ВЛАСНІ ТА ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ

ЛЕКЦІЯ 12

ПЛАН

1. Коливання та їх типи. Гармонічні коливання.

2. Власні механічні незгасаючі коливання, їх характеристики та диференціальне рівняння.

3. Електромагнітні коливання в ідеальному коливальному контурі.

3. Власні згасаючі коливання, їх характеристики та диференціальне рівняння. Аперіодичний процес. Критичний опір.

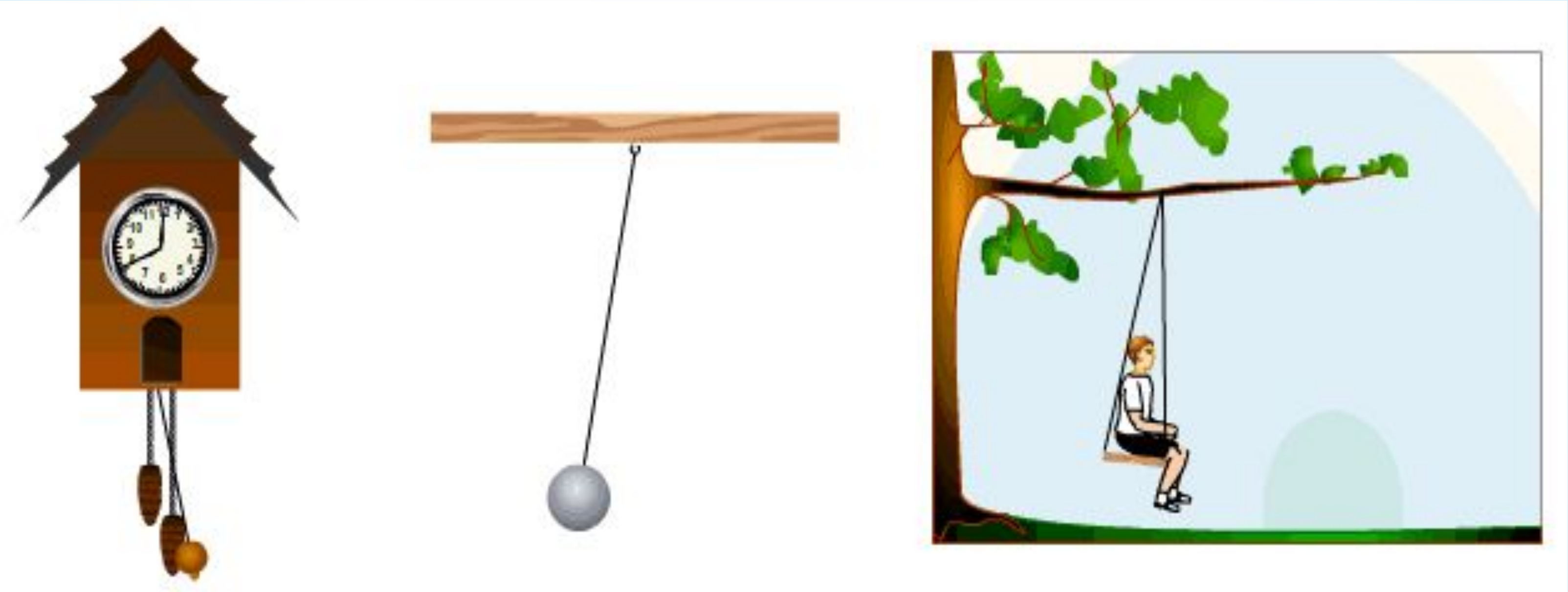
На самостійне опрацювання:

1. Математичний, пружинний та фізичний маятники. Період та частота їх коливань.

2. Енергія електромагнітних коливань та її перетворення під час коливального процесу.

3. Добротність реальних коливальних систем.

Коливання



Коливальний процес широко поширений у природі та техніці. Наприклад, коливання маятника годинника, змінний струм та ін.

Фізична природа коливань може бути різною, тому розрізняють *механічні*, *електричні*, *електромагнітні коливання*.

Проте різні за природою коливальні процеси описуються однаковими характеристиками та рівняннями.

Тому раціональним є використання

єдиного підходу

до вивчення коливань різної фізичної природи.

Коливання та їх типи

Коливання – це рухи або процеси, які характеризуються певною повторюваністю в часі.

Вільні коливання (власні коливання) – це коливання, що здійснюються за рахунок власної енергії при наступній відсутності зовнішніх впливів на коливальну систему, тобто систему, яка здійснює коливання.

Вимушені коливання – це коливання, що відбуваються за рахунок енергії, що надається коливальній системі зовнішніми силами.

