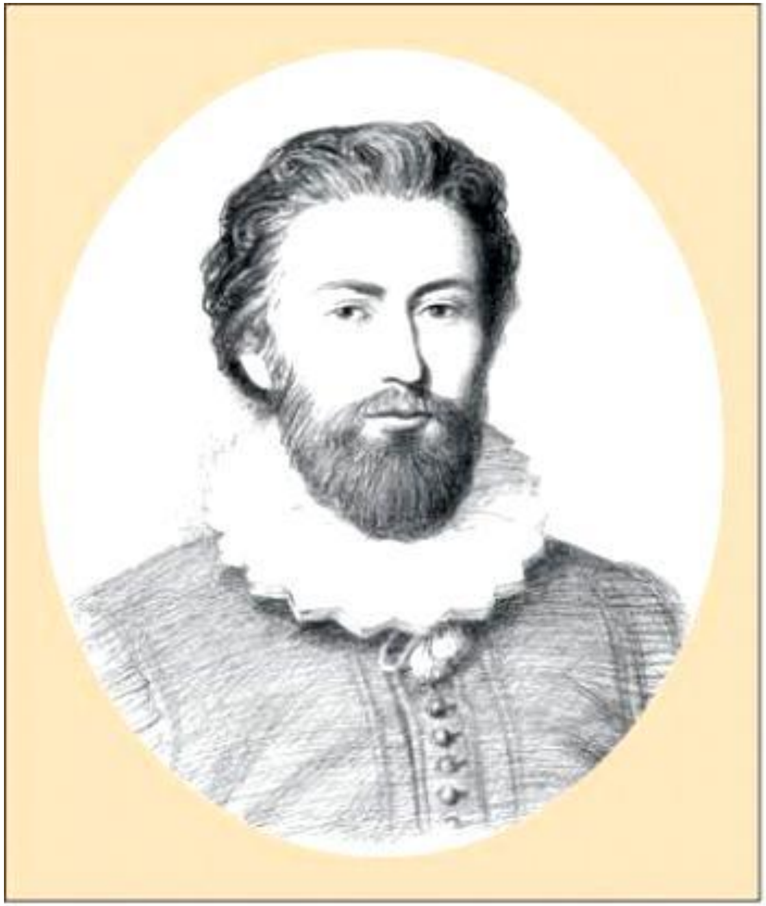
По праву достойна в стихах быть воспета
О свойствах корней теорема Виета.
Что лучше, скажи, постоянства такого:
Умножишь ты корни – и дробь уж готова?
В числителе **с**, в знаменателе **а**.
А сумма корней тоже дроби равна.
Хоть с минусом дробь, что за беда!
В числителе **в**, в знаменателе **а**.



Франсуа ВИЕТ
(1540–1603)

Теорема Виета.

$$ax^2+вx+c=0,$$

$$Д \geq 0$$

$$x_1+x_2=-\frac{в}{a}$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Не решая уравнение x^2-3x-10=0, вычислите сумму кубов его корней.

Решение:

Пусть x_1;x_2 – корни данного уравнения. Выполним преобразования суммы кубов и подставим соответствующие значения суммы и произведения с использованием теоремы Виета.

Ответ: 117

Корни уравнения x^2-bx-в=0 таковы, что $x_1^3+x_2^3+x_1^3x_2^3=75$. Найдите **b.**

Решение

По теореме Виета сумма корней равна в, произведение равно –b, По условию

$x_1^3+x_2^3+x_1^3x_2^3=$

$=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)+x_1^3x_2^3=75.$

Значит **b=±5**.

Пусть x_1; x_2 – корни данного уравнения $3x^2+14x-14=0$. Сравните с 1 значение дроби

$$\frac{3x_1^2+5x_1x_2+3x_2^2}{4x_1x_2^2+4x_1^2x_2}$$

Решение:

Данное выражение легко привести к виду

$(3(x_1+x_2)^2 - x_1x_2) / 4\, x_1x_2(x_1+x_2)$

$=(3(-14/3)^2 – (14/3)) / 4(-14/3)^2=$

$14/3(14-1) / 4$ $\frac{13\cdot 3}{14\cdot 4} < 1$ $^2 =$

При каком значении параметра а корни x_1 и x_2 уравнения $x^2+3x+a=0$ удовлетворяют равенству $x_1/x_1 + x_2/x_1 + a > 0$?

