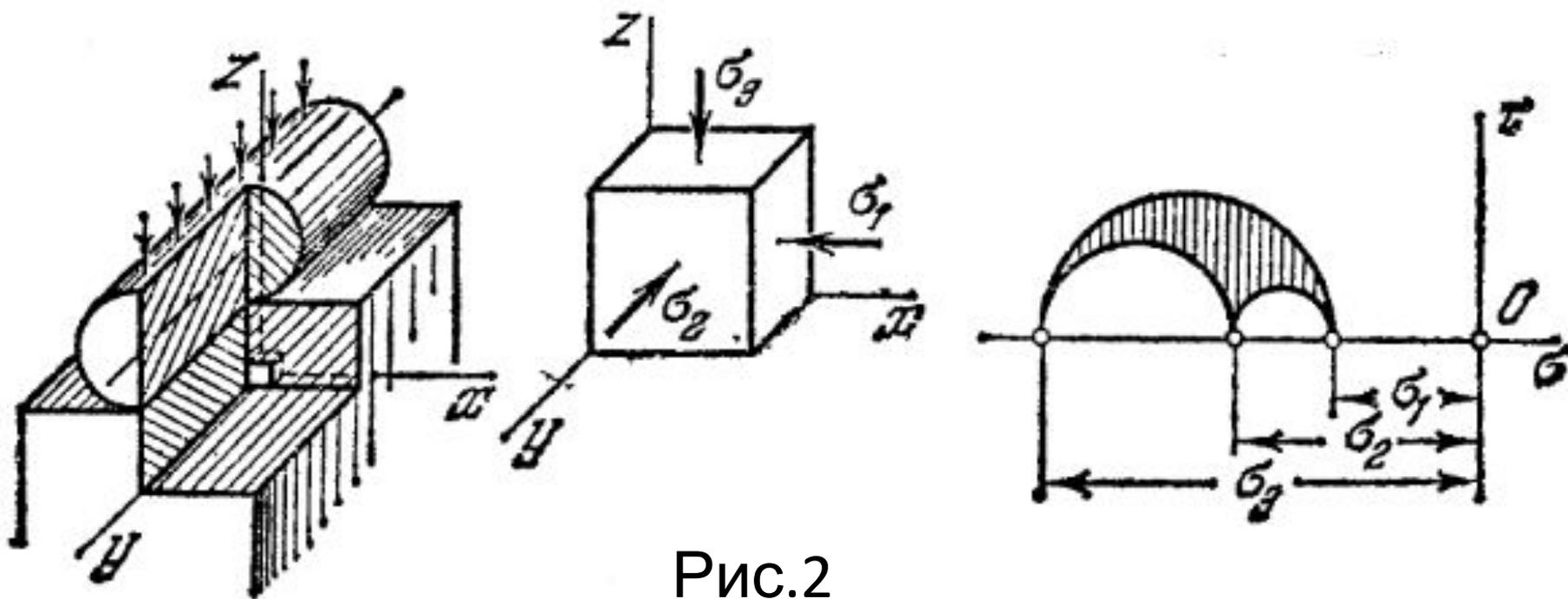


Рис.2

Пример возникновения двухосного сжатия показан на рис.23.