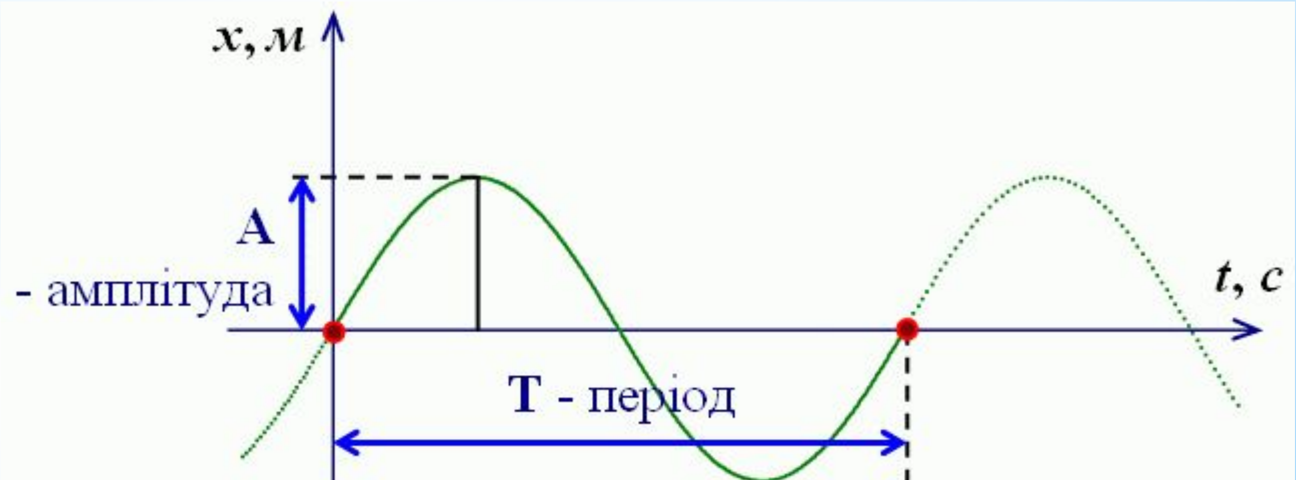
Гармонічні коливання

* ***Гармонічними називають коливання, що здійснюються за законом синусу або косинусу, тобто зміна*** величин описується рівнянням типу

$$s = A cos(\omega_0 t + \varphi)$$

або $s = A sin(\omega_0 t + \varphi)$

де A – ***амплітуда коливань***; $(\omega_0 t + \varphi)$ – ***фаза коливань*** ; φ – ***початкова фаза*** (в момент $t = 0$). Фаза коливань визначає миттєве значення величини.



$$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$
$$s = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Характеристики гармонічних коливань

* ***Період гармонічного коливання*** – це проміжок часу *T*, протягом якого фаза коливань отримує приріст 2π , тобто

$$\omega_0(t + T) + \varphi = \omega_0 t + \varphi + 2\pi$$
$$\omega_0 T + \omega_0 t + \varphi = \omega_0 t + \varphi + 2\pi$$
$$\omega_0 T = 2\pi \;\; /: \omega_0$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Частота коливань – це число повних коливань, які здійснюються за одиницю часу

$$\nu = \frac{1}{T}$$

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}}$$

Характеристики гармонічних коливань

* Підставимо у формулу частоти вираз для періоду коливань у вигляді $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Отримаємо:

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{\omega_0}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega_0} = \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\nu$$

Тобто величина ω_0 визначає кількість коливань за 2π секунд, тому її називають циклічною (коловою) частотою.

Одиниці вимірювання зазначених величин:

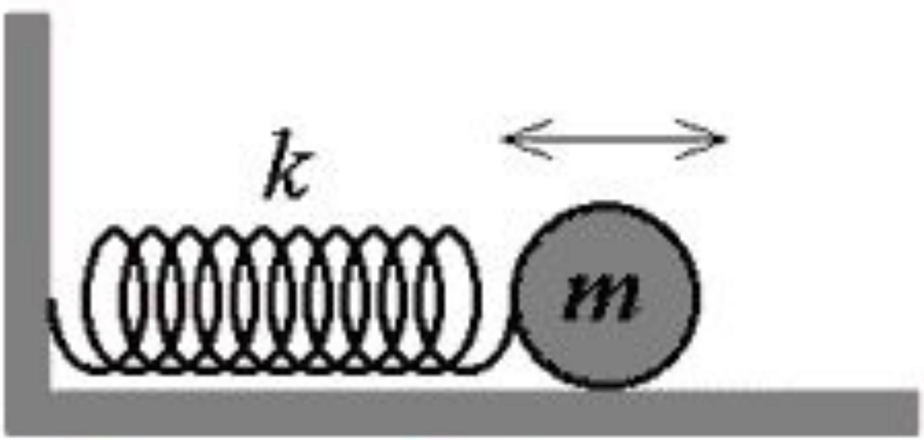
$$[\boldsymbol{T}] = \mathbf{1}\text{с}$$

$$[\boldsymbol{\nu}] = \mathbf{1}\text{Гц}$$

$$[\,\boldsymbol{\omega_0}] = \mathbf{1}\text{рад/с}$$

Власні незгасаючі механічні коливання

* Розглянемо ідеальний пружинний маятник, коливання якого відбуваються під дією сили пружності. За законом Гука $F_{пр} = -kx$, саме вона і надає системі прискорення $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, тому за II законом Ньютона:



$$-kx = ma$$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 /: m$$

Власні незгасаючі механічні коливання

* $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Позначивши $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, отримаємо диференціальне рівняння власних незгасаючих механічних коливань:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

розв'язком якого і є вираз вигляду

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x = Acos(\omega_0 t + \varphi)$$

Швидкість коливального руху

* можна визначити як першу похідну від зміщення за часом:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 sin(\omega_0 t + \varphi) =$$

$$= v_{max}\, cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$v_{max} = A\omega_0$ - амплітуда коливань швидкості

Тобто коливання швидкості та зміщення зсунуті за фазою на $\frac{\pi}{2}$

$$v = -A\omega_0 sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Прискорення коливального руху

* можна визначити як похідну від швидкості за часом

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 cos(\omega_0 t + \varphi) =$$

