

ЕН.02 Элементы математической ЛОГИКИ

**09.02.03 Программирование в компьютерных
системах**

Тема: Операции над предикатами

Рассматриваемые вопросы

1. Понятие предиката. Область определения предиката.
2. Одноместный предикат. Многоместный предикат.
3. Логические операции над предикатами.
4. Кванторные операции над предикатами.

Понятие предиката

Раздел математической логики, изучающий логические законы, общие для любой области объектов исследования (содержащей хоть один объект) с заданными на этих объектах предикатами (т. е. свойствами и отношениями) называется **ЛОГИКОЙ ПРЕДИКАТОВ**

Субъект – это то, о чем что-то утверждается в высказывании

Предикат – это то, что утверждается о субъекте

*Переменное высказывание, истинностное значение которого зависит от параметра, и называется **предикатом**.*

Предикат от лат. Praedicatum – *сказанное*. Таким образом, **предикат** есть функция, определенная на некотором множестве параметров и со значениями в $\{0, 1\}$.

Понятие предиката

ПРИМЕР “7 - простое число” – высказывание.

Если в рассмотренном примере заменить конкретное число 7 переменной x из множества натуральных чисел, то получим предикат (высказывательную форму):

“ x – простое число”

При одних значениях x (например, $x=13$, $x=17$) эта форма дает истинные высказывания, а при других значениях x (например, $x=10$, $x=18$) эта форма дает ложные высказывания.

Эта высказывательная форма определяет функцию одной переменной x , определенной на множестве \mathbb{N} , и принимающую значения из множества $\{1;0\}$ – является предикатом.

Понятие предиката

Определение 1. **Одноместным предикатом $P(x)$** называется такая функция одной переменной, в которой аргумент x пробегает значения из некоторого множества M , а функция при этом принимает одно из двух значений: истина или ложь.

Само **множество M** называется **предметным множеством**, а аргументы $x_1, \dots, x_n \in M$ - **предметными переменными**.

Множество M , на котором задан предикат, называется **областью определения предиката**.

Множество, на котором предикат принимает только истинные значения, называется **областью истинности предиката $P(x)$** .

Определение 2. **N -местным предикатом** называется такая функция n переменных $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенная на множестве $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ и принимающая на этом множестве одно из двух значений: истина или ложь.

Можно считать, что **высказывание** это **нульместный предикат**, то есть предикат, в котором нет переменных для замены.

Понятие предиката. Примеры

Пример 1

Пусть предметное множество M есть класс млекопитающих.

Рассмотрим одноместный предикат $P(x)$:

«У x четыре ноги».

Тогда $P(\text{слон}) = 1$,

$P(\text{кошка}) = 1$,

$P(\text{человек}) = 0$.

Пример 2

Пусть M - множество натуральных чисел.

Рассмотрим двухместный предикат $G(x,y)$: $x < y$.

Тогда, например, $G(1,3) = 1$,

$G(8,5) = 0$.

Классификация предикатов

Предикат называется:

А) **Тождественно истинным**, если значение его для любых аргументов есть «истина»

Предикат “ $x+y=y+x$ ” является тождественно истинным.

Б) **Тождественно ложным**, если значение его для любых аргументов есть «ложь»

Предикат “ $x+1=x$ ” – тождественно ложным.

В) **Выполнимым**, если существует, по крайней мере, одна n -система его аргументов, для которой значение предиката есть «истина».

Предикат “ $x+y=5$ ” – выполнимым.

Равносильность предикатов

Два n -местных предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданных над одними и теми же множествами M_1, M_2, \dots, M_n , называются **равносильными**, если набор предметов (элементов) $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_n \in M_n$ превращает первый предикат в истинное высказывание $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ в том и только в том случае, когда этот набор предметов превращает второй предикат в истинное высказывание $Q(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Предикаты $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равносильны тогда и только тогда, когда их множества истинности совпадают

$$P^+ = Q^+.$$

Переход от одного равносильного предиката к другому называется **равносильным преобразованием** первого

Упражнение 1.

Среди следующих предложений выделите предикаты:

- 1) Луна есть спутник Венеры
- 2) Планеты x и y принадлежат Солнечной системе
- 3) $5 + \sqrt[5]{70} - \sqrt[6]{10} > 150$
- 4) $x^2 + 3x + 2 = 0$
- 5) $x^4 - 3x + 8$
- 6) Любое простое число не имеет делителей, отличных от себя и 1
- 7) Натуральное число n не меньше 1
- 8) Треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$
- 9) $x^2 + 2x + 1 > 0$
- 10) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- 11) $\ln x < \sin x$

Упражнение 2.

