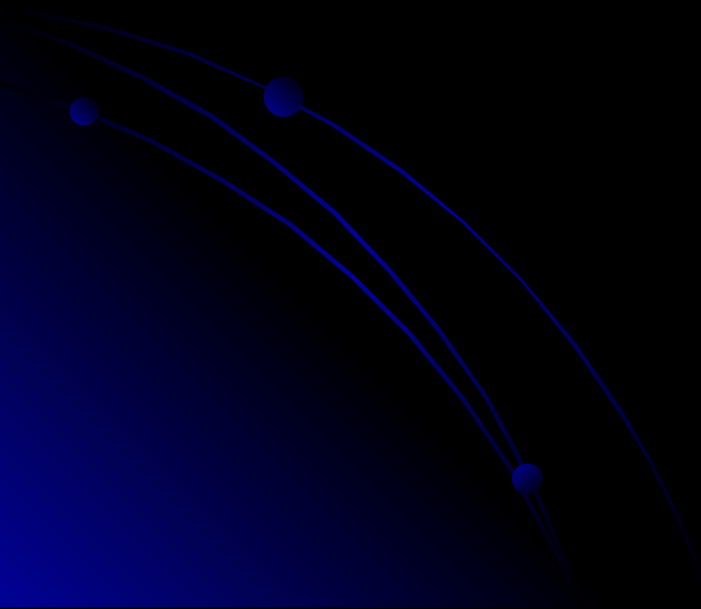


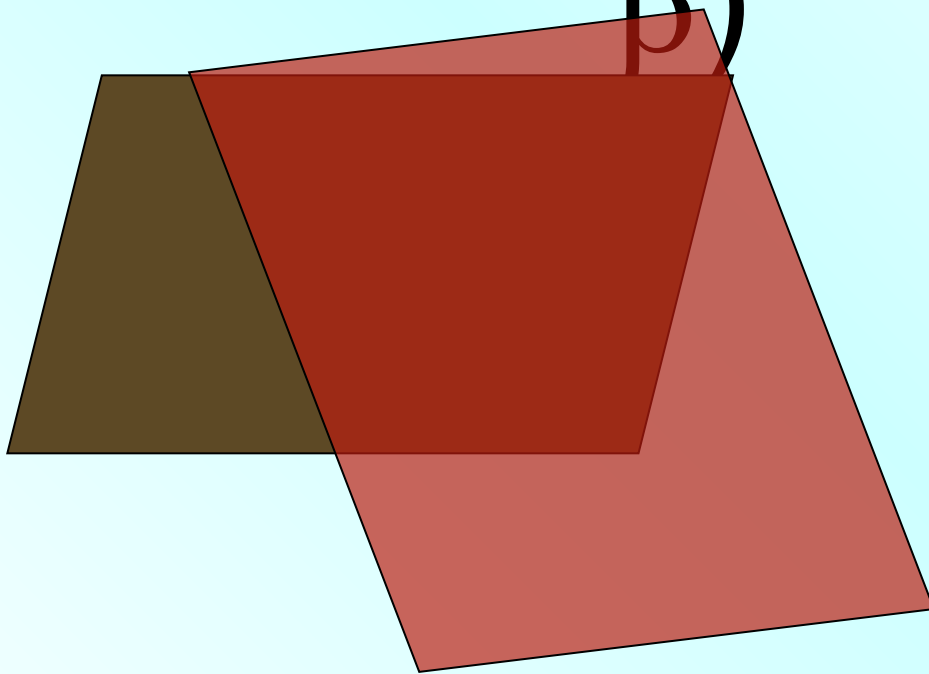
# СИСТЕМА ЗАДАЧ НА ТЕМУ ДВУГРАННИЙ И УГОЛ

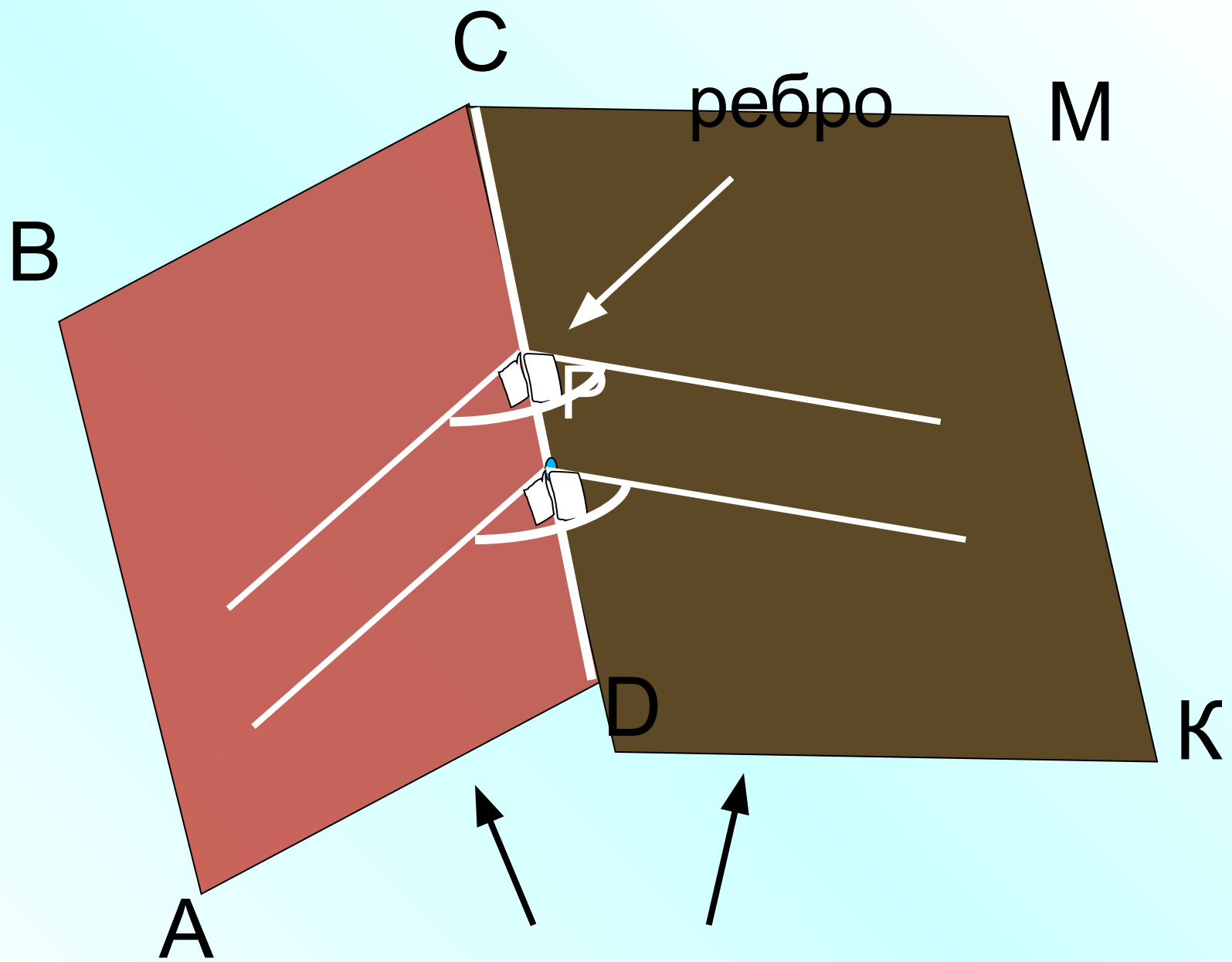


Угол между плоскостями:

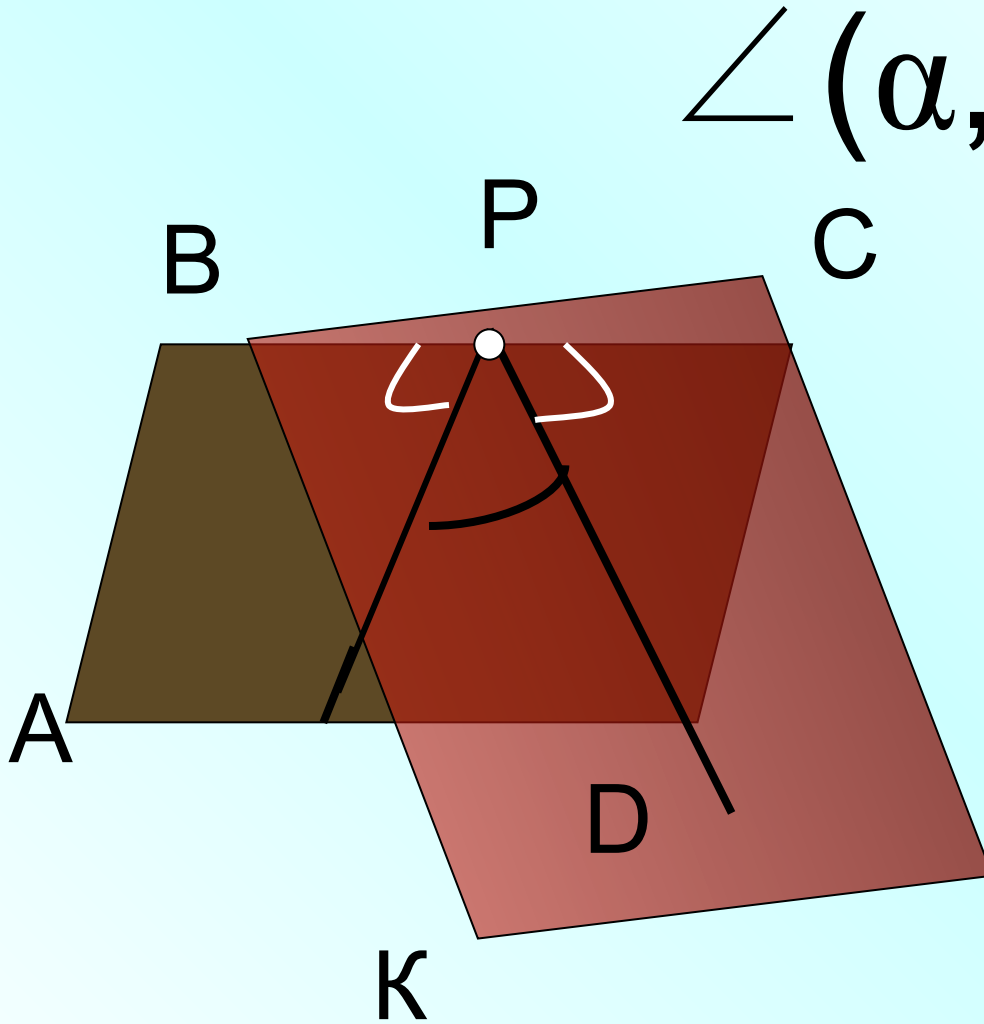
$\angle (\alpha,$

$\beta)$





грани



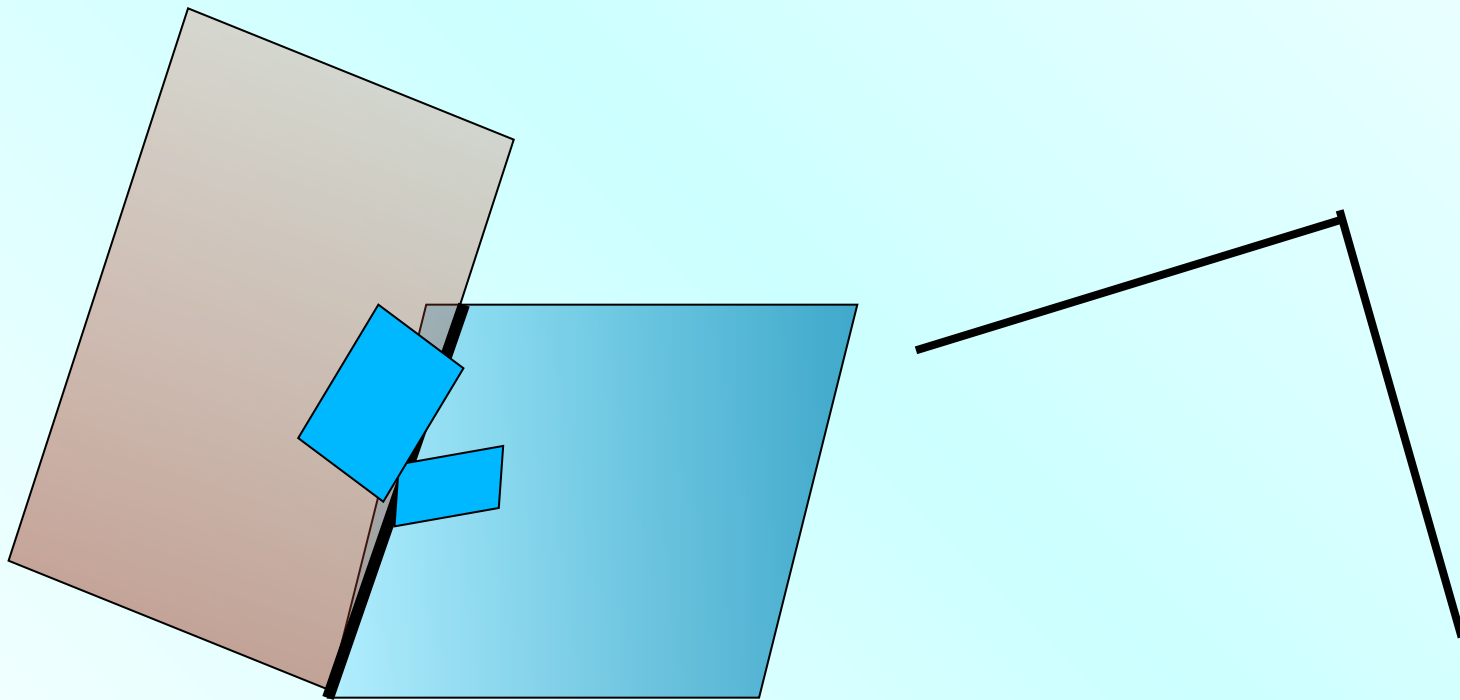
$$\angle(\alpha, \beta) =$$

$$\angle ABCM$$

=

$$\angle P$$

Задачи на доказательство того,  
что отмеченный на рисунке угол  
является линейным.



а)  $PAVC$  - пирамида;

$\angle ACB = 90^\circ$ ;

$(PB) \perp (ABC)$

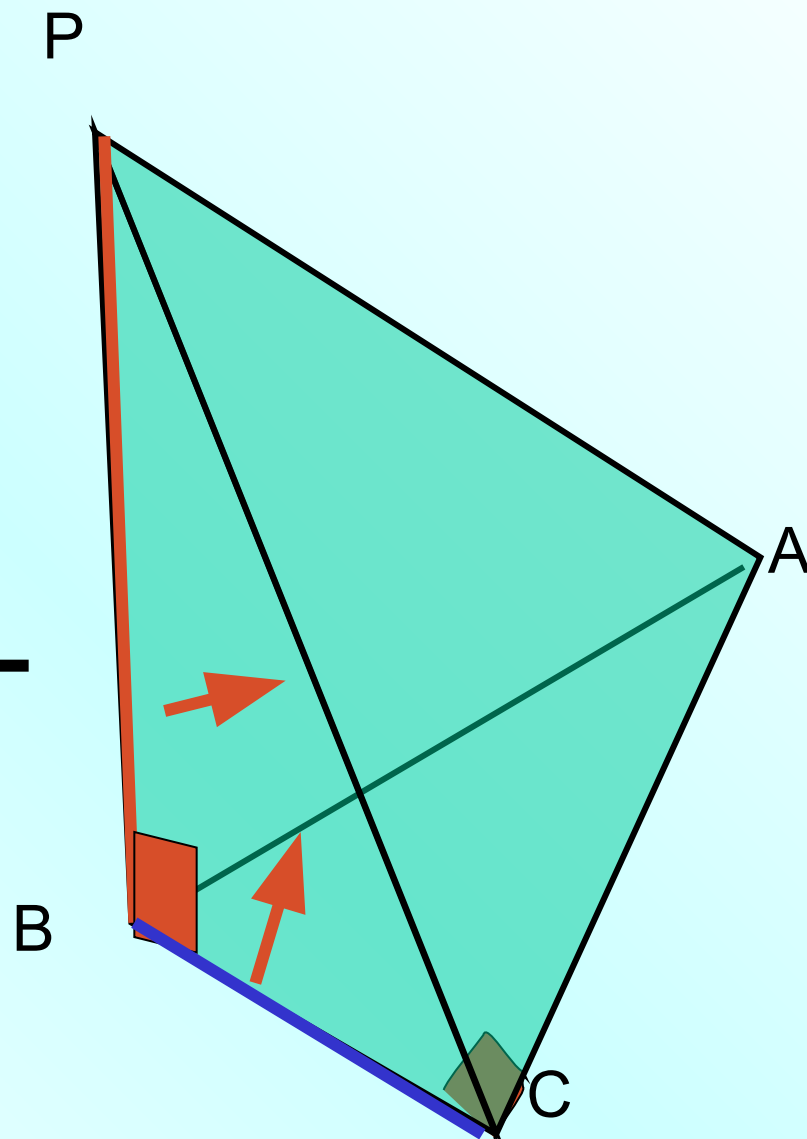
Доказать:

$\angle PCV$  - линейный  
угол двугранного  
угла с ребром  $AC$ .

---

$BC \perp AC$   
 $PB \perp (ABC)$  }  $PC \perp AC$

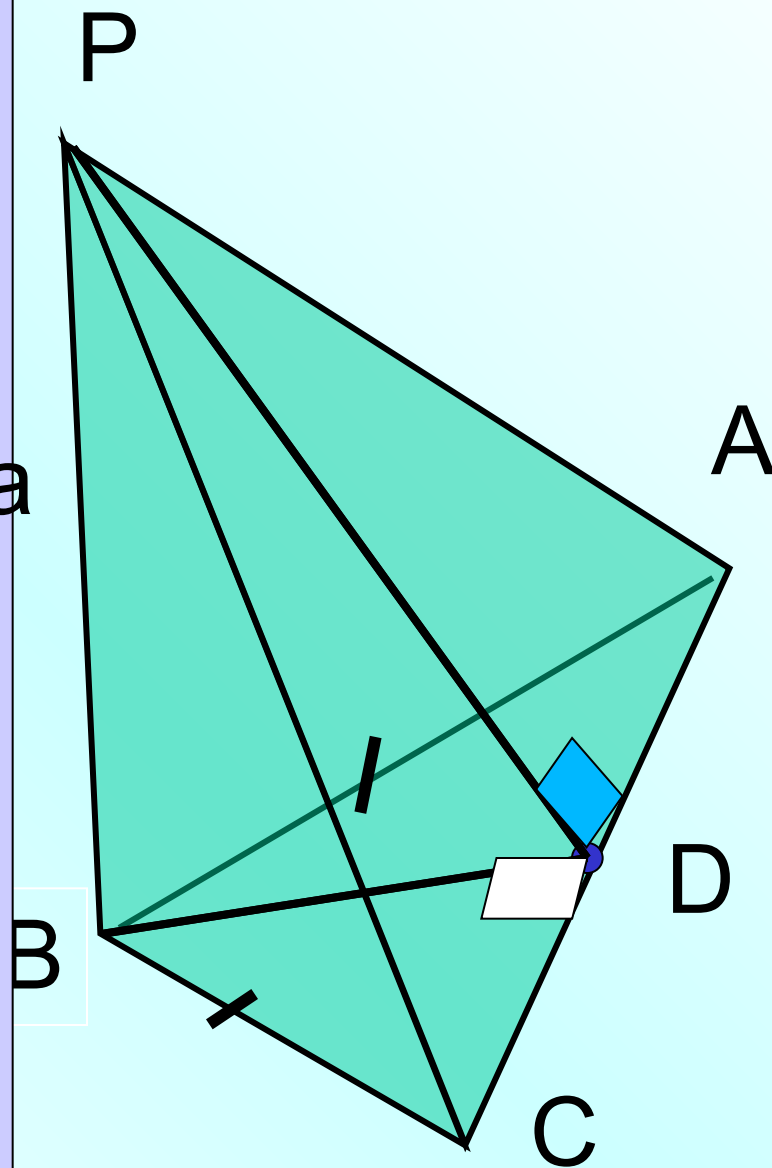
$\Rightarrow \angle PACV = \angle PCV$



$\triangle ABC$  – равнобедренный,  $D$  – середина  $AC$ , значит:  $BD \perp AC$ .

$BD \perp AC$   
 $PB \perp (ABC)$  }  $PD \perp AC$

$\Rightarrow \angle PACB = \angle PDB$



с)  $PABCD$  - пирамида;

$(PB) \perp (ABC)$ ;

$(BK) \perp (DC)$ ;

Доказать:

$\angle PKB$  - линейный  
угол двугранного  
угла с ребром  $CD$ .