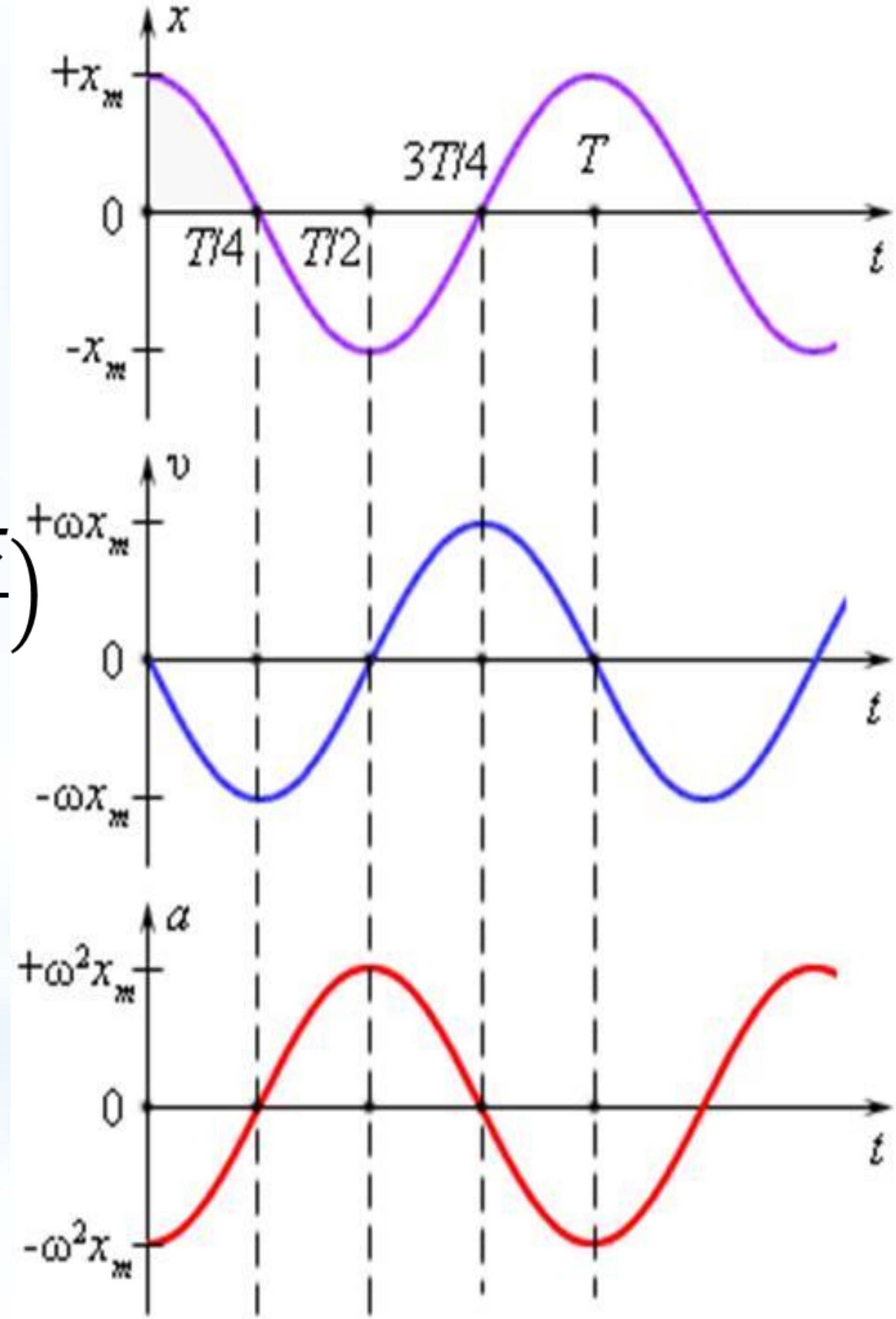
$$= a_{max} cos(\omega_0 t + \varphi + \pi);$$

$a_{max} = A\omega_0^2$ - амплітуда коливань прискорення

Тобто коливання швидкості та прискорення теж зсунуті за фазою

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$



$$v = v_{max} \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_{max} = \omega_0 x_m$$

$$a = a_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$

$$a_{max} = \omega_0^2 x_m$$

Сила і потенціальна енергія тіла, що коливається

* $$F = ma = -m\omega_0^2 x$$

Сила пропорційна зміщенню матеріальної точки і напрямлена до положення рівноваги.

Потенціальна енергія визначається інтегралом

$$E_{\Pi} = -\int_0^x F dx = \int_0^x m\omega_0^2 x dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{2} cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Енергія коливального руху

- Врахувавши, що швидкість при коливальному русі визначається виразом

$$v = -A\omega_0 sin(\omega_0 t + \varphi)$$

кінетичну енергію можна подати у вигляді

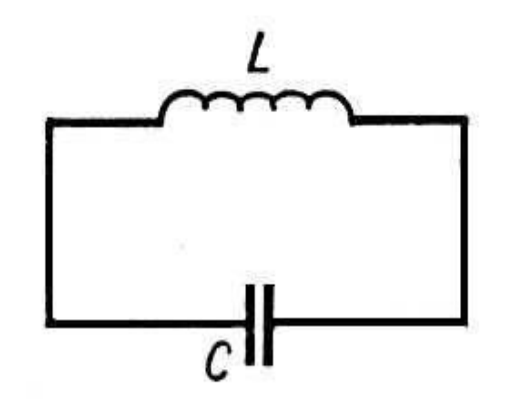
$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Тоді повна енергія коливального руху

$$E = E_п + E_k =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{2} cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{mA^2\omega_0^2}{2} sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\boxed{E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}}$$