Среди следующих предложений выделить предикаты и для каждого из них указать область истинности.

1) $x+5=1$

2) При $x=2$ выполняется равенство $x^2-1=0$

3) $x^2-2x+1=0$

4) Существует такое число x , что $x^2-2x+1=0$

5) $x+2 < 3x-4$

6) Однозначное число x кратно 3

7) $(x+2)-(3x-4)$

Логические операции над предикатами

Отрицание предикатов

- Довольно часто приходится в математике строить предложения, в которых что-либо отрицается.
- **Например:** Треугольник ABC не прямоугольный.
- Отрицая ложь, мы получаем истину. Отрицая истину, мы получаем ложь.

- Отрицание предиката можно образовать с помощью связки «**неверно, что**» или с помощью частицы «**не**».
- Например: неверно, что пингвины летают.
- Пингвины не летают.
- Обозначают отрицание предиката так же, как и отрицание высказываний.

- Определение. Отрицанием предиката $P(x)$ называется новый предикат $\neg P(x)$, который принимает значение «истина» при всех значениях переменной из области определения, при которых предикат $P(x)$ принимает значение «ложь», и принимает значение «ложь» при всех переменных, при которых $P(x)$ принимает значение «истина».

Отрицанием предиката $P(x)$ называется новый предикат, **множество истинности** которого является дополнением множества истинности предиката $P(x)$.

Логические операции над предикатами

Конъюнкцией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат, который принимает значение 1 при тех и только тех значениях, при которых каждый из предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ принимает значение 1 и принимает 0 во всех остальных случаях.

Множество истинности есть пересечение множеств истинности

$$I_{P \wedge Q} = I_p \boxtimes I_q$$

Пример. Предикаты $P(x)$ - « $x > -3$ » и $Q(x)$ - « $x < 3$ »

Конъюнкция предикатов - « $(x > -3) \wedge (x < 3)$ »

Логические операции над предикатами

Дизъюнкцией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат, который принимает значение 1 при тех и только тех значениях, при которых хотя бы один из предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ принимает значение 1 и принимает 0 во всех остальных случаях.

Множество истинности есть объединение множеств истинности

$$I_{P \vee Q} = I_p \boxplus I_q$$

Пример. Предикаты $P(x)$ - « $x \neq 0$ » и $Q(x)$ - « $y \neq 0$ »

Дизъюнкция предикатов - « $(x \neq 0) \vee (y \neq 0)$ »

Логические операции над предикатами

Импликацией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется предикат, который имеет значение ложь на тех и только на тех наборах аргументов x , на которых $P(x)$ имеет значение 1, а $Q(x)$ – значение 0.

$$P(x) \rightarrow Q(x)$$

Множество истинности есть объединение множеств истинности

$$I_{P \rightarrow Q} = C I_p \boxtimes I_q$$

- Импликация предикатов образуется с помощью связки «**если....., то**».
- **Например:** Если 48 кратно 6, то 48 кратно 3.

Данный предикат составлен из двух простых предикатов:

$A(x)$: число 48 кратно 6;

$B(x)$: число 48 кратно 3.

- Поскольку справедлива равносильность

$$P(x) \rightarrow Q(x) \equiv \bar{P}(x) \vee Q(x)$$

то $T_{P \rightarrow Q} = T_{(\bar{P})} \cup T_{(Q)}$

- Например: импликация $A(x)$:

Если $x+2>0$, то $x>0$.

составлена из предикатов

$P(x): x+2>0$ и $Q(x): x>0$

$$T_{(P)}=(-2;+\infty) \quad T_{(Q)}=(0;+\infty) \quad T_{(\bar{P})} = (-\infty;-2]$$

Следовательно,

$$T_{P \rightarrow Q} = T_{(\bar{P})} \cup T_{(Q)} = (-\infty;-2] \cup (0;+\infty)$$

Логические операции над предикатами

Эквиваленцией $P(x)$ и $Q(x)$ называется предикат, который имеет значение истина на тех и только на тех наборах аргументов x , на которых значения истинности $P(x)$ и $Q(x)$ совпадают.