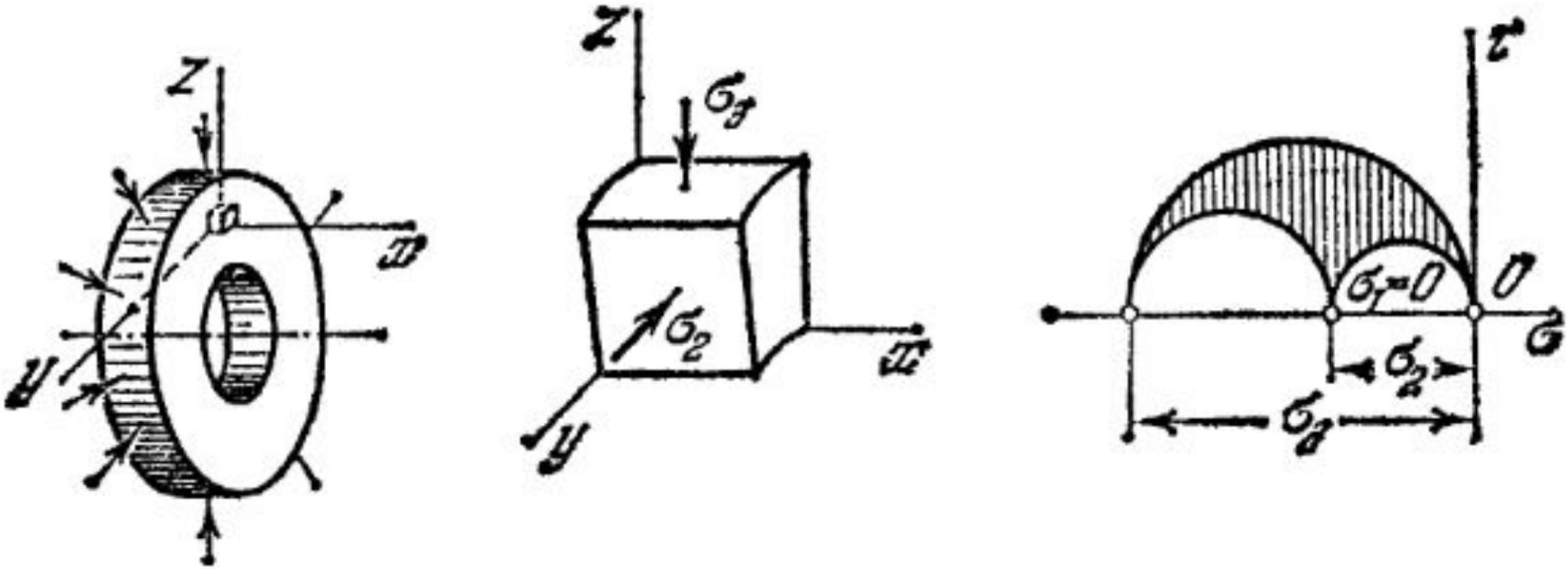


Рис.2
3

Двухосное равное сжатие ($\sigma_2 = \sigma_3$) возникает при нагружении давлением вала, имеющего свободные торцы (рис.24).