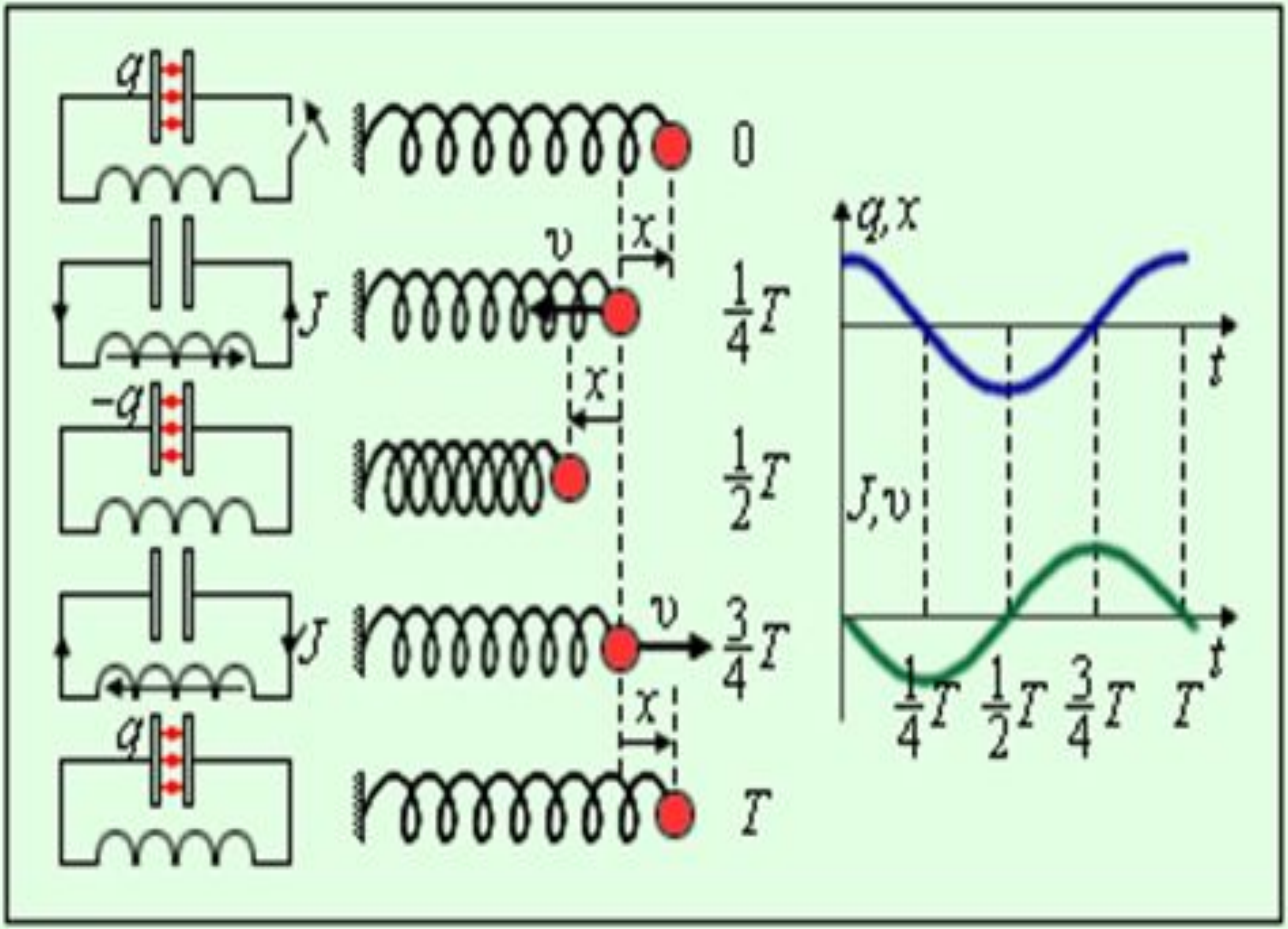


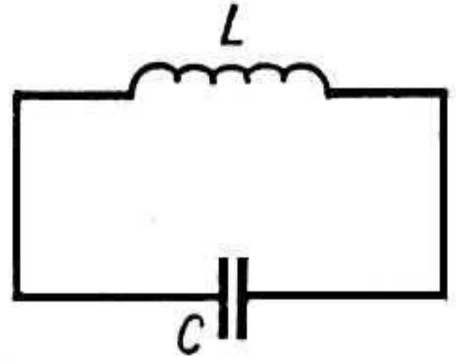
Власні незгасаючі електромагнітні коливання у коливальному контурі

* Коливальним контуром називається система, що складається з конденсатора ємністю C та котушки індуктивністю L , з'єднаних провідниками.

Контур вважається ідеальним у випадку нескінченно малого опору котушки та провідників $(R \to 0)$.

У цьому випадку будуть здійснюватися коливання заряду обкладинок q конденсатора, напруги U на ньому та сили струму i в котушці.


q
0
v
x
1/4 T
J
x
−q
1/2 T
v
3/4 T
J
x
q
T
q, x
t
J, v
t
1/4 T
1/2 T
3/4 T
T



Диференціальне рівняння власних коливань у ідеальному коливальному контурі

* За другим правилом Кірхгофа $U_C = \mathcal{E}_{si}$.

Врахуємо, що $U_C = \frac{q}{C}$, $\mathcal{E}_{si} = -L\frac{di}{dt}$,

$i = \frac{dq}{dt}$, **тоді** $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ **і отримаємо:**

$$\frac{q}{C} = -L\frac{di}{dt}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

Диференціальне рівняння власних коливань у ідеальному коливальному контурі

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \; /:L$$

*

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Позначивши $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, отримаємо диференці-альне рівняння власних електромагнітних коливань

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$$

та його розв'язок: $q = q_{max}cos(\omega_0 t + \varphi)$

Характеристики власних електромагнітних коливань

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$$

* Врахувавши позначення

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

для циклічної частоти власних коливань у коливальному контурі отримаємо вираз:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

а для періоду

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$ (формула Томсона)

Характеристики власних електромагнітних коливань

* Якщо заряд на обкладинках конденсатора змінюється за законом косинуса

$$q = q_{max} cos(\omega_0 t + \varphi),$$

То напруга на обкладинках: $U = \frac{q}{C} = \frac{q_{max} cos(\omega_0 t + \varphi)}{C} =$

$$= \frac{q_{max}}{C} cos(\omega_0 t + \varphi) = U_{max} cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$U = U_{max} cos(\omega_0 t + \varphi)$$

