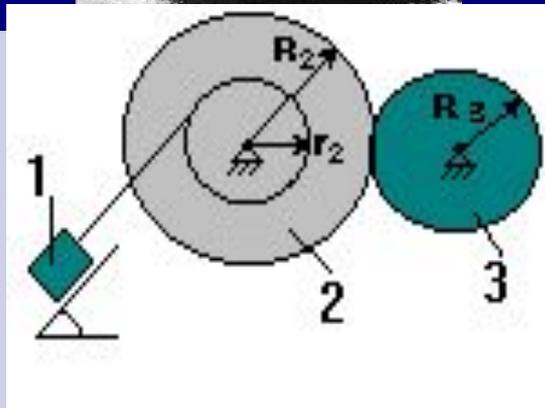


Лоскутов Ю.В.

# Курс лекций по теоретической механике



## Кинематика

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СТР, ЭУН, ПЗ, АД, СУЗС и ТМО в ПГТУ (2001-2013 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме двух семестров. Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional. Запуск презентации – F5, навигация – Enter, навигационные клавиши, щелчок мыши, кнопки. Завершение – Esc. Замечания и предложения можно послать по e-mail: loskutovyv@volgatech.net

Йошкар-Ола - 2014

# Содержание

- **Лекция 5.** Сложное движение точки. Теорема о сложении скоростей точки при сложном движении. Теорема о сложении ускорений при сложном движении точки. Ускорение Кориолиса. Причины возникновения ускорения Кориолиса.
- **Лекция 6.** Сложное движение твердого тела. Сложение поступательных движений. Сложение вращательных движений. Сложение поступательного и вращательного движений. Общий случай составного движения тела. Кинематические инварианты.

## Рекомендуемая литература

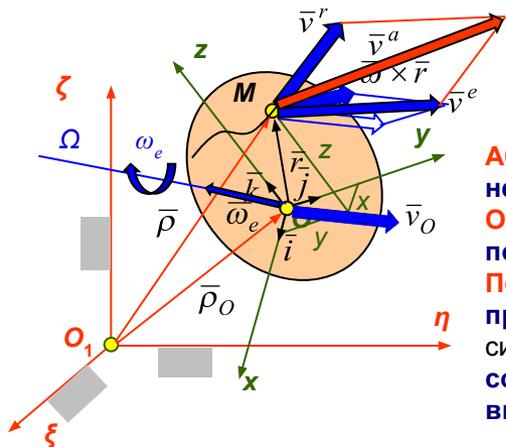
1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.1. М.: Высшая школа. 1977 г. 368 с.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука. 1986 г. 416 с.
3. Сборник заданий для курсовых работ /Под ред. А.А. Яблонского. М.:Высшая школа. 1985 г. 366 с.

# Лекция 5

■ **Сложное движение точки** – такое движение, при котором точка участвует одновременно в двух или нескольких движениях.

Примеры сложного движения точки (тела): лодка, переплывающая реку; человек, идущий по движущемуся эскалатору; камень подвижной кулисы, поршень качающегося цилиндра; шары центробежного регулятора Уатта.

Для описания сложного движения точки или для представления движения в виде сложного используются **неподвижная система отсчета  $O_1\xi\eta\zeta$** , связанная с каким-либо условно неподвижным телом, например, с Землей, и **подвижная система отсчета  $Oxyz$** , связанная с каким-либо движущимся телом.



**Абсолютное движение ( $a$ )** - движение точки, рассматриваемое относительно неподвижной системы отсчета. **Относительное движение ( $r$ )** - движение точки, рассматриваемое относительно подвижной системы отсчета.

**Переносное движение ( $e$ )** - движение подвижной системы отсчета, рассматриваемое относительно неподвижной системы отсчета.

**Абсолютная скорость (ускорение) точки  $v^a$  ( $a^a$ )** - скорость (ускорение) точки, вычисленная относительно неподвижной системы отсчета.

**Относительная скорость (ускорение) точки  $v^r$  ( $a^r$ )** – скорость (ускорение) точки, вычисленная относительно подвижной системы отсчета.

**Переносная скорость (ускорение) точки  $v^e$  ( $a^e$ )** – скорость (ускорение) точки, принадлежащей подвижной системе координат или твердому телу, с которым жестко связана подвижная система координат, совпадающей с рассматриваемой движущейся точкой в данный момент времени и вычисленная относительно неподвижной системы отсчета.