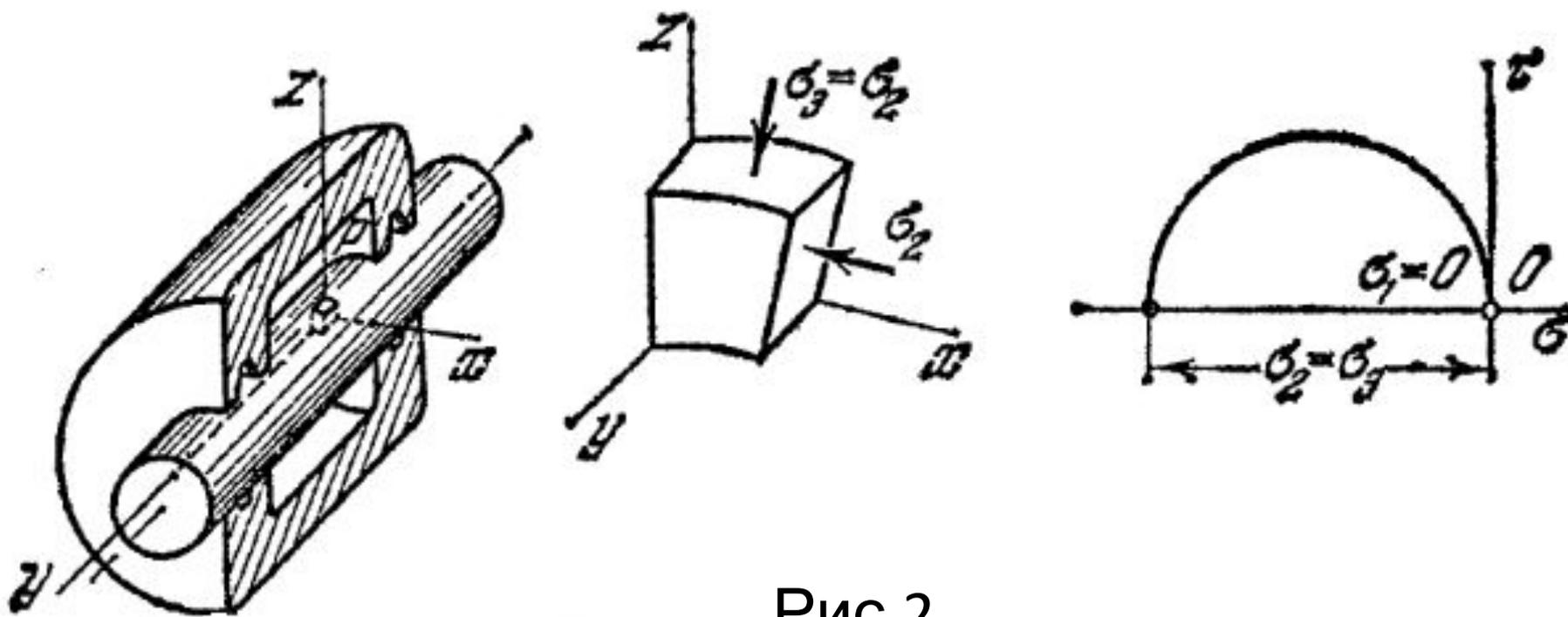


Рис.2

Одноосное сжатие также относится к рассматриваемому классу напряженных состояний и возникает, в частности, при чистом изгибе и сжатии однородного стержня (рис.25).