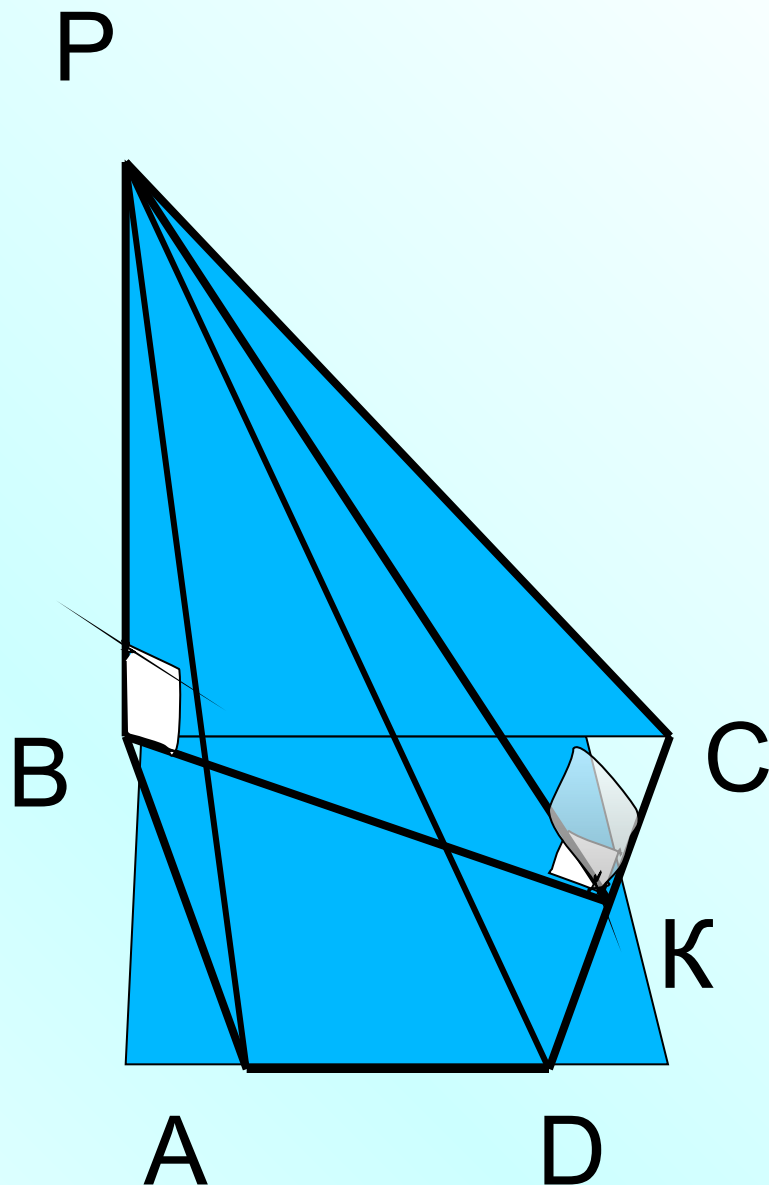
---

$BK \perp PC$

$PB \perp (ABC)$

}  $PK \perp DC$

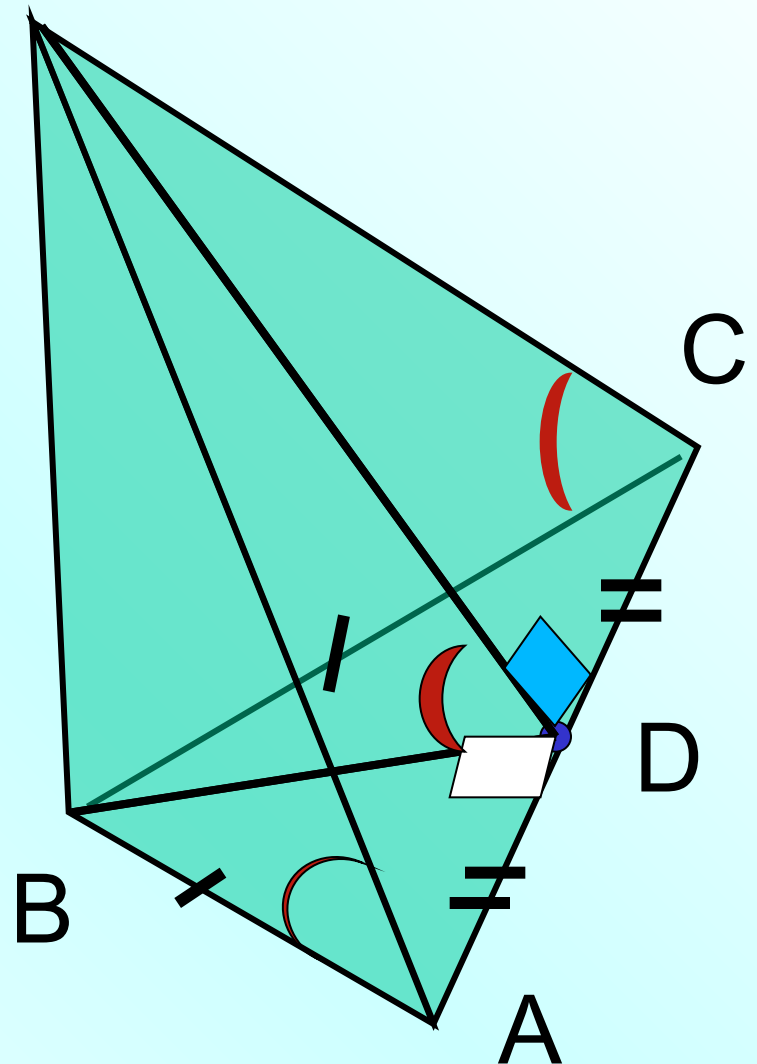
$\Rightarrow \angle PCDB = \angle PKB$



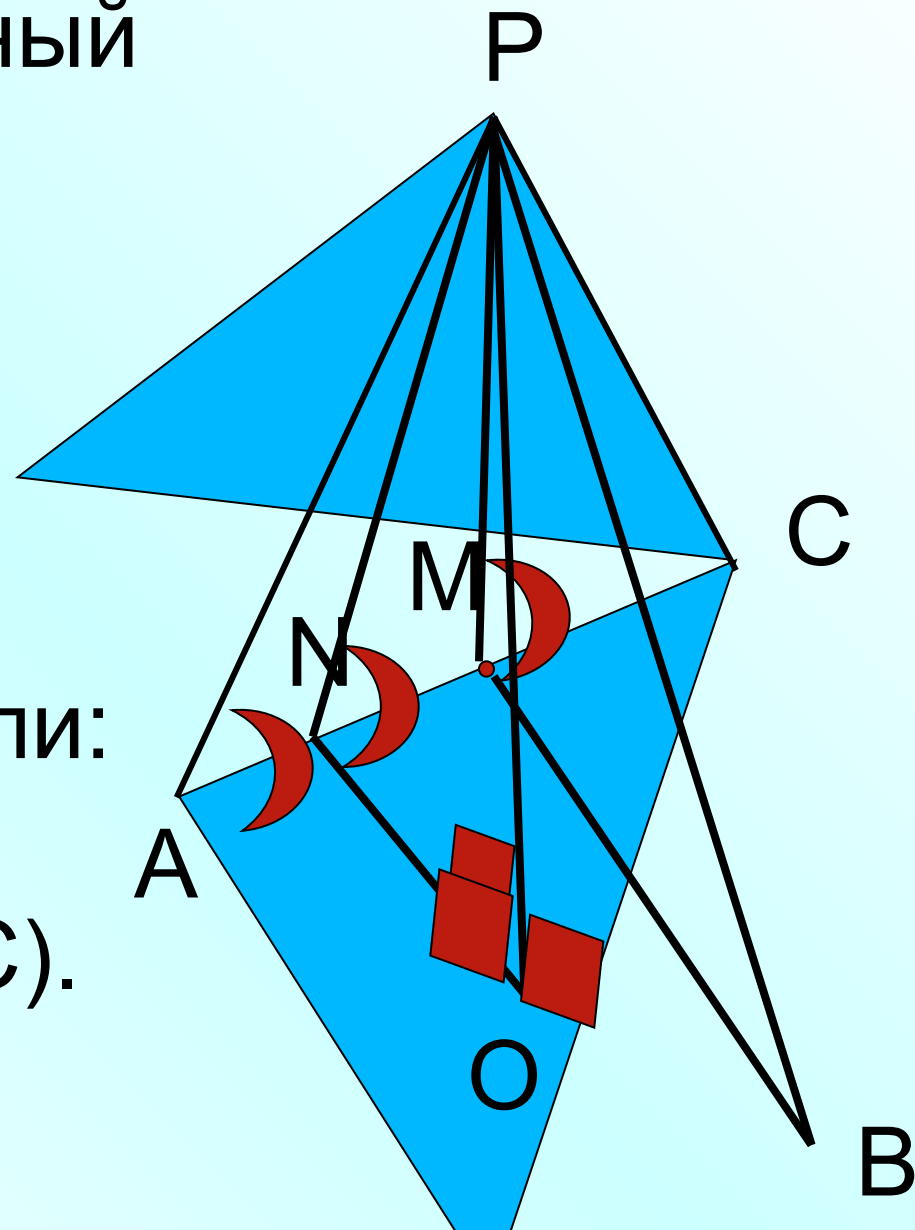


2. Задачи на выделение  
линейного угла  
среди нескольких обозначенных  
на рисунке углов.

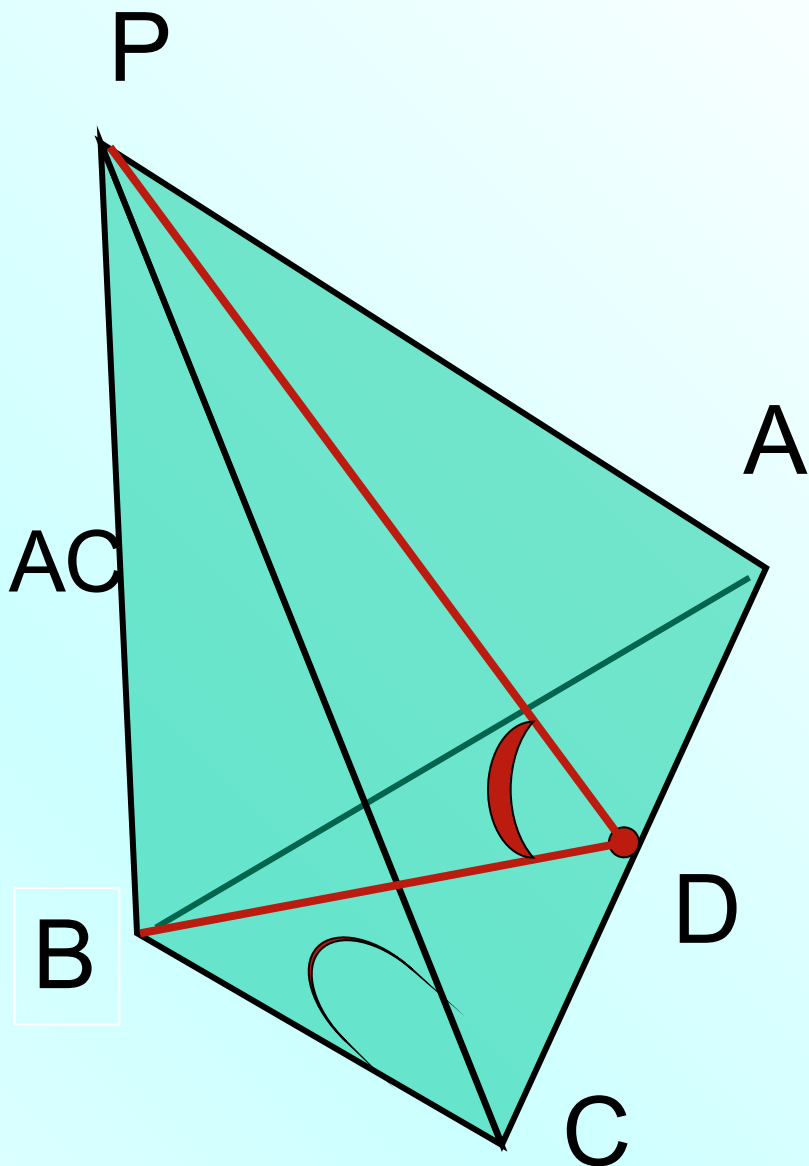
а)  $PABC$  - пирамида;  
основание - правильный  $\triangle ABC$   
треугольник;  
Какой из отмеченных  
углов является  
линейным  
углом двугранного  
угла с ребром  $AC$ , если:  
 $D$  – середина  $AC$ ,  
 $(PB) \perp (ABC)$ .



в)  $PAVC$  - пирамида;  
основание - правильный  
треугольник;  
Какой из отмеченных  
углов является  
линейным  
углом двугранного  
угла с ребром  $AC$ , если:  
 $M$  – середина  $AC$ ,  
 $ON \parallel VM$ ,  $(PO) \perp (ABC)$ .



с)  $PABC$  - пирамида;  
D- середина  $AC$ ;  
 $(PB) \perp (ABC)$ ;  
Каким должен быть  
треугольник  $ABC$ ,  
чтобы линейным углом  
двугранного угла с ребром  $AC$   
являлся угол  $PDB$ ?



3. Задачи на построение  
линейного угла для данного двугранного.