**Теорема о сложении скоростей** – абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей точки.

В любой момент времени справедливо соотношение:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_O + \bar{r} = \bar{\rho}_O + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

Продифференцируем это соотношение по времени имея в виду, орты  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  изменяют свое направление в общем случае движения свободного тела, с которым связана подвижная система координат:

Здесь первое слагаемое ( $v_O$ ) - скорость полюса  $O$ ; следующие три – **относительная скорость точки ( $v^r$ )**.

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_O}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_O}{dt} + \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} + x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt}.$$

Для последних трех слагаемых следует определить производные по времени от ортов  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ :

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = (\bar{\omega}_e \times \bar{i});$$

Таким образом, с учетом того, что производная по времени радиуса-вектора  $\bar{\rho}$  есть абсолютная скорость, получаем:

$$\bar{v}^a = \bar{v}^r + \bar{v}^e.$$

Подставим векторные произведения в последние три слагаемые:

$$x(\bar{\omega}_e \times \bar{i}) + y(\bar{\omega}_e \times \bar{j}) + z(\bar{\omega}_e \times \bar{k}) = \bar{\omega}_e \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \bar{\omega}_e \times \bar{r}.$$

Сумма первого и последнего слагаемого – скорость точки свободного тела есть **переносная скорость точки ( $v^e$ )**:

$$\bar{v}^e = \bar{v}_O + \bar{\omega}_e \times \bar{r}.$$

Модуль вектора абсолютной скорости:

$$|\bar{v}^a| = \sqrt{|\bar{v}^r|^2 + |\bar{v}^e|^2 + 2|\bar{v}^r||\bar{v}^e|\cos(\bar{v}^r, \bar{v}^e)}.$$

# Лекция 5 (продолжение 5.2)

## Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса) – абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений точки.

Было получено ранее соотношение для скорости:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\vec{\rho}_O}{dt} + \vec{x}\vec{i} + \vec{y}\vec{j} + \vec{z}\vec{k} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}.$$

Продифференцируем это соотношение по времени еще раз:

$$\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{\rho}_O}{dt^2} + \vec{x}\vec{i} + \vec{y}\vec{j} + \vec{z}\vec{k} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} + \vec{x}\frac{d\vec{i}}{dt} + \vec{y}\frac{d\vec{j}}{dt} + \vec{z}\frac{d\vec{k}}{dt} + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}.$$

Здесь первое слагаемое ( $\vec{a}_O$ ) – ускорение полюса O; следующие три – **относительное ускорение точки** ( $\vec{a}^r$ ).

$$\vec{a}_O$$

$$\vec{a}^r$$

$$\vec{a}^c$$

$$\vec{a}^e$$

Для последних трех слагаемых следует определить вторые производные по времени от ортов подвижной системы координат  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{i}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_e \times \vec{i}) = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{i} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{i}); \\ \frac{d\vec{j}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_e \times \vec{j}) = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{j} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{j}); \\ \frac{d\vec{k}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_e \times \vec{k}) = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{k} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{k}). \end{aligned}$$

В оставшихся шести слагаемых сложим одинаковые члены, подставим векторные произведения для первых производных по времени от ортов и сгруппируем:

$$2\left[\vec{x}\frac{d\vec{i}}{dt} + \vec{y}\frac{d\vec{j}}{dt} + \vec{z}\frac{d\vec{k}}{dt}\right] = 2\left[\vec{x}(\vec{\omega}_e \times \vec{i}) + \vec{y}(\vec{\omega}_e \times \vec{j}) + \vec{z}(\vec{\omega}_e \times \vec{k})\right] = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}^r).$$

Подставим эти выражения в последние три слагаемые и сгруппируем:

$$\begin{aligned} &\frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times x\vec{i} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times x\vec{i}) + \\ &+ \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times y\vec{j} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times y\vec{j}) + \\ &+ \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times z\vec{k} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times z\vec{k}) = \\ &= \vec{\varepsilon}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r}). \end{aligned}$$

