Метод множителей Лагранжа

- Рассмотрим частный случай общей задачи нелинейного программирования, предполагая, что система ограничений содержит только уравнения:

$$F = F\left(x_1, \ldots, x_n\right) \rightarrow \max\left(\min\right)$$

$$g_i\left(x_1, \ldots, x_n\right) = b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right)$$

Полагаем, что все функции непрерывны вместе со своими первыми частными производными

Для решения задачи построим функцию Лагранжа

$$L\left(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m\right) = F\left(x_1, \ldots, x_n\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - g_i\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right)$$

$$\lambda_i \left(i = \overline{1, m}\right)$$

- называются множителями Лагранжа

- Определим частные производные

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}\left(j=\overline{1,n}\right) \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}\left(i=\overline{1,m}\right)$$

Приравняем их к нулю. В результате получим систему уравнений относительно n+m переменных.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j}=\dfrac{\partial F}{\partial x_j}-\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}=0, & j=\overline{1,n} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j}=b_i-g_i\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0, & i=\overline{1,m} \end{cases}$$

- Всякое решение системы уравнений определяет точку в которой **может иметь место экстремум функции F**

Решения задачи методом Лагранжа включает следующие этапы:

1. Составляют функцию Лагранжа.
2. Находят частные производные от функции Лагранжа по переменным и приравнивают их нулю.
3. Решают систему уравнений и находят все точки, в которых целевая функция ***F*** может иметь экстремум.
4. Среди найденных точек находят такие, в которых целевая функция ***F*** достигает максимального (минимального) значения

Пример

- По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить **180** изделий.
- Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами.
- При производстве изделий ***I*** способом затраты равны $\mathbf{4x_1+x_1^2}$
- При изготовлении изделий ***II*** способом они составляют $\mathbf{8x_2+x_2^2}$
- Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы общие затраты на производство продукции были **минимальными**

Решение.

- Составим математическую модель задачи.

$$F = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 180 \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \end{cases}$$

- Составим функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2)$$

Вычислим частные производные функции ***L*** и приравняем их нулю.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

- Решая данную систему, получим

$$x_1^* = 91 \qquad x_2^* = 89$$

В этой точке может быть экстремум целевой функции *F*. Используя вторые частные производные, можно показать, что в данной точке функция ***F*** имеет условный минимум

$$F_{\min} = 17278$$

Если предприятие изготовит **91** изделие ***I*** способом и **89** изделий ***II*** способом, то общие затраты будут минимальными и составят **17278 руб**

- Метод множителей Лагранжа может быть применен и для случая, когда система ограничений задачи нелинейного программирования содержит только неравенства

$$F = F\left(x_1, \ldots, x_n\right) \to \max\left(\min\right)$$

$$g_i\left(x_1, \ldots, x_n\right) \leq b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right)$$

Решение такой задачи находится в 2 этапа:

1. Находят стационарные точки **безусловного экстремума** целевой функции **F**

Для этого определяют частные производные функции ***F*** и приравнивают их к нулю.

В результате получают систему ***n*** уравнений относительно ***n*** переменных.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

Из всех решений системы выбираем только те точки , которые удовлетворяют системе строгих неравенств:

$$g_i\left(x_1, \ldots, x_n\right) < b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right)$$

2. Находят точки **условного экстремума** целевой функции **F** при условиях

$$g_i\left(x_1, \ldots, x_n\right) = b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right)$$

Для этого строят функцию Лагранжа

$$L\left(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m\right) = F\left(x_1, \ldots, x_n\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - g_i\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right)$$

Находят частные производные от функции Лагранжа и приравнивают их нулю.

Решают систему **n+m** уравнений относительно **n+m** переменных

- В результате, на 1 и 2 этапе находится множество точек, в которых целевая функция ***F*** может иметь экстремальные значения.
- Для определения максимального (минимального) значения целевой функции ***F*** необходимо вычислить значения этой функции в полученных точках

Пример. Найти минимальное и максимальное значение функции

$$F = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$$

- При условиях

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 52$$

Решение

- Определим точки безусловного экстремума целевой функции ***F***, лежащие внутри области.
- Для этого найдем частные производные функции ***F*** и приравняем их к нулю.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2\left(x_1 - 2\right) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2\left(x_2 - 3\right) = 0 \end{cases}$$

- получим $x_1^* = 2 \quad x_2^* = 3$

$$F(2,3) = 0$$

Так как **$2^2+3^2=13<52$** следовательно, точка **А(2,3)** лежит внутри области.

- Строим функцию Лагранжа для случая, когда ограничение имеет вид

$$x_1^2 + x_2^2 = 52$$

$$L(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + \lambda(52 - x_1^2 - x_2^2)$$

Вычислим частные производные функции L по и приравняем их к нулю.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2\left(x_1 - 2\right) - 2\lambda x_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2\left(x_2 - 3\right) - 2\lambda x_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 52 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{cases}$$

Первое уравнение системы домножим на x2 , второе уравнение x1 . В результате получим:

$$\begin{cases} x_2\left(x_1-2\right)=\lambda x_1 x_2 \\ x_1\left(x_2-3\right)=\lambda x_1 x_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x_2\left(x_1-2\right)=x_1\left(x_2-3\right) \quad \Rightarrow \quad 2x_2=3x_1$$

Решая систему

$$\begin{cases} 2x_2=3x_1 \\ x_1^2+x_2^2=52 \end{cases}$$

- получаем два решения – две точки *B*(4, 6) и *C*(-4, -6), в которых целевая функция **F** может иметь экстремумы

$$F\left(4, 6\right) = 13, \qquad F\left(-4, -6\right) = 117.$$

Таким образом, минимальное значение целевой функции $F_{\min} = 0$ достигается в точке ***A*(2, 3)**,

максимальное значение $F_{\max} = 117$ в точке **С(-4, -6)**