а) Построить линейный угол  
двугранного угла с ребром AC,  
если в пирамиде PABC:  
 $AB=BC$ ,  $(PB) \perp (ABC)$ ;

$\angle PACB$  -  
?

$$AB=BC \Rightarrow$$

$$BH \perp AC$$

$$PB \perp ABC$$

$$PH \perp AC$$

P

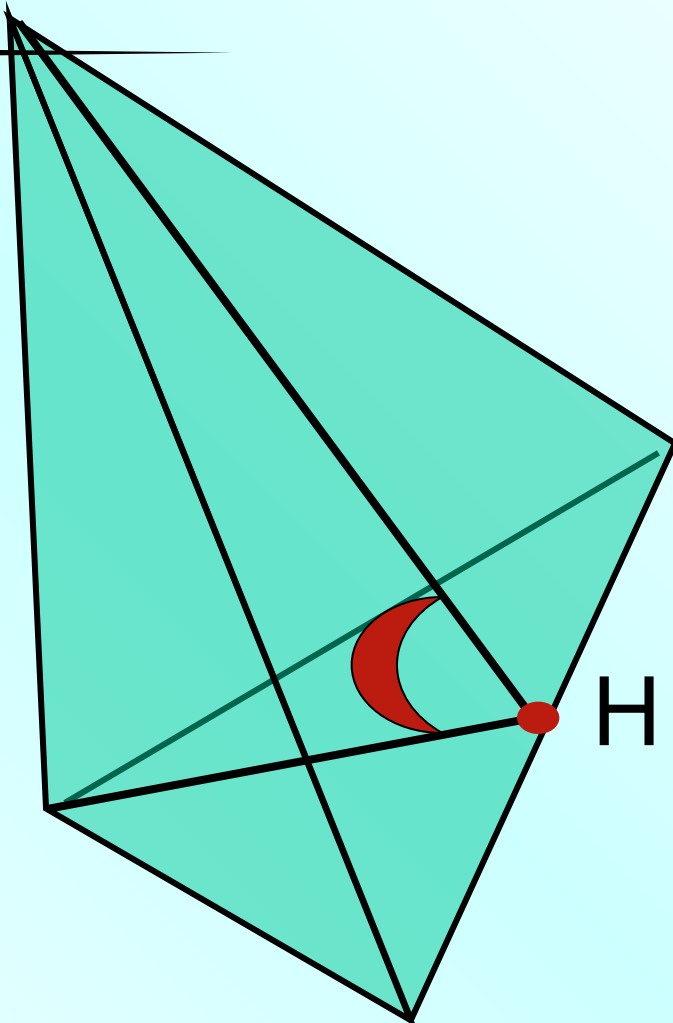
A

H

B

C

$$\angle PACB = \angle PHB$$



в) Построить линейный угол двугранного угла с ребром  $AC$ , если в пирамиде  $PABC$ :  
грань  $ABC$  – правильный треугольник,  
 $O$  – точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ ,  $(PO) \perp (ABC)$ ;

$\angle PACB$  -

?



ВК-медиана,

P

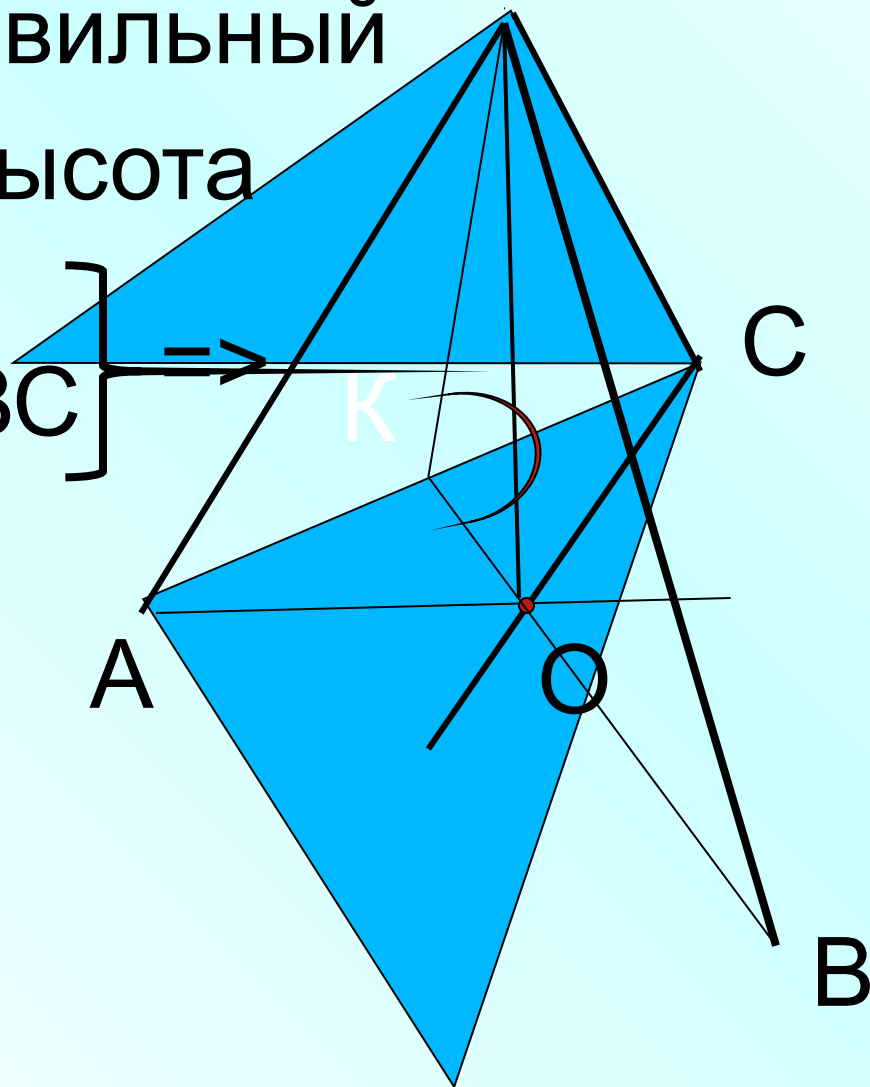
$\triangle ABC$ -правильный

$\Rightarrow$  ВК - высота

$BO \perp AC$

$PO \perp ABC$

$PK \perp AC$



$\angle PACB$

$= \angle PKB$

с) Построить линейный  
угол двугранного угла с  
ребром  $AC$ , если в  
пирамиде  $PABC$ :  
грань  $ABC$  –  
правильный треугольник,  
 $O$  – середина  $AB$ ,  
 $(PO) \perp (ABC)$ ;

$\angle PACO$  -  
?

$$AB=BC \Rightarrow BH \perp AC$$

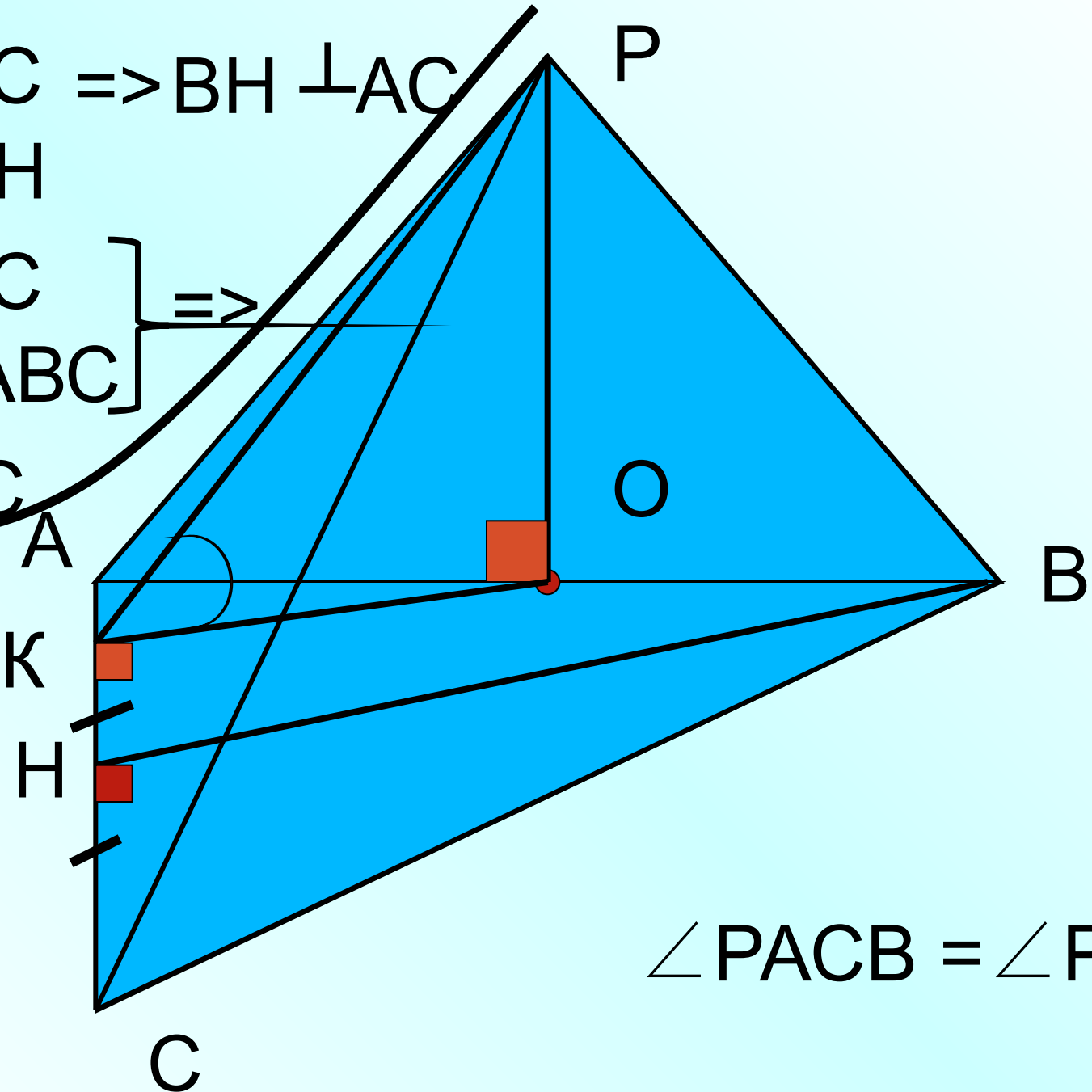
$$KO \parallel BH$$

$$KO \perp AC$$

$$PO \perp ABC$$

 $\Rightarrow$ 

$$KP \perp AC$$



$$\angle PACB = \angle PKO$$

D) Дан прямоугольник  $ABCD$   
и точка  $P$  вне его плоскости.  
Построить линейный угол  
двугранного угла с ребром  $DC$ , если:  
 $(PB) \perp (ABC)$ ;

$\angle BCDP$  -  
?