де $U_{max} = \frac{q_{max}}{C}$ - амплітуда напруги

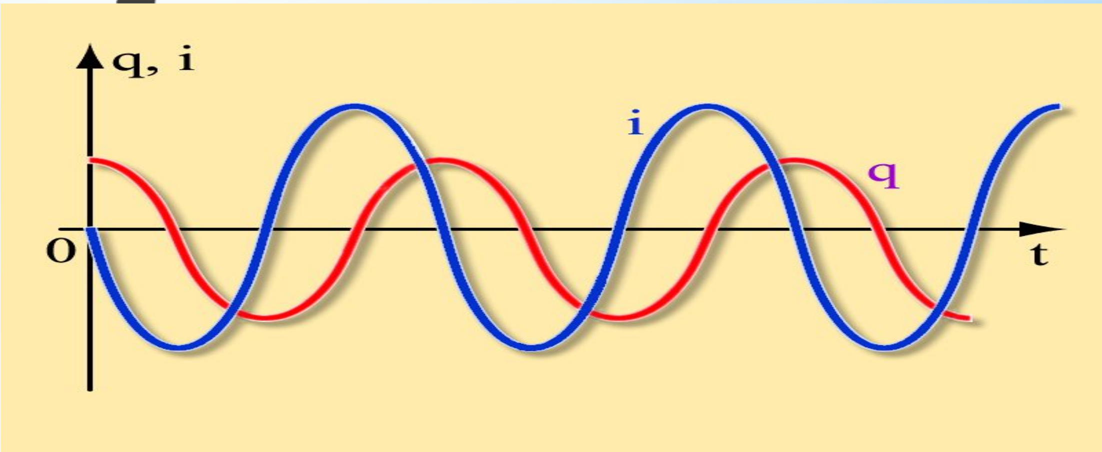
Коливання напруги і заряду відбуваються у одній фазі

Характеристики власних електромагнітних коливань

* Сила струму в контурі при зміні заряду за законом $q = q_{max}cos(\omega_0 t + \varphi)$ визначається як похідна від заряду за часом

$$i = \frac{dq}{dt} = -q_{max}\omega_0 sin(\omega_0 t + \varphi) =$$
$$= i_{max}cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

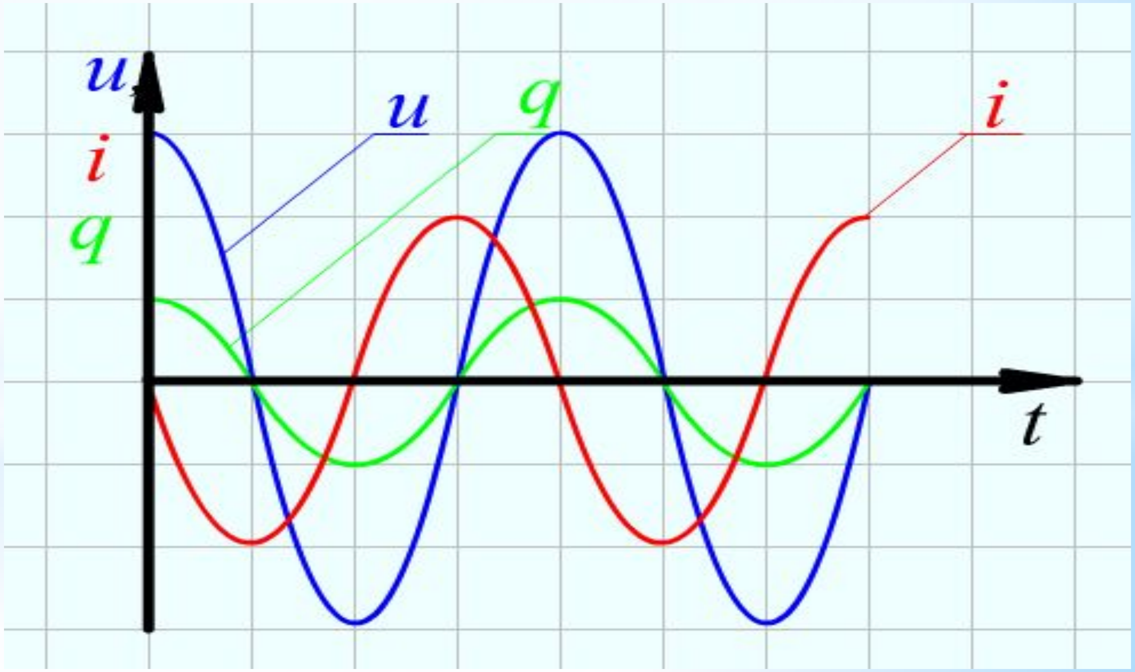
де $i_{max} = q_{max}\omega_0$- амплітуда струму



$$q = q_{max} cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$U = U_{max} cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$i = i_{max} cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$



Власні незгасаючі коливання – єдиний підхід

Коливання	Диференціальне рівняння	Його розвязок
Механічні		
Електро-магнітні		

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0 \quad \Longrightarrow \quad s = s_{max}cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Згасаючі коливання

В реальних коливальних системах відбувається зменшення їх амплітуди внаслідок втрати енергії: перетворення в теплоту через тертя в механічних коливальних системах, омічні втрати та випромінювання електромагнітної енергії в електричних коливальних системах.

Розглянемо згасаючі коливання в лінійних коливальних системах, в яких параметри, що визначають фізичні властивості системи, під час процесу коливань не змінюються.

Згасаючі механічні коливання

* При русі реального пружинного маятника на нього, крім сили пружності, діє також сила тертя, яка пропорційна швидкості руху маятника:

$$F_{\text{тер}} = -rv = -r\frac{dx}{dt}$$

У цьому випадку II закон Ньютона набуває вигляду:

$$-kx - rv = ma$$

$$-kx - r\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Згасаючі механічні коливання

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+kx=0\ /:m$$

*

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{r}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$

Ввівши позначення $\frac{r}{m}=2\beta$, $\frac{k}{m}=\omega_0^2$, отримаємо диференціальне рівняння згасаючих механічних коливань:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0,$$