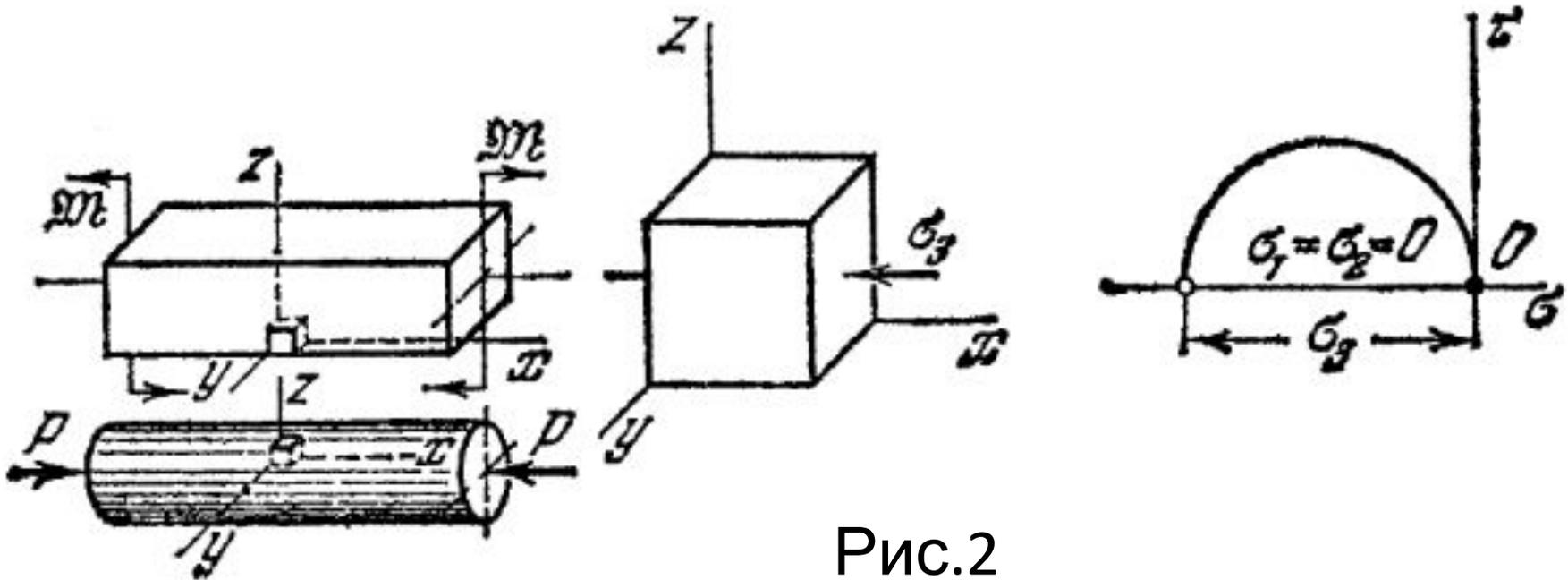


Рис.2

3. К третьему классу относятся так называемые смешанные напряженные состояния, в которых наибольшее и наименьшее из главных напряжений имеют разные знаки. Напряжение σ_2 может быть как положительным, так и отрицательным. Круговые диаграммы напряженных состояний этого класса располагаются в средней части плоскости σ, τ (рис.26)

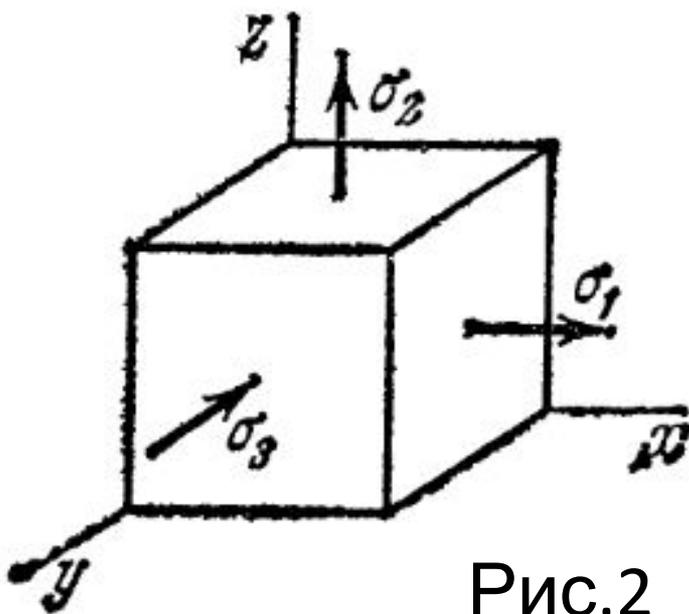
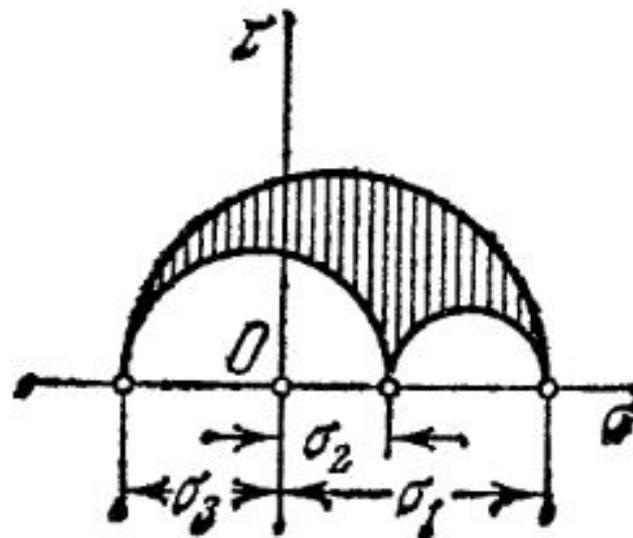