# ABCD-прямоугольник

$$BC \perp CD$$

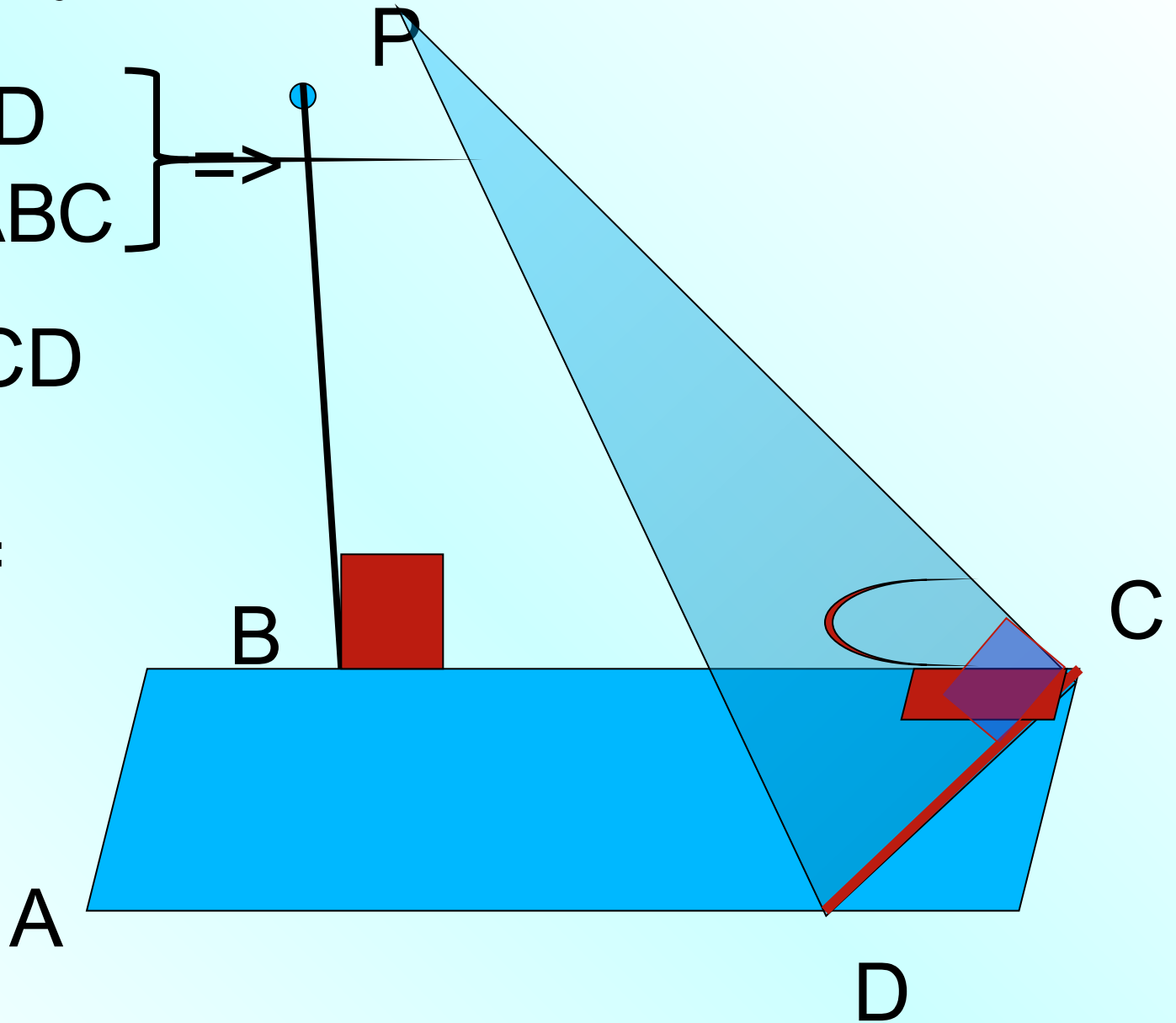
$$PB \perp ABC$$

$$PC \perp CD$$

Значит:

$$\angle BCDP =$$

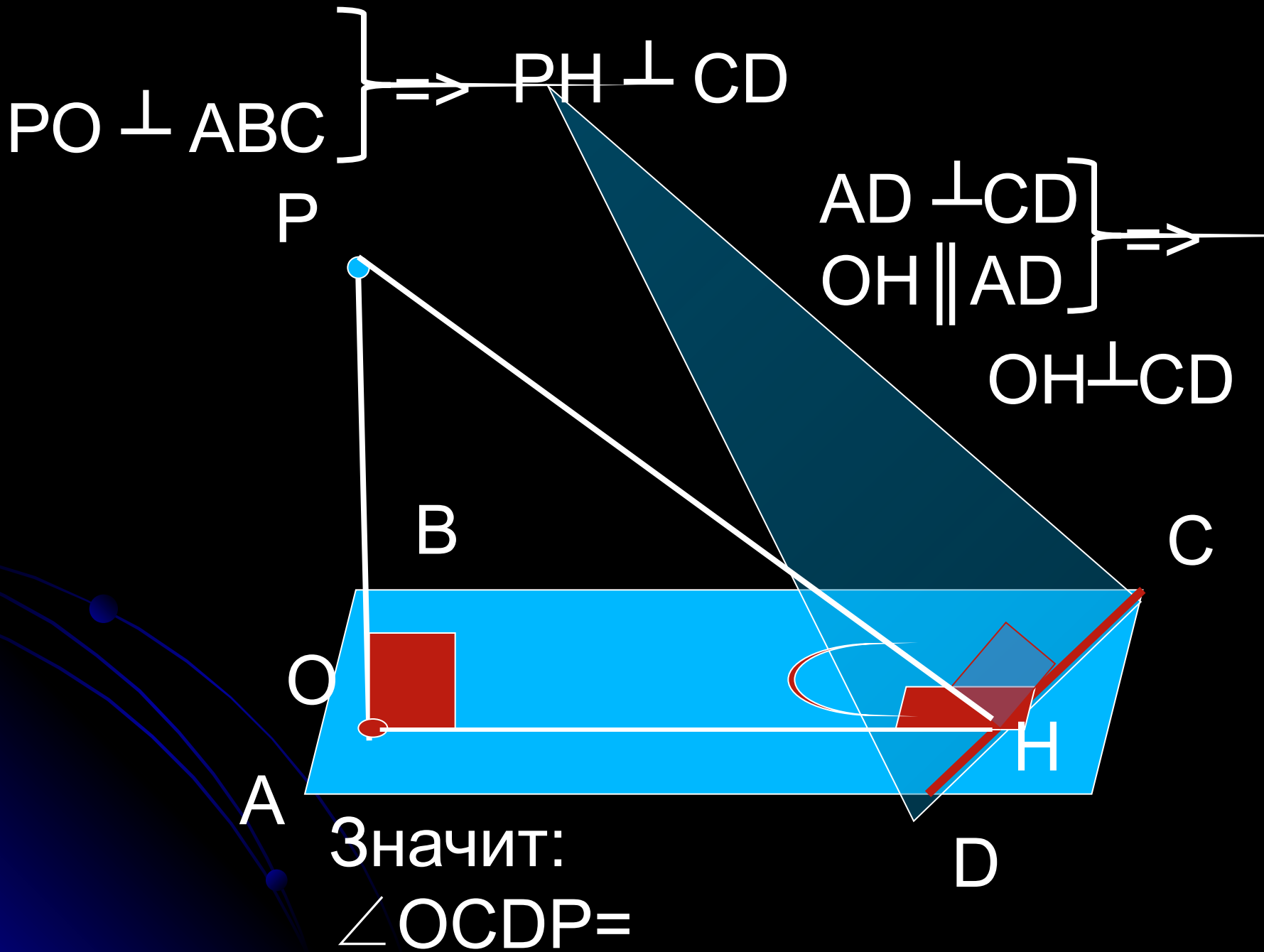
$$\angle BCP$$



е) Дан прямоугольник  $ABCD$   
и точка  $P$  вне его плоскости.  
Построить линейный угол  
двугранного угла с ребром  $DC$ , если:  
 $O \in AB$ ;  $(PO) \perp (ABC)$ .

$\angle OCDP - ?$





f) Дан прямоугольник  $ABCD$   
и точка  $P$  вне его плоскости.  
Построить линейный угол  
двугранного угла с ребром  $DC$ , если:  
 $O$  – точка пересечения  
диагоналей  $ABCD$ ,  
 $(PO) \perp (ABC)$ .