Сумма первого и полученных двух слагаемых – ускорение точки свободного тела есть **переносное ускорение точки** ( $\vec{a}^e$ ):

$$\vec{a}^e = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r}).$$

Полученная компонента ускорения представляет собой **кориолисово ускорение** ( $\vec{a}^c$ ):

$$\vec{a}^c = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}^r).$$

Таким образом, с учетом того, что вторая производная по времени радиуса-вектора  $\vec{\rho}$  есть абсолютное ускорение, получаем:

$$\vec{a}^a = \vec{a}^r + \vec{a}^e + \vec{a}^c.$$

## Величина и направление ускорения Кориолиса:

### Модуль вектора кориолисова ускорения:

Ускорение Кориолиса обращается в ноль в двух случаях:

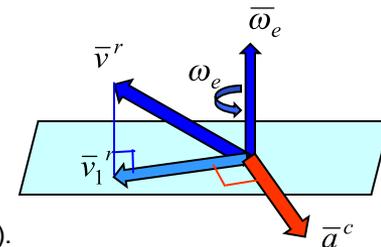
$$|\vec{a}^c| = 2\omega_e v^r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}^r).$$

- Угловая скорость переносного движения равна 0 (поступательное переносное движение).
- Вектор угловой скорости параллелен вектору относительной скорости (синус угла между векторами обращается в 0).

### Направление вектора кориолисова ускорения:

Определяется по одному из трех правил:

- По определению векторного произведения (см. п.3.2).
- По правилу правой руки (см. п.3.2).
- По правилу Жуковского:**



а) Спроецировать вектор относительной скорости на плоскость, перпендикулярную вектору угловой скорости.

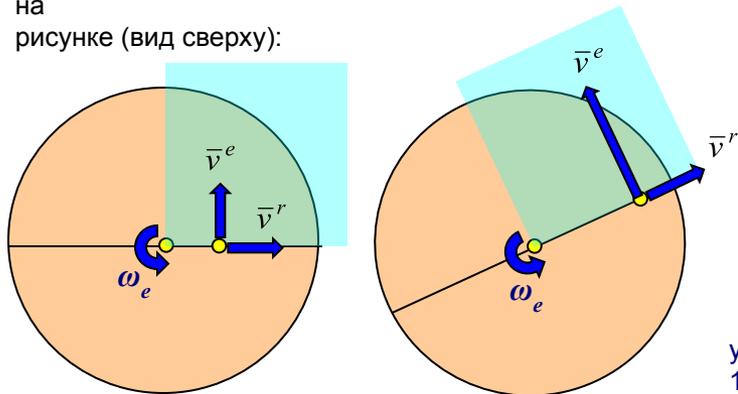
б) Повернуть проекцию вектора относительной скорости на прямой угол в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

## Лекция 5 (продолжение 5.3)

■ **Причины возникновения ускорения Кориолиса:** Формально ускорение Кориолиса было выведено группировкой слагаемых произведений, содержащих проекции относительной скорости и производные по времени от ортов подвижной системы координат. При этом ранее было получено удвоенное число таких слагаемых.

Для прояснения физических причин возникновения ускорения Кориолиса рассмотрим качественный пример, в котором специально будем полагать постоянными вектор относительной скорости (в подвижной системе координат) и вектор угловой переносной скорости (вращения подвижной системы координат относительно неподвижной оси):

Пусть в некоторый момент времени положение точки и вектора относительной и переносной скоростей таковы, как они изображены на рисунке (вид сверху):



Через некоторое время точка удалится от оси вращения и тело повернется на некоторый угол.

В результате:

- 1) **относительная скорость изменится по направлению** из-за наличия переносной угловой скорости и
- 2) **переносная линейная скорость изменится по величине** из-за наличия относительной скорости, изменяющей расстояние точки до оси вращения.

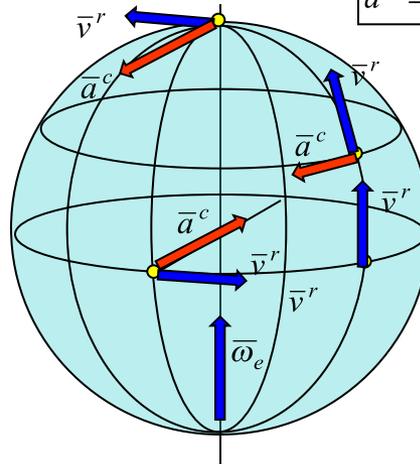
Таким образом, можно считать что существует две причины возникновения ускорения Кориолиса:

- 1) переносная угловая скорость влияет на относительную скорость, а
- 2) относительная скорость в свою очередь влияет на переносную линейную скорость.