Рис.2



Смешанное трехосное напряженное состояние возникает, например, при нагружении толстостенного цилиндра внутренним давлением (рис. 27)

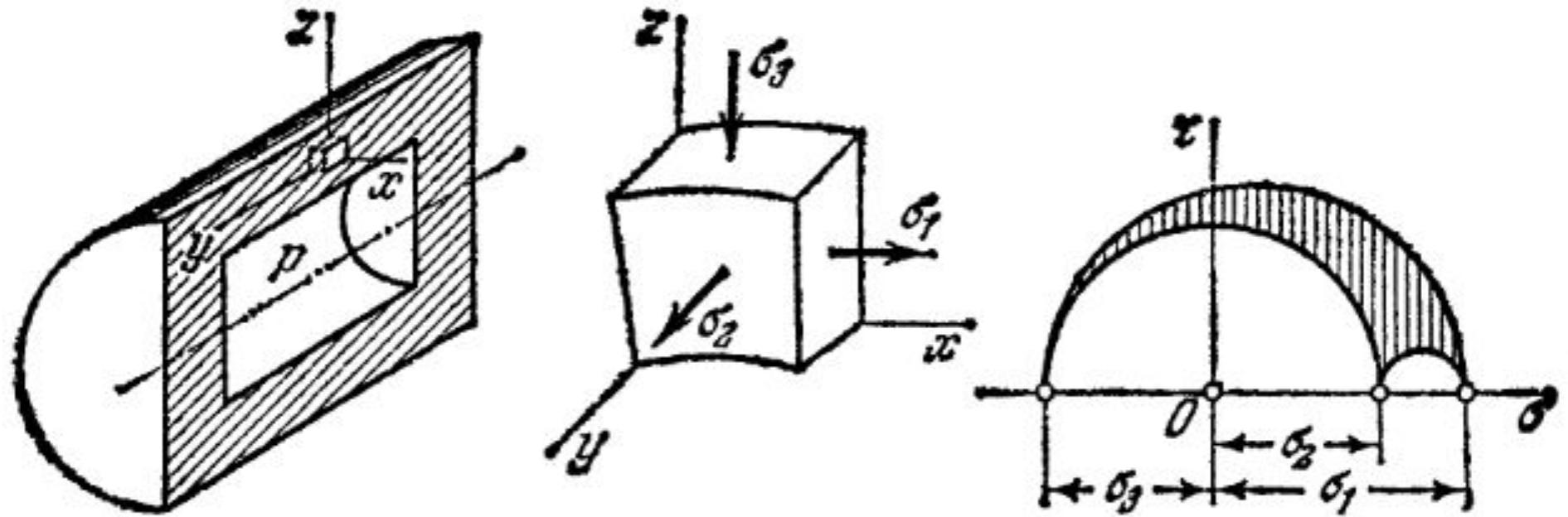


Рис.2

Для изгибаемого и одновременно закручиваемого стержня характерно возникновение двухосного смешанного напряженного состояния (рис.28)