розв'язком якого є рівняння вигляду

$$x=A_0e^{-\beta t}cos(\omega t+\varphi)$$

Характеристики згасаючих механічних коливань

$$x = A_0 e^{-\beta t} cos(\omega t + \varphi)$$

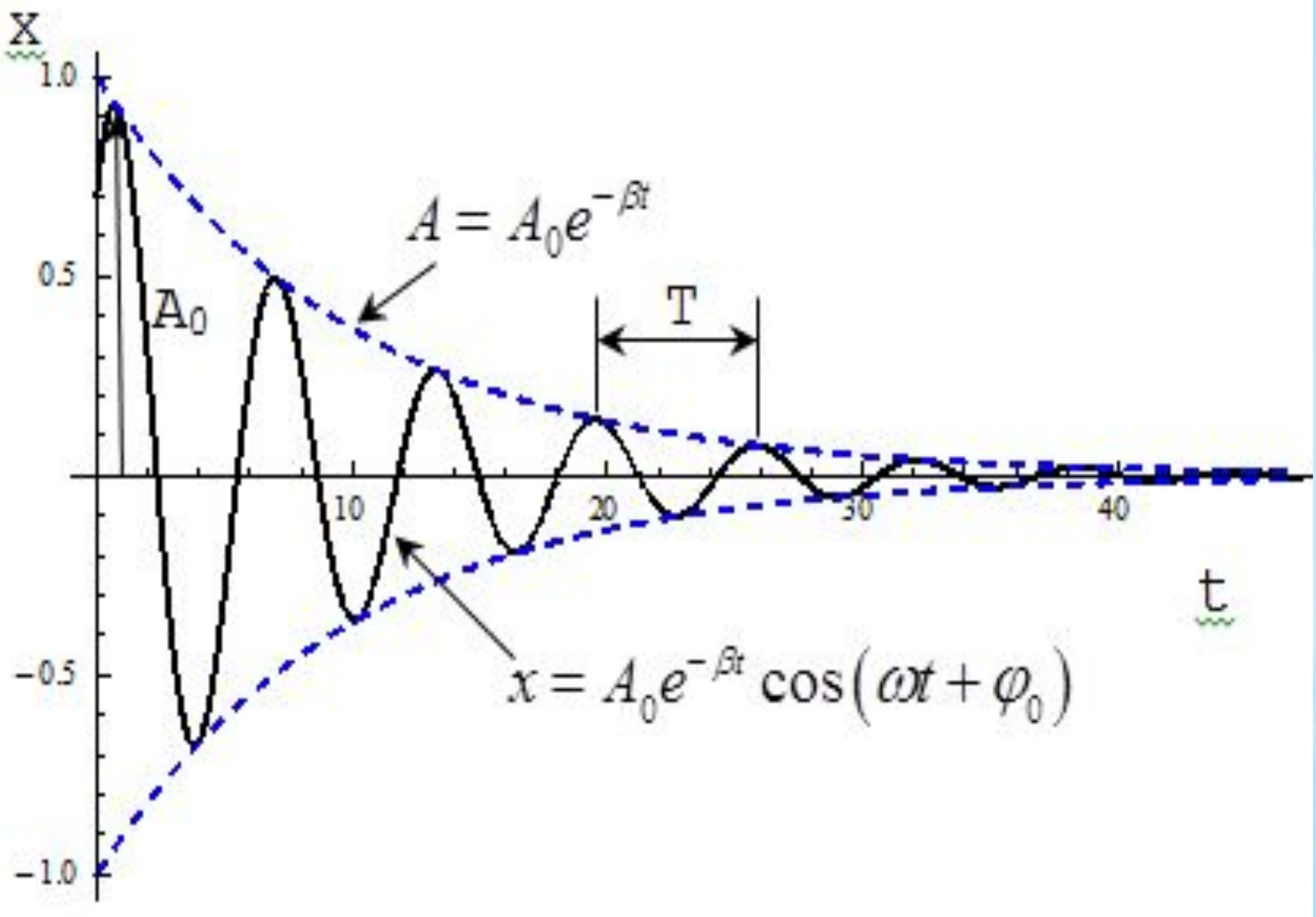
$$\frac{r}{m} = 2\beta, \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

* тут $\beta = \frac{r}{2m}$ - коефіцієнт згасання,

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклічна частота згасаючих коливань,

$A = A_0 e^{-\beta t}$- амплітуда згасаючих коливань.

Період згасаючих коливань $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$



x
1.0
0.5
−0.5
−1.0
A0
$A = A_0 e^{-\beta t}$
T
10
20
30
40
t
$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$

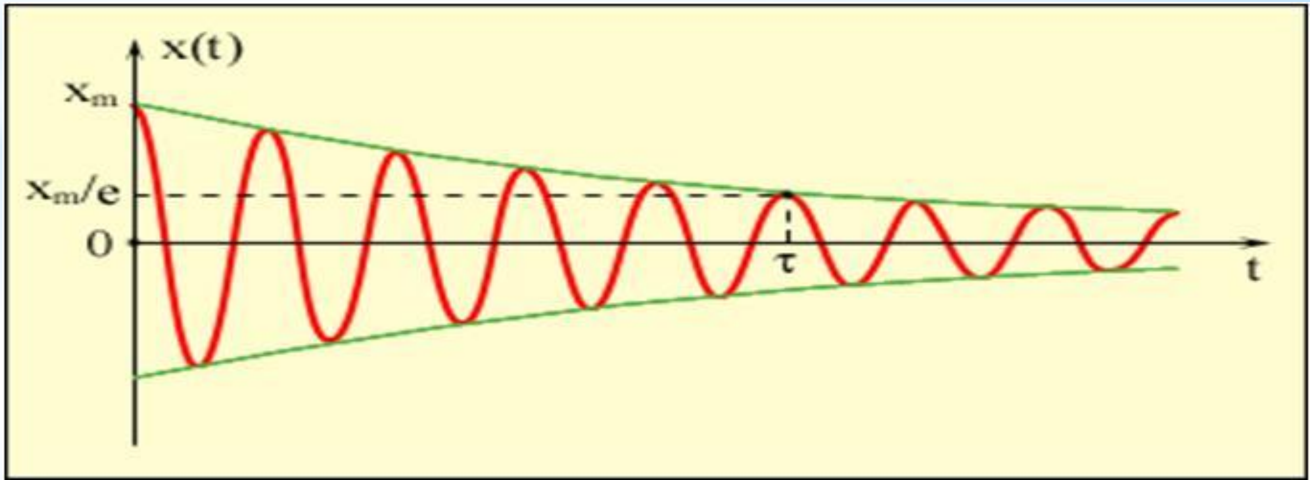
Характеристики згасаючих коливань

* ***Часом релаксації*** τ називається час, протягом якого амплітуда згасаючих коливань зменшується в e разів

$$\frac{A_0e^{-\beta t}}{A_0e^{-\beta(t+\tau)}} = e; \qquad e^{\beta\tau} = e; \qquad \beta\tau = 1$$

Отже, час релаксації є величина, обернена до коефіцієнта згасання

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$



Характеристики згасаючих коливань

* ***Декрементом згасання*** називається відношення амплітуд двох послідовних коливань $\frac{A(t)}{A(t+T)}$,

а ***логарифмічним декрементом згасання*** δ– натуральний логарифм цього відношення.