Возможно, это поможет запомнить коэффициент, равный двум, в формуле, определяющей ускорение Кориолиса.

$$\bar{a}^c = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}^r).$$

■ **Примеры определения направления ускорения Кориолиса** удобно рассмотреть для случаев различного положения движущихся точек по поверхности Земли, вращающейся относительно своей оси:



# Лекция 6

■ **Сложное движение твердого тела** – такое движение, при котором тело участвует одновременно в двух или нескольких движениях.

Все определения, касающиеся составляющих движения, данные для сложного движения точки, остаются справедливыми для твердых тел. Кинематика сложного движения точки используется здесь для получения новых соотношений, описывающих сложное движение твердого тела.

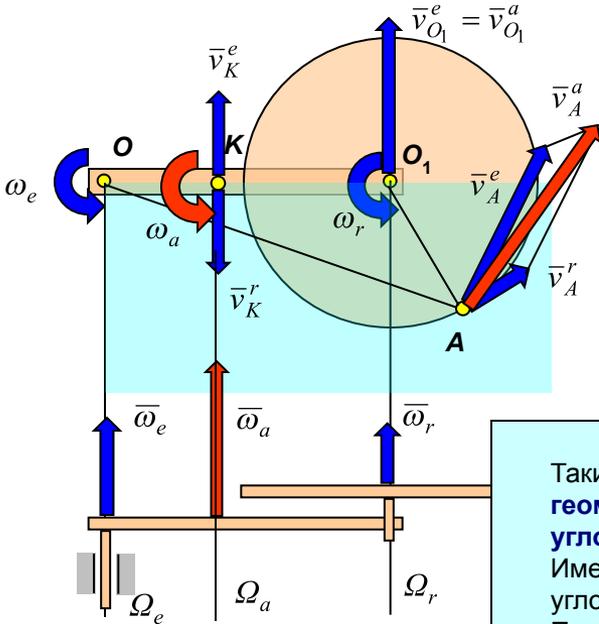
■ **Сложение поступательных движений твердого тела** – При поступательных движениях все точки твердого тела имеют одинаковые скорости, что позволяет использовать теорему о сложении скоростей точки для сложного движения:

Таким образом, **абсолютная скорость тела**, равная скорости одной из точек этого тела, равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей этого тела.

$$\vec{v}^a = \vec{v}^r + \vec{v}^e.$$

■ **Сложение вращательных движений твердого тела** – здесь рассмотрим два случая различного положения осей вращения: оси вращений параллельны и оси вращений пересекаются.

■ **Оси вращений параллельны** – диск вращается относительно своей оси, проходящей через точку  $O_1$ , с угловой скоростью  $\omega_r$ , ось диска движется по круговой траектории вокруг оси, проходящей через неподвижную точку  $O$ , с угловой скоростью  $\omega_e$ :



Произвольная точка  $A$ , принадлежащая диску, совершает сложное движение (движется по круговой траектории в подвижной плоскости, жестко связанной с кривошипом  $OO_1$ ) и абсолютная скорость этой точки определяется выражением:

$$\vec{v}_A^a = \vec{v}_A^r + \vec{v}_A^e.$$

Задачу определения скоростей любой из точек диска можно упростить, если найти положение мгновенного центра вращения (точку, скорость которой в данный момент равна нулю):

$$\vec{v}_K^a = \vec{v}_K^r + \vec{v}_K^e = 0.$$

Отсюда:

$$\vec{v}_K^e = -\vec{v}_K^r.$$

Это означает, что точка  $K$  лежит на отрезке прямой  $OO_1$  и делит его на части, **обратно пропорциональные угловым скоростям**:

$$v_K^e = v_K^r, \quad \omega_e OK = \omega_r O_1 K$$

$$\frac{\omega_e}{\omega_r} = \frac{O_1 K}{OK}$$

Таким образом, **абсолютная угловая скорость равна геометрической сумме относительной и переносной угловых скоростей.**

Имеется полная аналогия между сложением векторов угловых скоростей и сложением двух параллельных сил. При сложении таких сил равнодействующая приложена в точке, делящей расстояние между силами на отрезки, **обратно пропорциональные силам.**

точку  $O_1$ , которая не участвует в (в переносном движении и в

вы:  $v_{O_1}^e = v_{O_1}^a, \quad \omega_e OO_1 = \omega_a KO_1.$

выразим через  $O_1 K$ :

$KO_1$ . Отсюда:  $\omega_a = \omega_e + \omega_r.$

одить так же обратно пропорционально со стороны большего вектора угловой

$$\omega_a = \omega_e - \omega_r.$$

В случае противоположных по направлению угловых скоростей, но только внешние скорости). Тогда:  $OO_1 = KO_1$  и  $\omega_e = \omega_r$ .