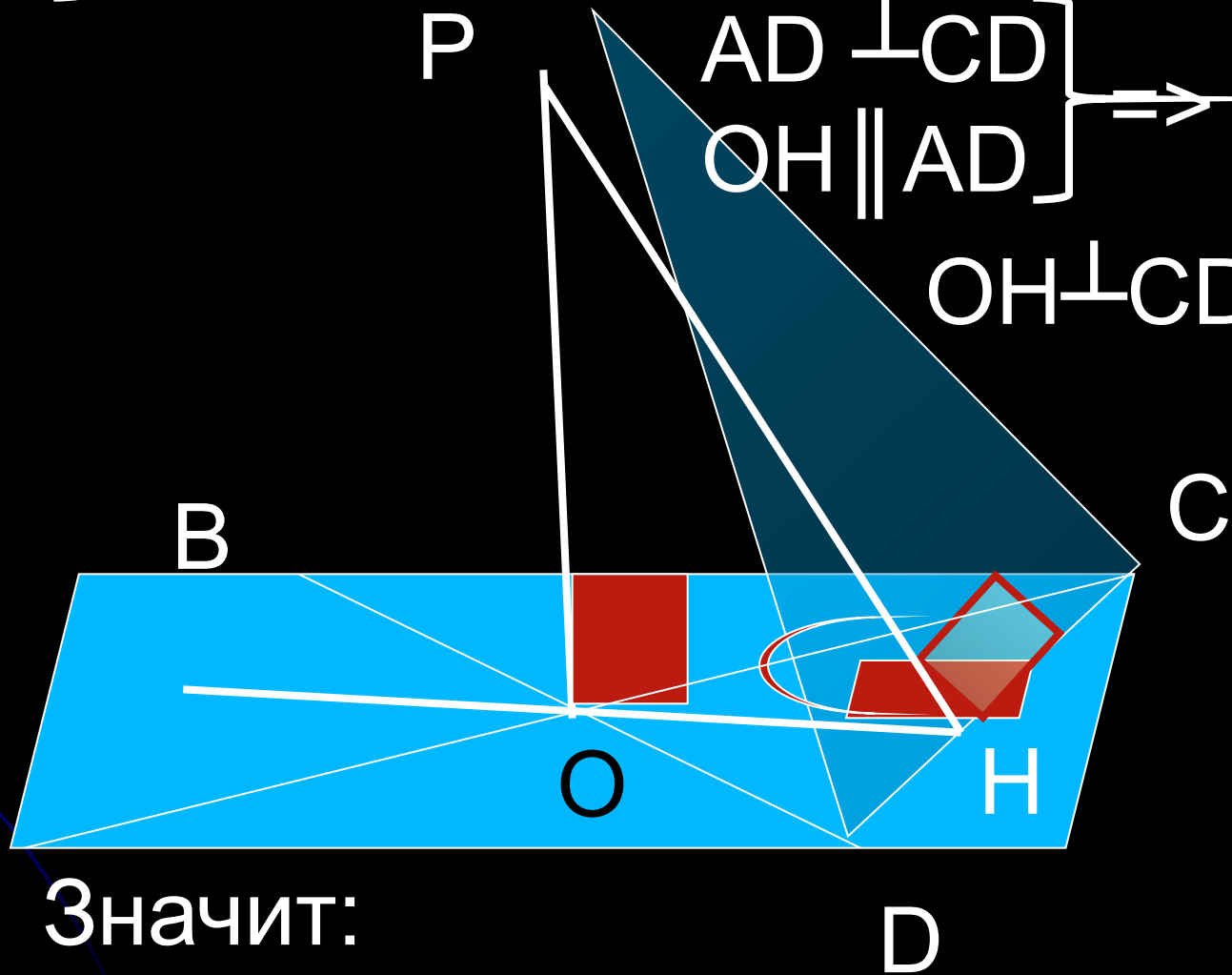


$\angle OCDP - ?$



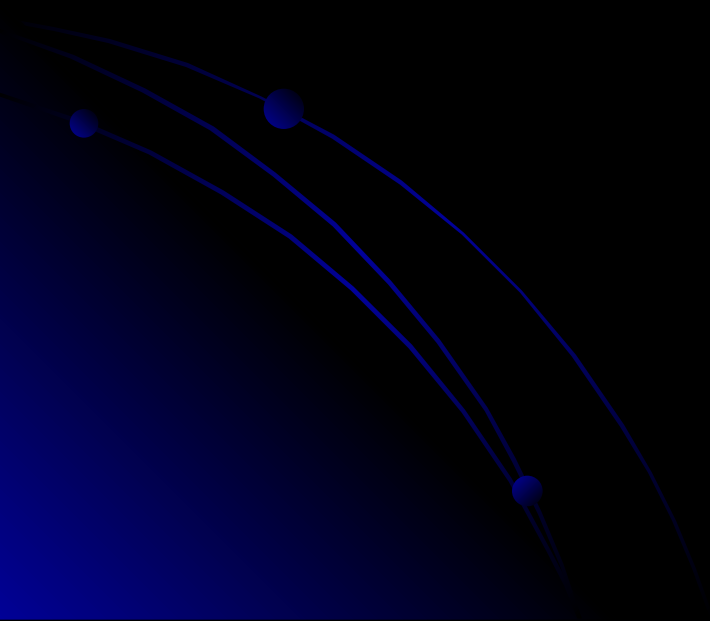
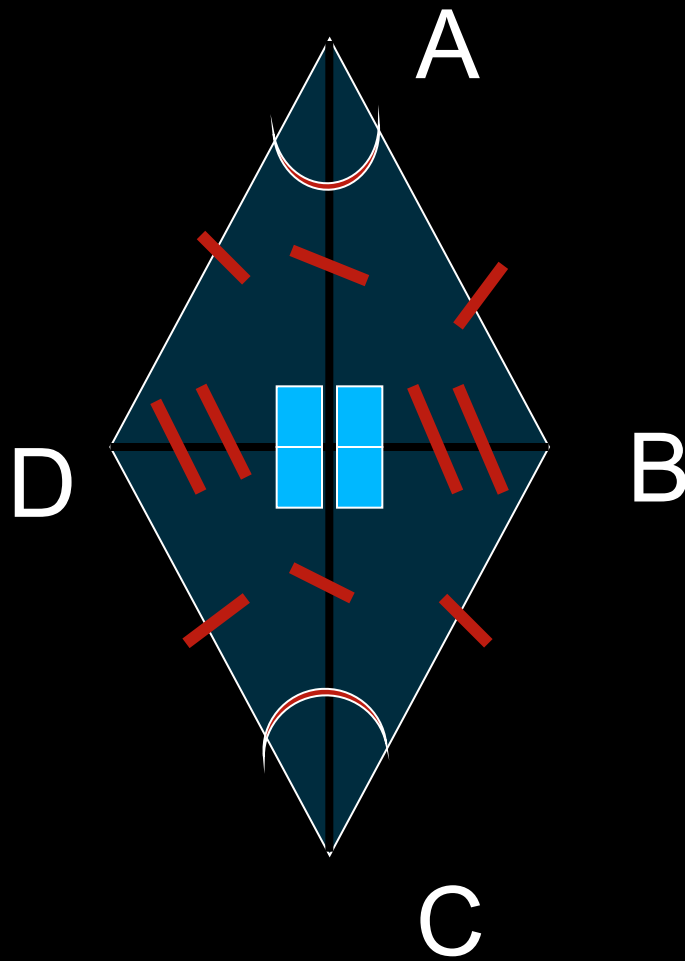
$$PO \perp ABC \Rightarrow PH \perp CD$$

$$\left. \begin{array}{l} AD \perp CD \\ OH \parallel AD \end{array} \right\} \Rightarrow OH \perp CD$$

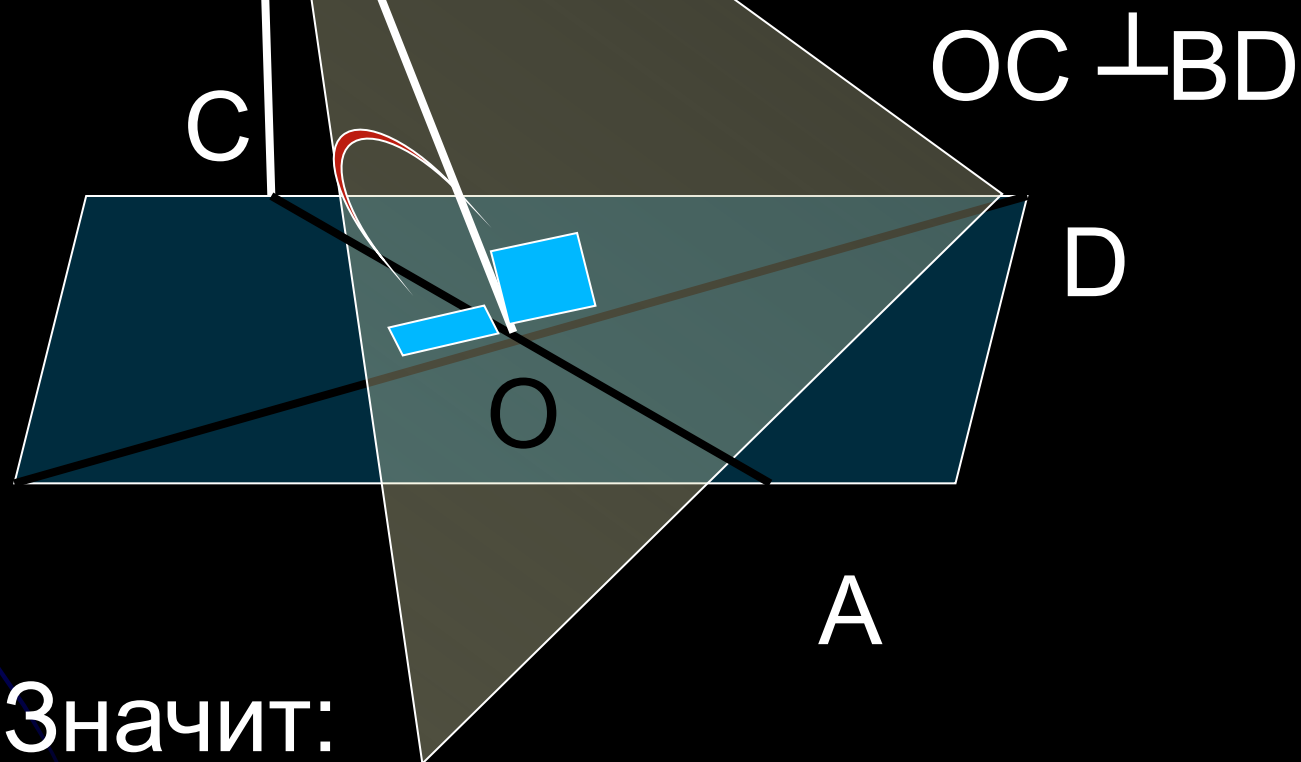


Значит:  
 $\angle OCP =$

г) Дан ромб  $ABCD$ ;  $(PC) \perp (ABC)$ .



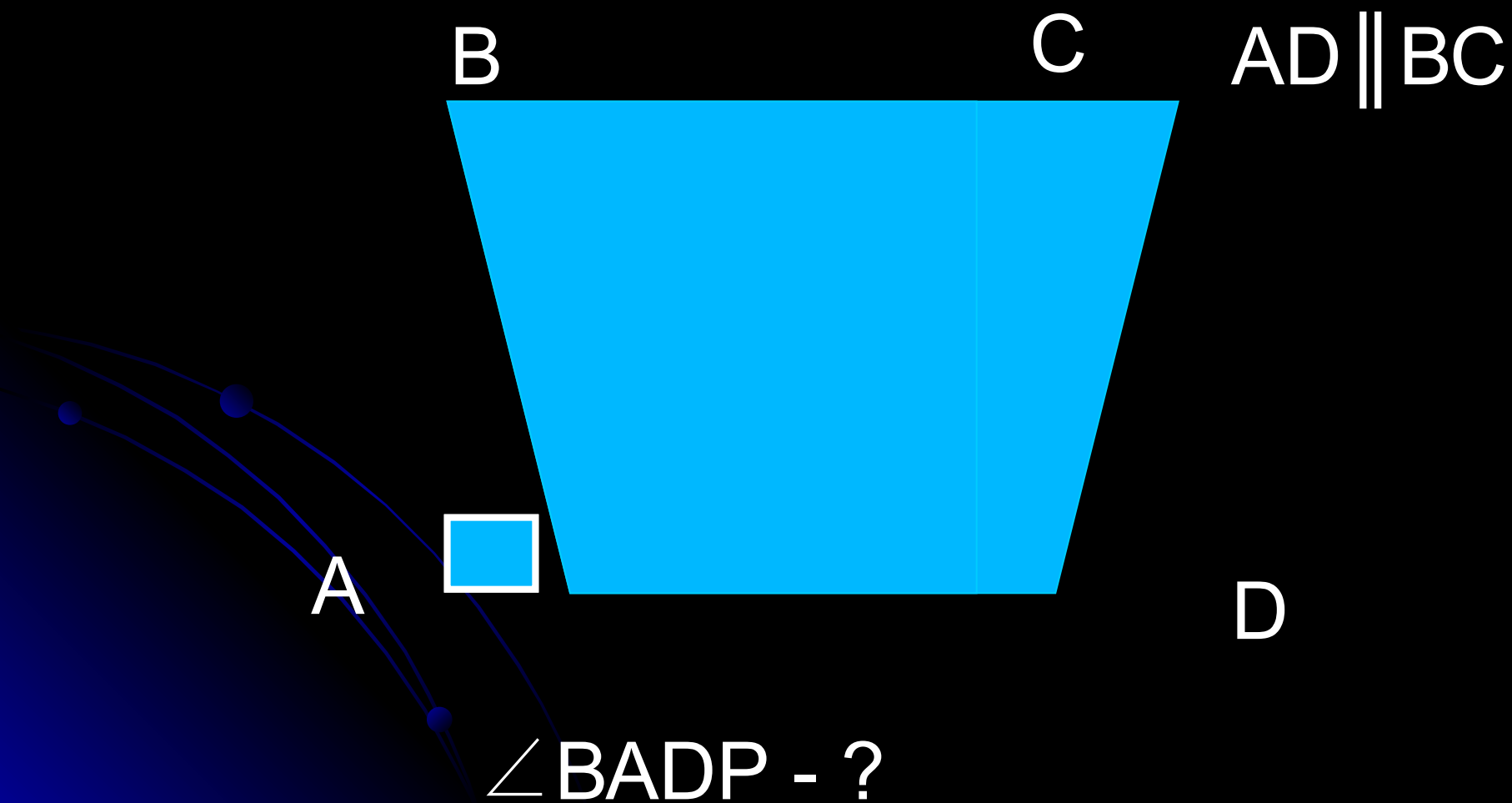
$PC \perp ABC$  }  $\Rightarrow$   $PO \perp BD$   $ABCD$ - ромб  
 $\Rightarrow CA \perp BD,$   
 $CA \cap BD = O \Rightarrow$