Множество истинности есть объединение множеств истинности

$$I_{P \leftrightarrow Q} = (CI_p \boxtimes CI_q) \boxtimes (I_p \boxtimes I_q)$$

- С теоретико - множественной точки зрения предикат $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ означает, что

$$T_{(A)} = T_{(B)}$$

- С теоретико – множественной точки зрения предикат $A(x) \Rightarrow B(x)$

означает, что

$$T_{(A)} \subset T_{(B)}$$

Упражнение 3.

Пусть даны предикаты $P(x)$: « x – четное число» и $Q(x)$: « x кратно 3», определенные на множестве \mathbb{N} . Найти области истинности предикатов:

- 1) $P(x) \wedge Q(x)$
- 2) $P(x) \vee Q(x)$
- 3) $\neg P(x)$
- 4) $P(x) \rightarrow Q(x)$

$$I_p = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots, 2n, \dots\}, I_q = \{3, 6, 9, 12, \dots, 3n, \dots\}$$

$$\begin{aligned} 1) I_{P(x) \wedge Q(x)} &= I_p \cap I_q = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots, 2n, \dots\} \cap \{3, 6, 9, 12, \dots, 3n, \dots\} = \\ &= \{6, 12, \dots, 6n, \dots\} \end{aligned}$$

Упражнение 4.

Если значения x, y принадлежат отрезку $[2; 5]$, то в списке выражений следующего вида:

1) $x=2$ или $y=7$

2) $x-y=7$

3) $x+y < 2$

4) $x^2 + 5 = 0$

5) $3 < x < y < 5$

6) $x > 12$

Число истинных и ложных предикатов соответственно равно:

А) 2,4

Б) 1,4

В) 3,3

Г) 1,5

Д) 2,3

Упражнение 5.

Запишите предикат (условие, которое может быть и сложным), полностью описывающий область, нестрого заключенную между окружностью с центром в начале координат и радиусом 2 и квадратом, в который вписана эта окружность.

Уравнение окружности имеет вид: $x^2 + y^2 = 4$

Уравнения квадрата: $|x| = 2$ $|y| = 2$

Кванторные операции

- Определение. Кванторными операциями называются операции, преобразующие предикаты в высказывания.

Пусть имеется предикат $P(x)$, определенный на множестве X .

- $P(x)$ – x -четное число.
- $P(4)$ – 4-четное число. И -высказывание
- $P(5)$ -5-четное число. Л-высказывание
- Но существуют еще две операции, которые превращают предикат в высказывания.

Квантор общности \forall

- Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на множестве X .
- Под выражением $\forall x P(x)$ понимают высказывание, истинное, когда $P(x)$ истинно для каждого элемента x из множества X , и ложное в противном случае.

Это высказывание уже не зависит от x .

Соответствующее ему словесное выражение звучит так: “**для всякого x $P(x)$ истинно**”.

- **Символ** \forall называют квантором всеобщности (общности).

Переменную x в предикате $P(x)$ называют **свободной** (ей можно придавать различные значения из $X(x)$) в высказывании же $\forall x P(x)$ x называют **связанной** квантором всеобщности.

- Сравните!

В параллелограмме диагонали равны.	В любом параллелограмме диагонали равны.
Число x - натуральное	Всякое число x - натуральное
Человек имеет право на труд	Каждый человек имеет право на труд

Квантор существования \exists

- Пусть $P(x)$ - предикат определенный на множестве X .
- Под выражением $\exists x P(x)$ понимают высказывание, которое является истинным, если существует элемент x , для которого $P(x)$ истинно, и ложным – в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x .
Соответствующее ему словесное выражение звучит так: “**Существует x , при котором $P(x)$ ИСТИННО.**”

- Символ \exists называют квантором существования.
- В высказывании $\exists x P(x)$ переменная x **связана** этим квантором (на нее навешен квантор).

- Сравните!

В параллелограмме диагонали равны.	В любом параллелограмме диагонали равны.	Существует параллелограмм, у которого диагонали равны
Число x - натуральное	Всякое число x - натуральное	Найдется натуральное число x
Человек имеет право на труд	Каждый человек имеет право на труд	Есть люди, имеющие право на труд
Ромб x есть квадрат	Любой ромб x есть квадрат	Существует ромб x , являющийся квадратом.

Для более подробного изучения материала

самостоятельно читаем:

Судоплатов, С. В. Математическая логика и теория алгоритмов [Электронный ресурс]: учебник и практикум для академического бакалавриата / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. — 5-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 255 с. — <https://biblio-online.ru/book/>