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$

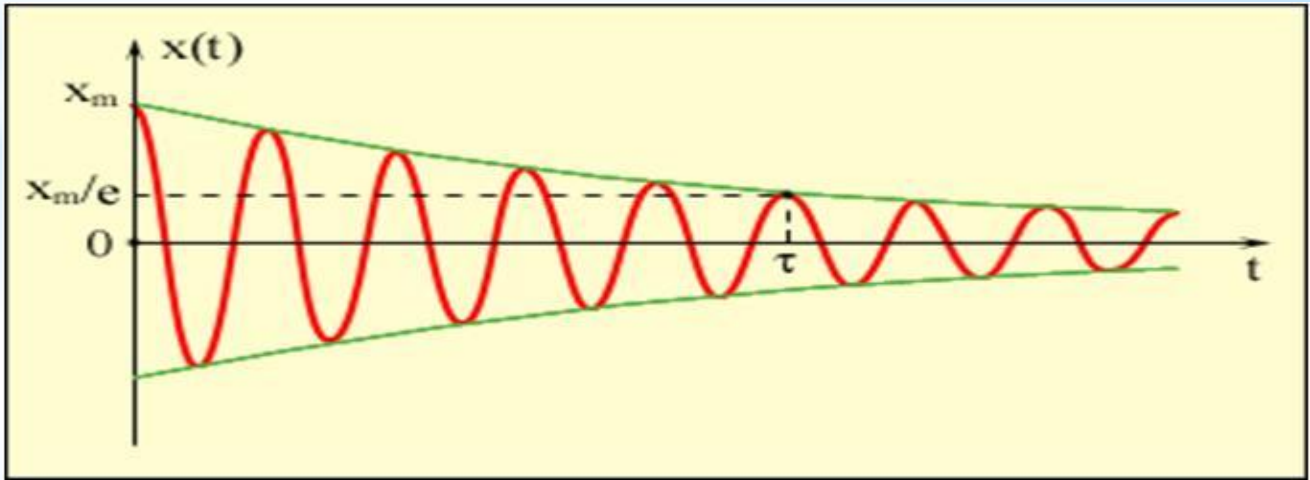
$$\delta = ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = ln e^{\beta T} = \beta T$$

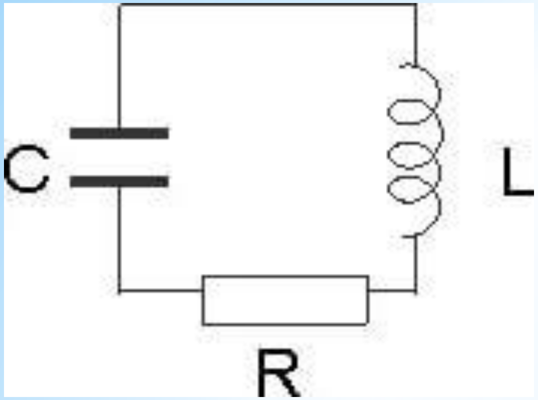
Характеристики згасаючих коливань

* $$\delta = ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = lne^{\beta T} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$$

Отже, ***логарифмічний декремент згасання δ чисельно дорівнює величині, оберненій до кількості коливань, протягом яких амплітуда зменшується в е разів.***

$$N_e = \frac{\tau}{T}$$





Згасаючі коливання у реальному коливальному контурі

- В реальному коливальному контурі електромагнітні коливання є згасаючими, оскільки початкова енергія витрачається на нагрівання провідників згідно закону Джоуля-Ленца. Опором котушки та провідників у цьому випадку знехтувати не можна і друге правило Кірхгофа потрібно записати з врахуванням спаду напруги на опорі *R*:

$$U_R + U_C = \mathcal{E}_{si}$$

$$IR + \frac{q}{C} = -L\frac{di}{dt}$$

$$IR + \frac{q}{C} = -L\frac{di}{dt}$$

Згасаючі коливання у реальному коливальному контурі

*

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0/:L$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Ввівши позначення $\frac{R}{L} = 2\beta$ та $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, отримаємо диференціальне рівняння згасаючих електромагнітних коливань :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

Згасаючі електромагнітні коливання

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

* Розв'язком цього рівняння є вираз вигляду:

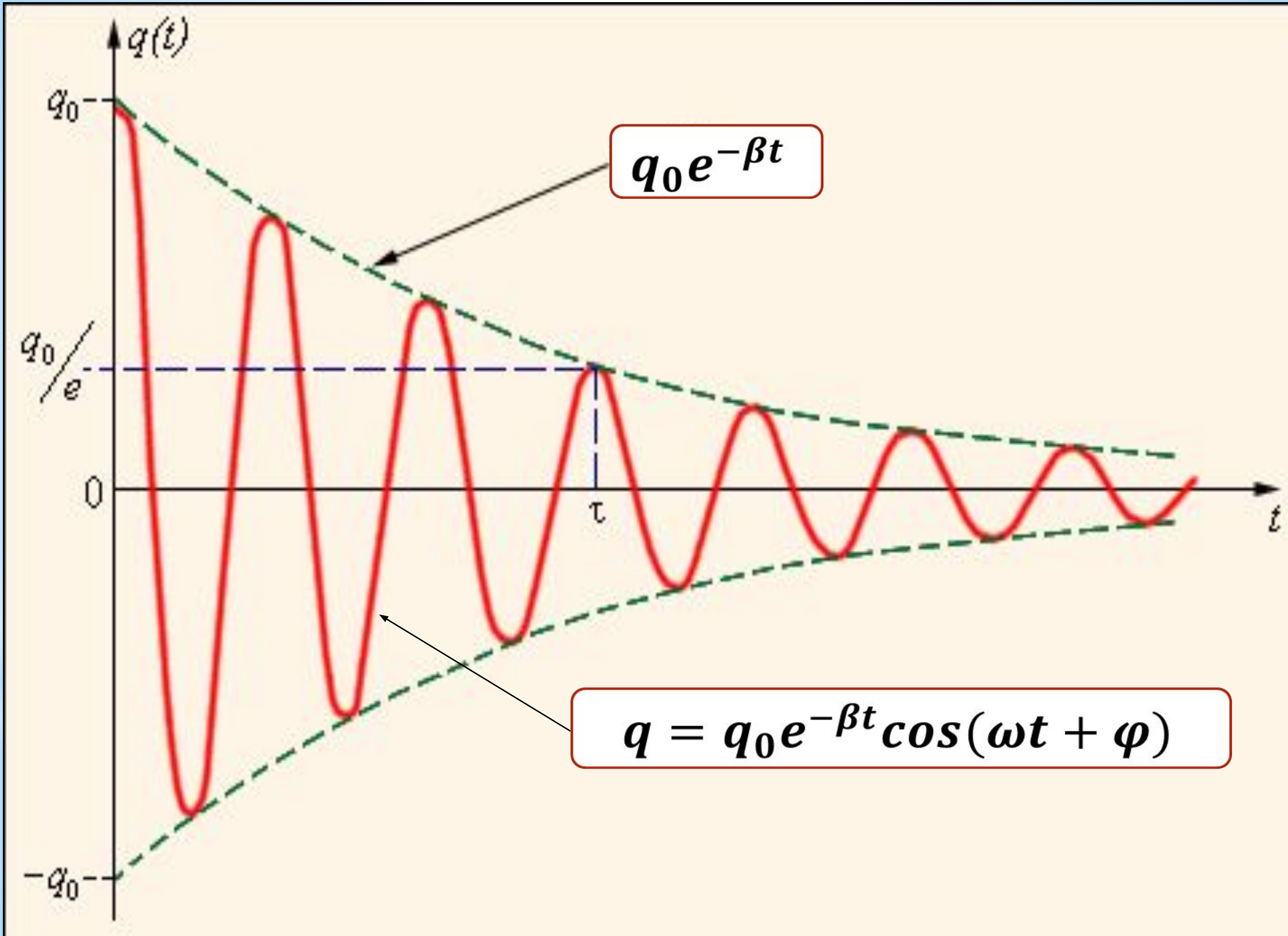
$$q = q_0 e^{-\beta t} cos(\omega t + \varphi)$$

де $\beta = \frac{R}{2L}$ − коефіцієнт згасання,

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклічна частота згасаючих коливань,

$q = q_0 e^{-\beta t}$- амплітуда згасаючих коливань.

Період згасаючих коливань $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$



$q(t)$
q_0
q_0/e
0
$-q_0$
τ
t
$q_0 e^{-\beta t}$
$q = q_0 e^{-\beta t} cos(\omega t + \varphi)$

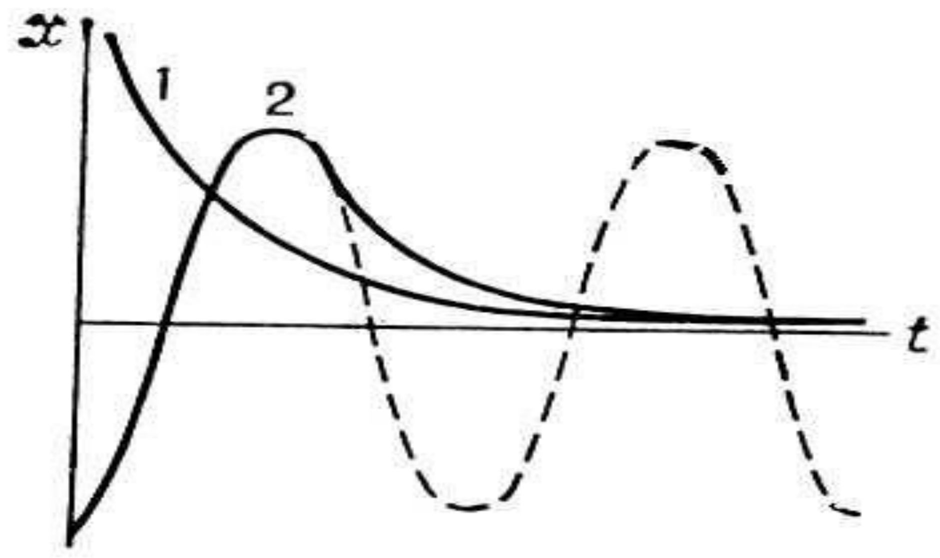
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Аперіодичний процес.

* Проаналізувавши формулу для періода згасаючих коливань, можна зробити висновок про те, що згасаючі коливання можливі за умови

$$\omega_0^2 > \beta^2$$

При $\beta^2 \geq \omega_0^2$відбуватиметься аперіодична розрядка конденсатра



Критичний опір

* Опір, при якому коливальний процес переходить в аперіодичний, називається ***критичним опором***.

Він знаходиться з умови $\boldsymbol{\beta^2 = \omega_0^2}$

$$\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$$

$$R^2 = \frac{4L}{C}$$

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Вільні згасаючі коливання - єдиний підхід

Коливання	Диференціальне рівняння	Його розвязок
Механічні		
Електро-магнітні		

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\beta\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0 \Longrightarrow s = s_0 e^{-\beta t} cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = s_0 e^{-\beta t}; \; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$