Решение:

Если уравнение имеет корни, то значит

$9-4a > 0$, отсюда $a \le 9/4$. Из данного в условии соотношения для корней имеем:

$(x_1^2+x_2^2+ax_1x_2)/x_1x_2=((x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2+a x_1x_2)/x_1x_2=(9-2a+a^2)/a$

Неравенство $9-2a+a^2>0$ верно при любом a, значит $0<a \le \frac{9}{4}$

Вычислите без помощи таблиц $lg2$ и $lg5$, зная, что $lg2 \cdot lg5 = 0,2104$

Решение:

По свойству логарифмов $lg10 = lg2 + lg5 = 1$? *По условию* $lg2 \cdot lg5 = 0,2104.$

Значит, если уравнение $x^2 - x + 0,2104 = 0$ *имеет корни* x_1 и $x_{2,}$ то $x_1 = lg2$, $x_2 = lg5$

Решая составленное уравнение, находим:

$x_1 = 0,6995$, $x_2 = 0,3050$

Чему равна сумма α и β, если tg α и tg β являются корнями уравнения $6x^2 - 5x+1=0$?

Решение:

Воспользуемся формулой тангенса суммы

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}=\frac{5/6}{1-1/6}=1$$

$$\alpha+\beta=45^0+180\cdot к,\ к\in Z$$

Сумма десяти первых членов арифметической прогрессии равна 140, а произведение второго и девятого членов равно 147. Найти прогрессию.

Решение:

Составим систему в соответствии с условием задачи

$$\begin{cases} (a_1 + a_{10}) \cdot 10 = 280 \\ a_2 \cdot a_9 = 147 \end{cases}$$

По свойству арифметической прогрессии $a_1 + a_{10} = a_2 + a_9$, тогда систему перепишем иначе

$$\begin{cases} a_2 + a_9 = 28 \\ a_2 \cdot a_9 = 147 \end{cases}$$

Теперь можно воспользоваться теоремой Виета и составит уравнение $x^2 - 28x + 147 = 0$, которое имеет два корня $x_1 = 21$, $x_2 = 7$

Если положить, что $a_2 = 7$, $a_9 = 21$, то получится возрастающая прогрессия 5;7;…, если же считать, что $a_2 = 21$, $a_9 = 7$, то придём к убывающей прогрессии 23;21;19;…

Длины катетов некоторого прямоугольного треугольника являются корнями уравнения x^2 - $x+1=0$. Не решая данного уравнения найдите радиус r окружности, вписанной в этот треугольник

Решение.

Пусть S –площадь данного треугольника, P – его периметр.

По условию $2S=x_1x_2$ $P= x_1+ x_2 +c$, где $c=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$,

тогда получим $P=3+\sqrt{9-2}=3+\sqrt{7}$,

Воспользуемся равенством $2S=Pr$,

$r=2S/P= x_1x_2(3+\sqrt{7})=1/(3+\sqrt{7})=(3-\sqrt{7})/2$

Решите систему $\begin{cases} 2^x+2^y=5 \\ 2^{x+y}=4 \end{cases}$

Решение:

Рассмотрим уравнение $z^2 - 5z+4=0$ Его корни $z_1=4$; $z_2=1$, получим решения (2;0), (0;2)

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x(x+1)(3x+5y)=144 \\ x^2+4x+5y=24 \end{cases}$$

Решение:

Данную систему приведем к виду

$$\begin{cases} (X^2+x)(3X+5У)=144 \\ (X^2+X)(3X+5У)=24 \end{cases}$$

Введём обозначения, получим уравнение t^2- 24t+144=0, которое имеет корень 12, исходная система имеет два решения (3;0,6); (-4;4.8)

Домашнее задание

Используя доп. литературу, Интернет составить коллекцию заданий, в которых применялась теорема Виета.