Оба соотношения можно объединить одним векторным соотношением:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r.$$

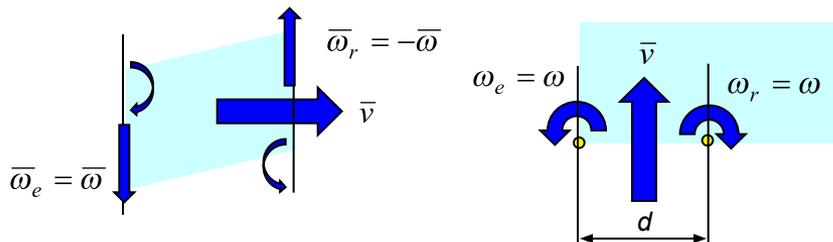
## Лекция 6 (продолжение 6.2)

■ **Пара вращений** – При сложении двух параллельных сил, равных по величине и противоположно направленных между собой равнодействующая этих сил обращается в ноль (система таких сил не приводится к равнодействующей) и эти силы образуют качественно новую простейшую систему, называемую **парой сил**. При этом действие пары сил характеризуется **моментом пары**.

Совершенно аналогично при сложении двух параллельных векторов угловых скоростей, равных по величине и противоположно направленных между собой, называемых **парой вращений**, результирующая угловая скорость обращается в ноль. В результате получается поступательное движение, скорость которого определяется величиной **момента пары вращений**:

$$\vec{v} = m(\vec{\omega}, -\vec{\omega})$$

$$v = \omega \cdot d$$



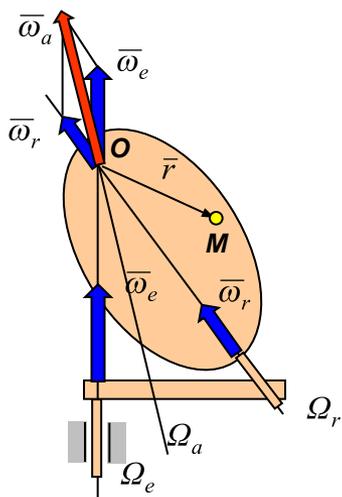
Таким образом, **два вращения с угловыми скоростями, равными по величине и противоположными по направлению, могут быть заменены одним поступательным движением.**

Точно также возможна и обратная процедура – представление поступательного движения в виде пары вращений.

**Вектор скорости поступательного движения твердого тела является свободным вектором** (может перемещаться параллельно самому себе) в то время как **векторы угловой скорости являются скользящими векторами**, которые могут перемещаться только по линии действия.

### Сложение вращательных движений твердого тела

**в случае пересечения осей вращений** – тело вращается с угловой скоростью  $\omega_r$  относительно своей оси, проходящей через точку пересечения с другой осью вращения  $O$ . Относительно второй оси первая ось вращается с угловой скоростью  $\omega_e$ :



Поскольку точка пересечения осей вращения имеет нулевую скорость, то принимая ее за неподвижную точку в пространстве, вычислим скорость произвольной точки  $M$  по теореме о сложении скоростей:

$$\vec{v}_M^a = \vec{v}_M^r + \vec{v}_M^e = (\vec{\omega}_r \times \vec{r}) + (\vec{\omega}_e \times \vec{r}) = (\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e) \times \vec{r}.$$

Векторная сумма угловых скоростей, полученная в скобках, представляет собой результирующую угловую скорость, определяющую единственное вращение тела вокруг некоторой мгновенной оси (см. сферическое движение), которая может рассматриваться как абсолютная угловая скорость:  $\vec{v}_M^a = (\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e) \times \vec{r} = \vec{\omega}_a \times \vec{r}$ .