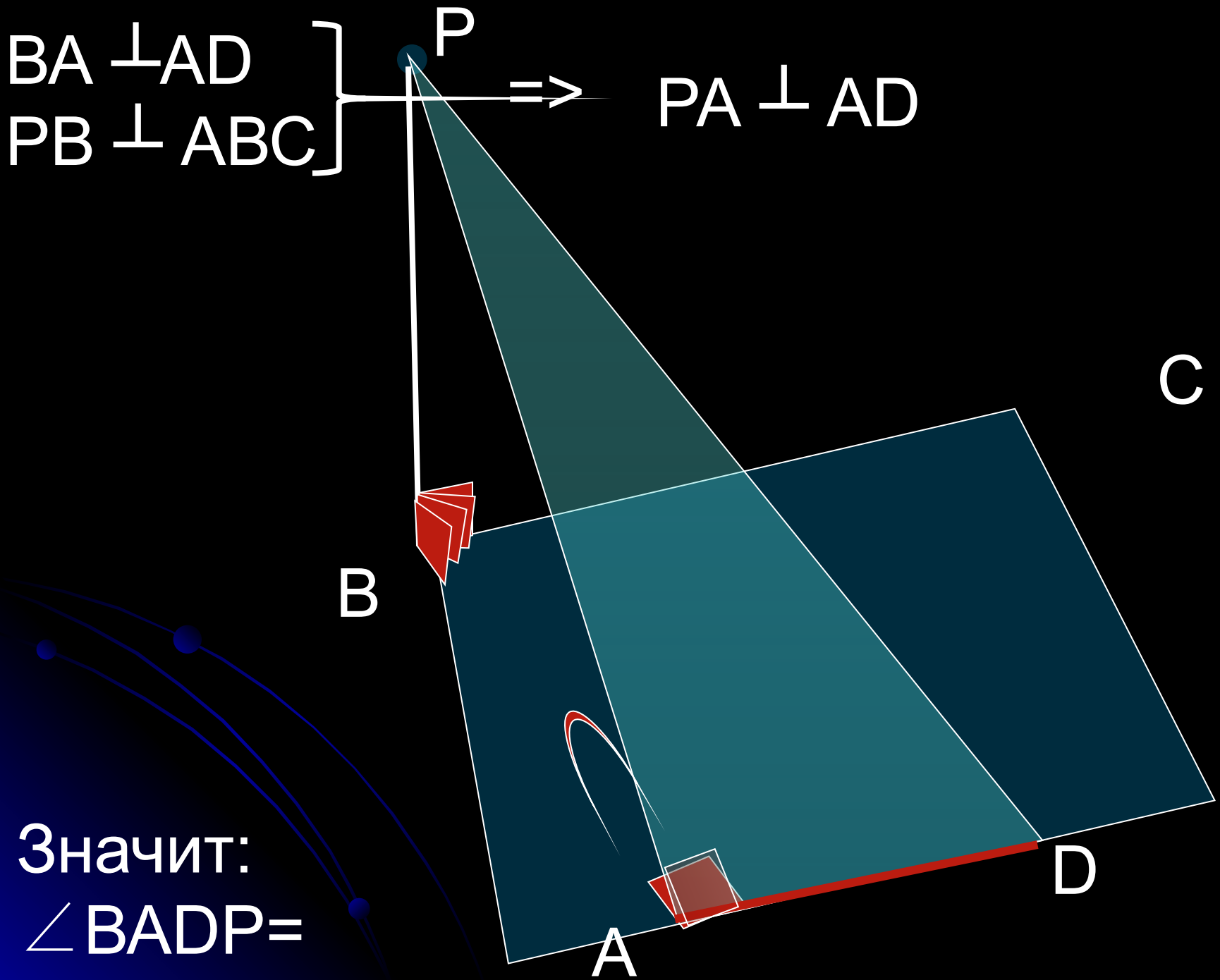
$OC \perp BD$

Значит:  
 $\angle PBD =$

i) Дана трапеция  $ABCD$ ;  $\angle \underline{BAD} = 90^\circ$ ;  
Построить линейный угол  
двугранного угла с ребром  $AD$ ,  
если:  $(PB) \perp (ABC)$ .



$BA \perp AD$   
 $PB \perp ABC$  }  $\Rightarrow PA \perp AD$



Значит:  
 $\angle BADP =$   
 $\angle BAD$

к) Дана трапеция ABCD;

$$\angle BAD = 90^\circ;$$

Построить линейный угол

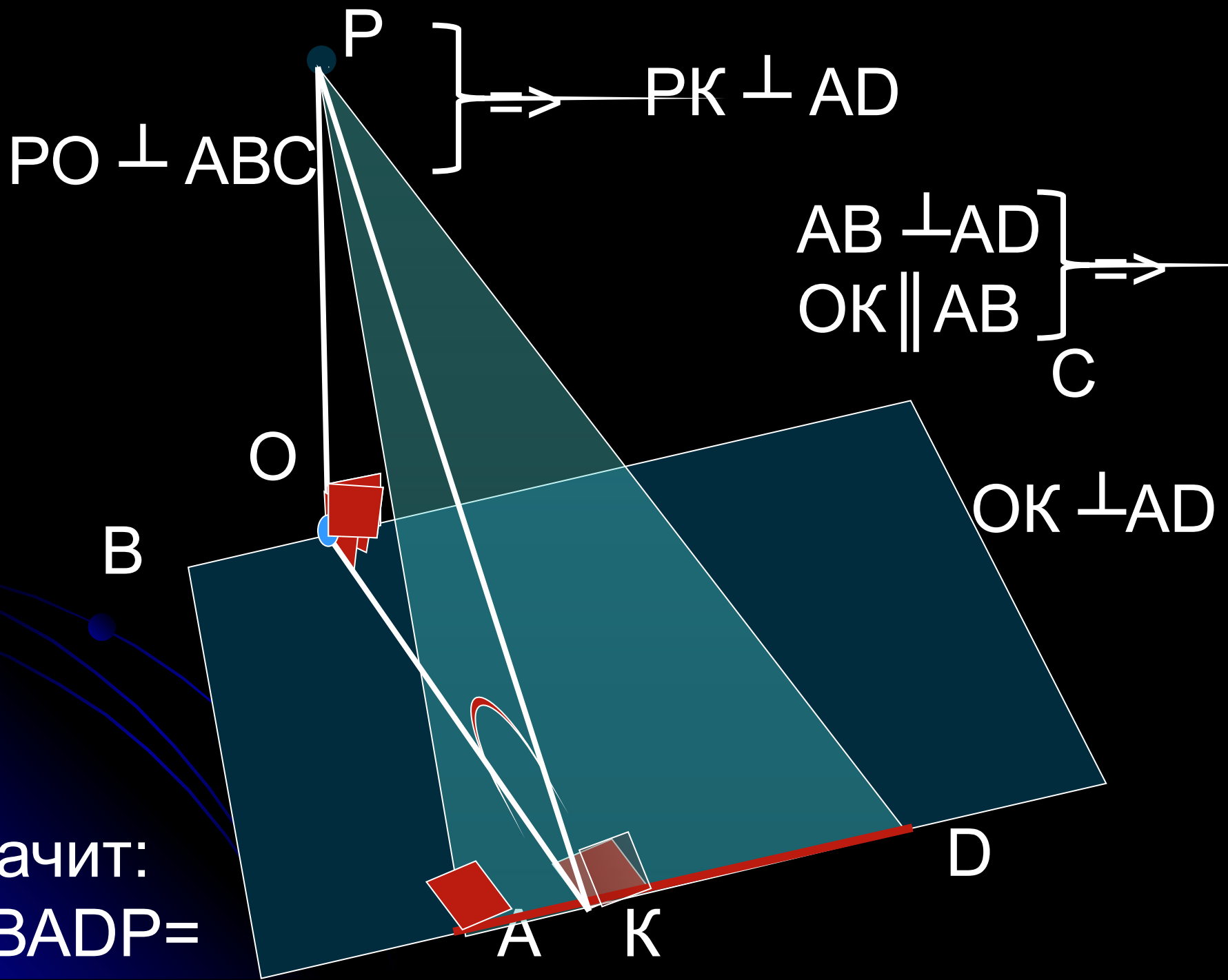
двугранного угла с

ребром AD, если:

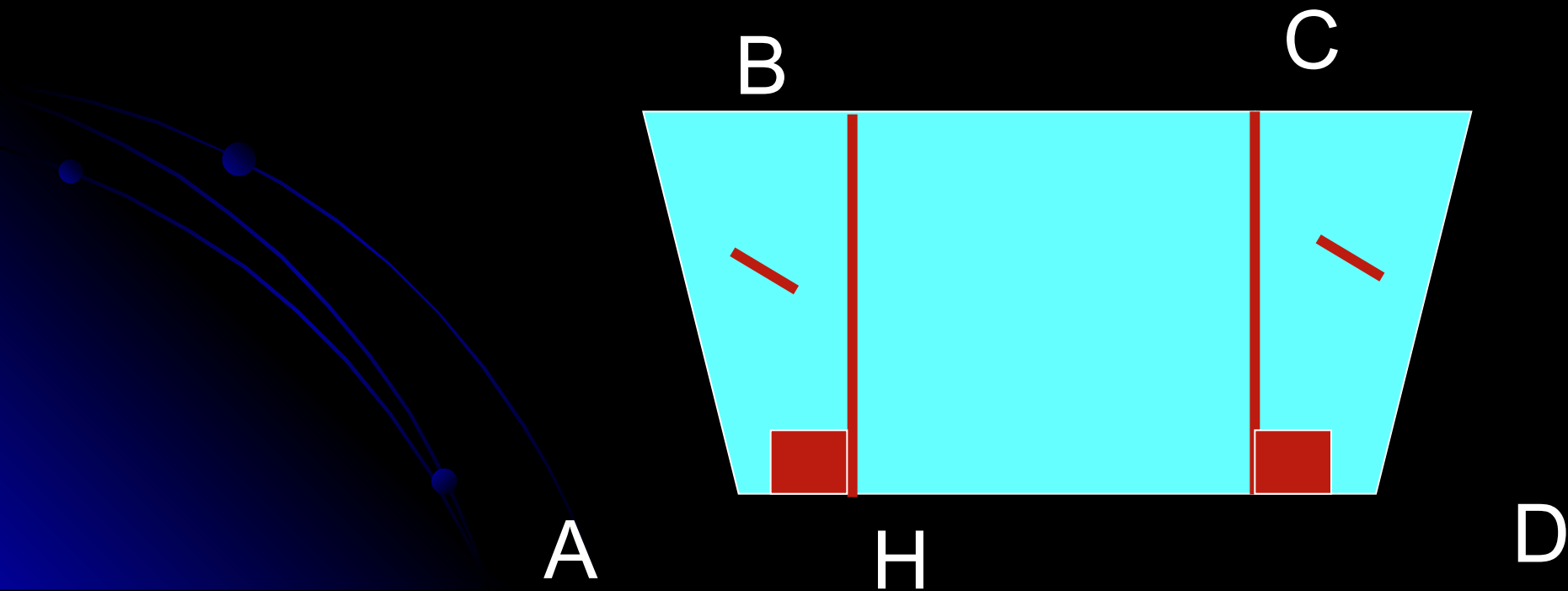
$$O \in BC; (PO) \perp (ABC).$$



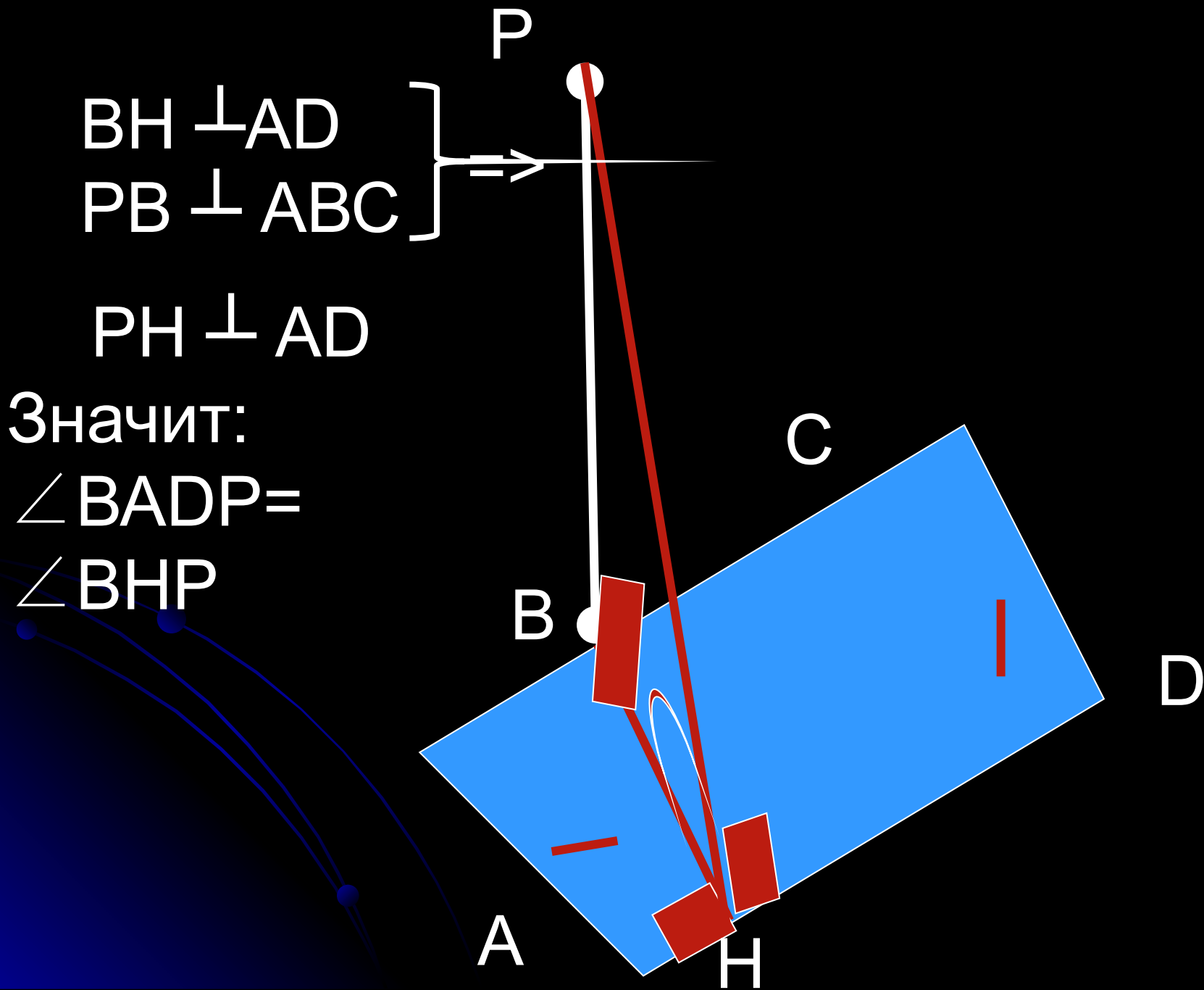
$\angle BAP - ?$



I) Дана трапеция ABCD.  
Построить линейный угол  
двугранного угла с ребром AD ,  
если:  $AB=CD$ ,  
 $(PB) \perp (ABC)$ .