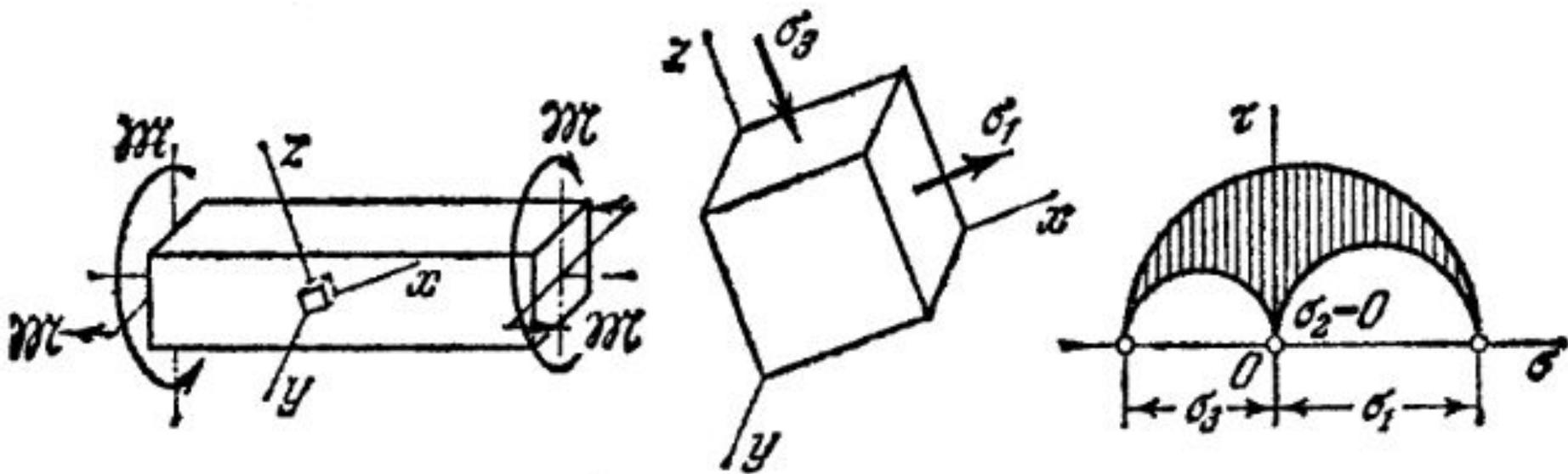


Рис.2

Чистый сдвиг также представляет собой смешанное двухосное напряженное состояние (рис.29)

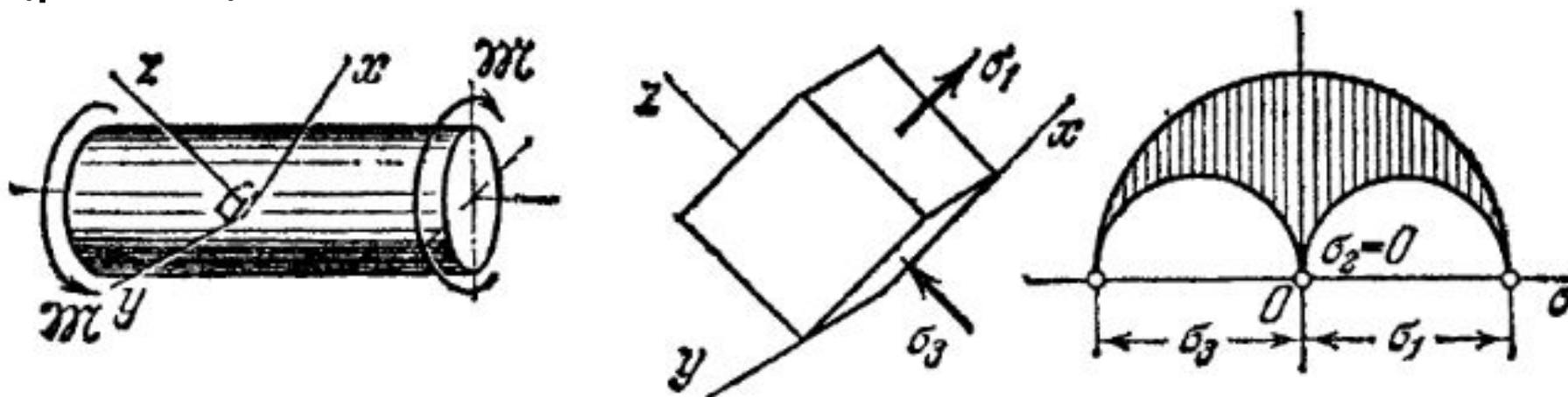


Рис.2
9