Таким образом, **абсолютная угловая скорость равна геометрической сумме относительной и переносной угловых скоростей**:

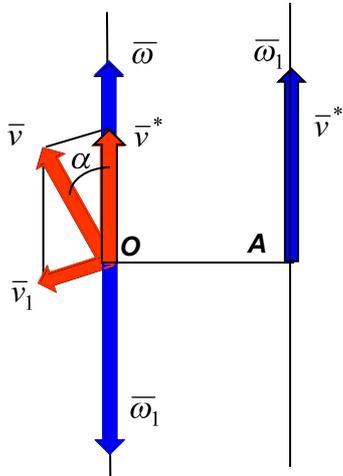
$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r.$$

При сложении вращательных движений более двух результирующий вектор угловой скорости равен геометрической сумме векторов всех угловых скоростей, участвующих в сложном движении:

$$\vec{\omega} = \sum \vec{\omega}_i.$$

# Лекция 6 (продолжение 6.3)

■ **Сложение поступательного и вращательного движения твердого тела** – пусть тело участвует во вращательном движении с угловой скоростью  $\omega$  и поступательном движении со скоростью  $v$ . Угол  $\alpha$  между векторами угловой скорости и поступательной скорости произвольный.



Разложим вектор скорости поступательного движения на два взаимно перпендикулярных вектора так, чтобы один совпал с вектором угловой скорости:

$$\vec{v} = \vec{v}^* + \vec{v}_1. \quad v^* = v \cos \alpha; \quad v_1 = v \sin \alpha.$$

Вектор скорости  $v_1$  представим в виде пары вращений с угловыми скоростями, равными заданной угловой скорости вращательного движения:

$$\vec{v}_1 = m(\vec{\omega}_1, -\vec{\omega}_1), \quad \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}.$$

Расстояние  $OA$  находится из равенства скорости моменту пары вращений:

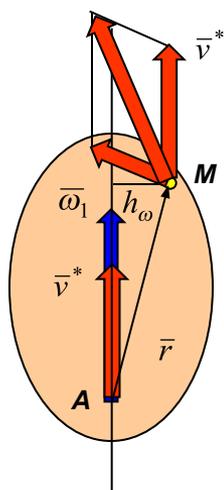
$$OA = \frac{v_1}{\omega} = \frac{v \sin \alpha}{\omega}.$$

Вектор оставшейся поступательной скорости  $v^*$ , как свободный вектор перенесем в точку  $A$ , а два вектора угловых скоростей, изображенные в точке  $O$ , можно удалить, поскольку они равны по величине, направлены по одной прямой в противоположные стороны:

$$\vec{\omega} + \vec{\omega}_1 = \vec{\omega} + (-\vec{\omega}) = 0$$

Таким образом, получили вращение с заданной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через точку  $A$ , и поступательное движение со скоростью  $v^*$ . Такая комбинация более не может быть упрощена и представляет собой **кинематический винт**, реализующий **винтовое движение** твердого тела. Ось, проходящая через точку  $A$ , вдоль которой направлен вектор угловой скорости, называется **мгновенной винтовой осью**.

■ **Скорость точки твердого тела при винтовом движении** – пусть тело участвует во вращательном движении с угловой скоростью  $\omega_1$ , которое примем за относительное движение, и поступательном движении со скоростью  $v^*$ , которое примем за переносное движение.



$$\vec{v}^r = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}, \quad \vec{v}^e = \vec{v}^*. \quad \text{Абсолютная скорость точки } M: \quad \vec{v}^a = \vec{v}^e + \vec{v}^r = \vec{v}^* + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}. \quad |\vec{v}^a| = \sqrt{(v^*)^2 + (\omega_1 h_\omega)^2}.$$

Точка  $M$  движется по спиральной траектории делая один оборот за время  $T$ :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1}.$$

За время  $T$  точка  $M$  перемещается по направлению переносной скорости на величину  $h$  (**шаг винта**):  $h = v^* T = v^* \frac{2\pi}{\omega_1}$ .

Отношение поступательной скорости с угловой скорости является характеристикой винтового движения и называется **параметром винта**:

$$p = \frac{v^*}{\omega_1}.$$

С использованием параметра винта **шаг винта**:

$$h = 2\pi \cdot p.$$

Модуль абсолютной скорости точки  $M$  с использованием параметра винта:  $|\vec{v}^a| = \sqrt{(\omega_1 p)^2 + (\omega_1 h_\omega)^2} = \omega_1 \sqrt{p^2 + h_\omega^2}$ .

В частном случае, при  $\alpha = 90^\circ$  (вектор поступательной скорости перпендикулярен вектору угловой скорости) движение приводится к одному вращению вокруг оси, проходящей через точку  $A$ :

$$v^* = v \cos \alpha = 0.$$

# Лекция 6 (продолжение 6.4)

**Общий случай сложного движения твердого тела** – пусть тело участвует в  $n$  вращательных движениях и  $m$  поступательных движениях.

Выберем полюс A и приложим в этой точке вектора угловых скоростей:

Получили совокупность пар вращений

$$\begin{matrix} (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_1''); \\ (\bar{\omega}_2, \bar{\omega}_2''); \\ \dots \\ (\bar{\omega}_n, \bar{\omega}_n'') \end{matrix}$$

и совокупность векторов угловых скоростей, пересекающихся в одной точке.

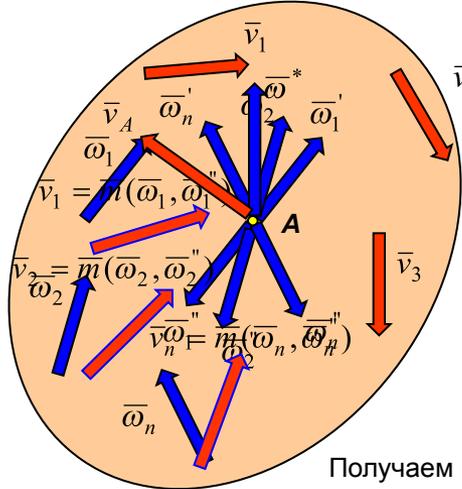
$$\begin{matrix} \bar{\omega}_1' = \bar{\omega}_1; & \bar{\omega}_1'' = -\bar{\omega}_1; \\ \bar{\omega}_2' = \bar{\omega}_2; & \bar{\omega}_2'' = -\bar{\omega}_2; \\ \dots & \dots \\ \bar{\omega}_n' = \bar{\omega}_n; & \bar{\omega}_n'' = -\bar{\omega}_n. \end{matrix}$$

Совокупность вращений можно заменить одним вращением:

$$\bar{\omega}^* = \sum_1^n \bar{\omega}_i' = \sum_1^n \bar{\omega}_i.$$

Всю совокупность поступательных движений можно заменить сложением одним поступательным движением:

$$\bar{v}_A = \sum_1^n \bar{v}_i + \sum_1^m \bar{v}_j = \sum_1^n \bar{v}_i + \sum_1^m m(\bar{\omega}_j, -\bar{\omega}_j'').$$



Каждую пару вращений можно заменить одним поступательным движением:

$$\bar{v}_j = m(\bar{\omega}_j, -\bar{\omega}_j'')$$

Получаем в общем случае одно вращение с угловой скоростью  $\omega^*$  вокруг оси, проходящей через полюс A, и поступательное движение со скоростью  $v_A$  (A – точка приведения), что приводит к кинематическому винту, рассмотренному выше.

Угловая скорость  $\omega^*$  не зависит от выбора полюса и это есть **первый (векторный) инвариант**:

$$\bar{\omega}^* = \sum_1^n \bar{\omega}_i = \bar{J}_1.$$

Итак, **угловые скорости** в кинематике складываются так же, как силы в статике (эти векторы являются **скользящими** векторами). **Поступательные скорости** в кинематике складываются так же, как моменты пар в статике (эти векторы являются **свободными** векторами).

**Все способы преобразования сил и пар сил в статике подобны преобразованиям скоростей твердого тела в кинематике.** И в статике, и в кинематике при приведении системы в общем случае получается статический винт (динама), и соответственно кинематический винт. Как в статике, так и в кинематике существуют соответствующие инвариантные величины (помечены звездочками) и их производные (главный минимальный момент и минимальная поступательная скорость).

точек приведения, и вектора угловой скорости равны:

$$\bar{v}_M \cdot \bar{\omega} = \bar{v}_A \cdot \bar{\omega} = J_2 \quad \text{- второй (скалярный) инвариант.}$$

Раскрывая скалярные произведения получаем:  $v_M \cdot \omega \cdot \cos(\bar{v}_M, \bar{\omega}) = v_A \cdot \omega \cdot \cos(\bar{v}_A, \bar{\omega})$ ,

откуда:

$$v_M \cos(\bar{v}_M, \bar{\omega}) = v_A \cos(\bar{v}_A, \bar{\omega}) = v^* \quad \text{- минимальная поступательная скорость.}$$