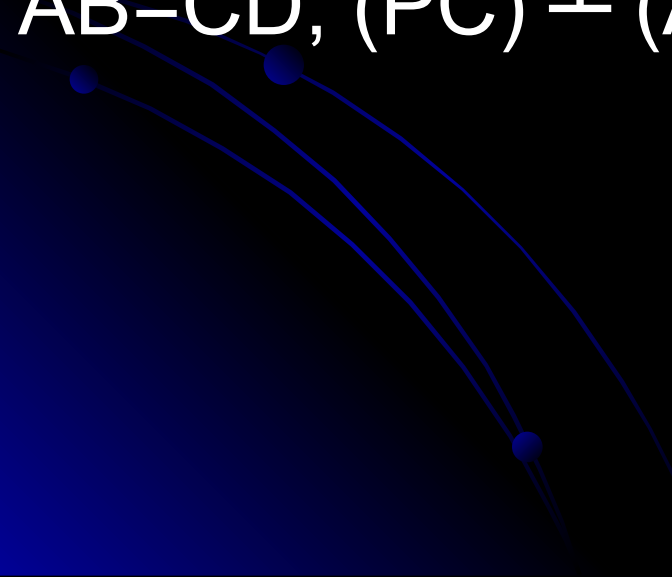


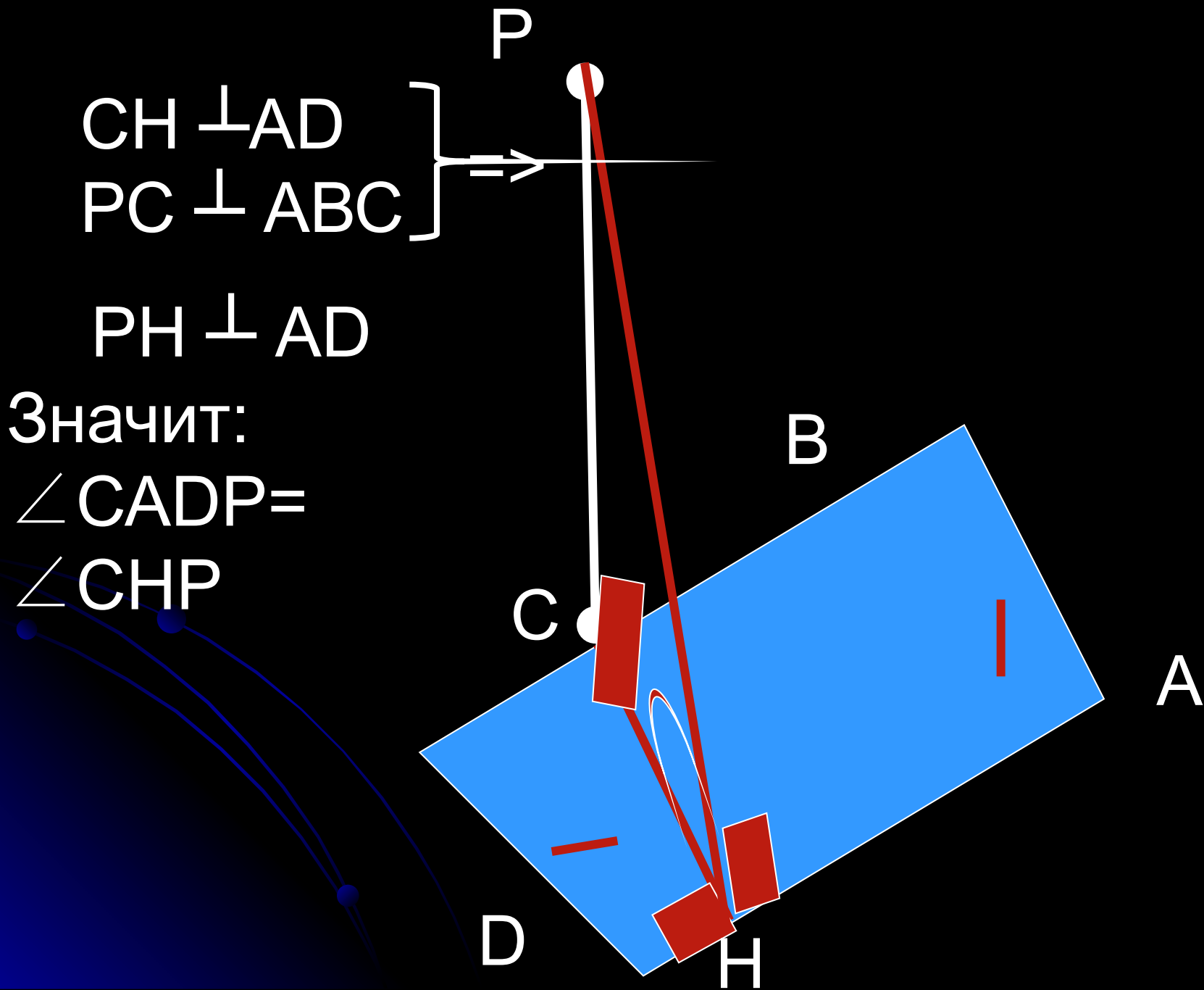




m) Дана трапеция ABCD.  
Построить линейный угол  
двугранного угла с ребром AD ,  
если:

ABCD — равнобокая трапеция;  
 $AB=CD$ ,  $(PC) \perp (ABC)$ ;





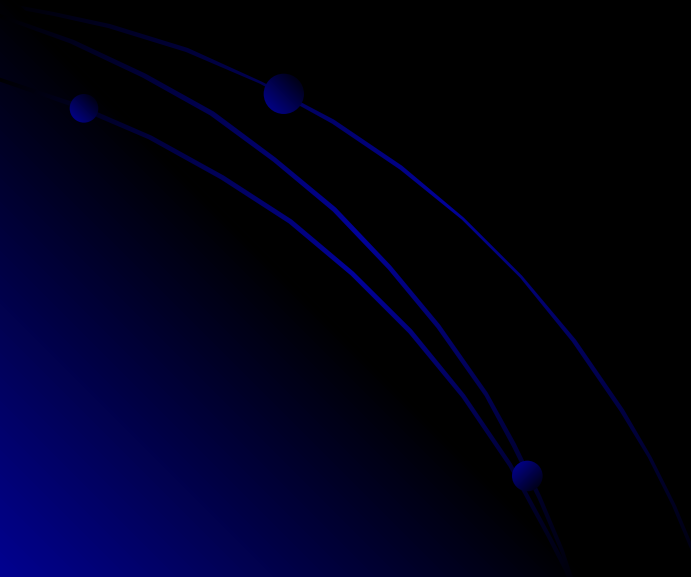
# Вычислительные задачи



а)  $PABC$  — пирамида;  
найти величину двугранного угла  
с ребром  $AC$ , если:

$$(PB) \perp (ABC); \angle ACB = 90^\circ;$$

$$BC = PB = 4$$



1)

$AC \perp BC$   
 $PB \perp ABC$

$PC \perp AC$

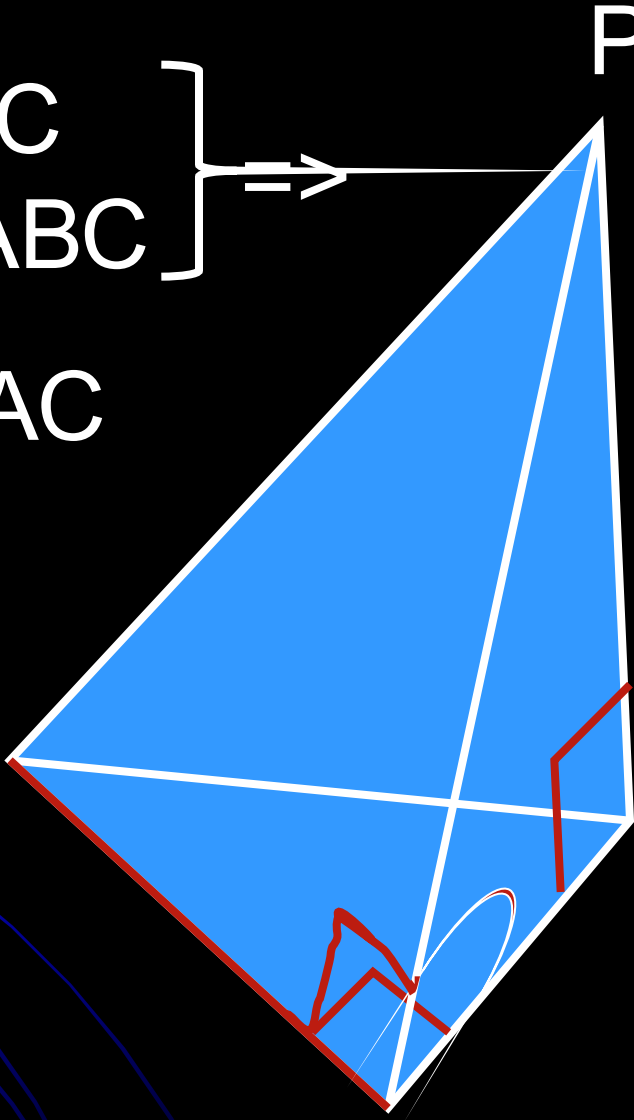
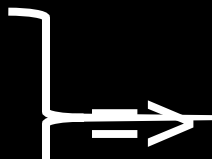
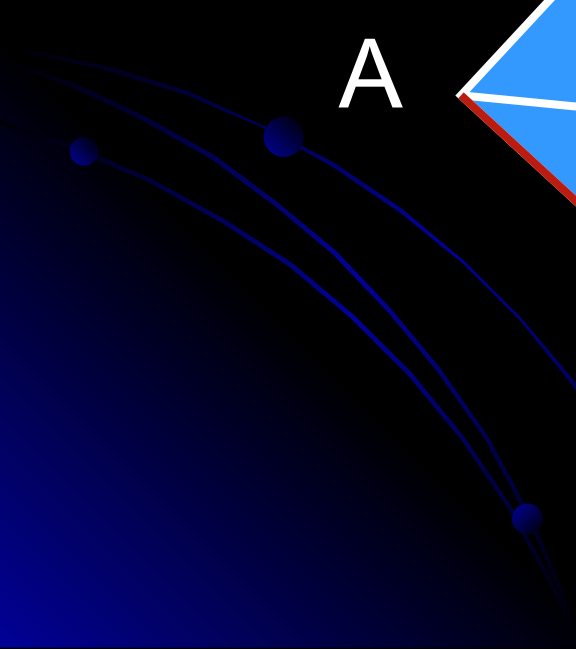
Значит:  
 $\angle BACP =$   
 $\angle BCP$

A

B

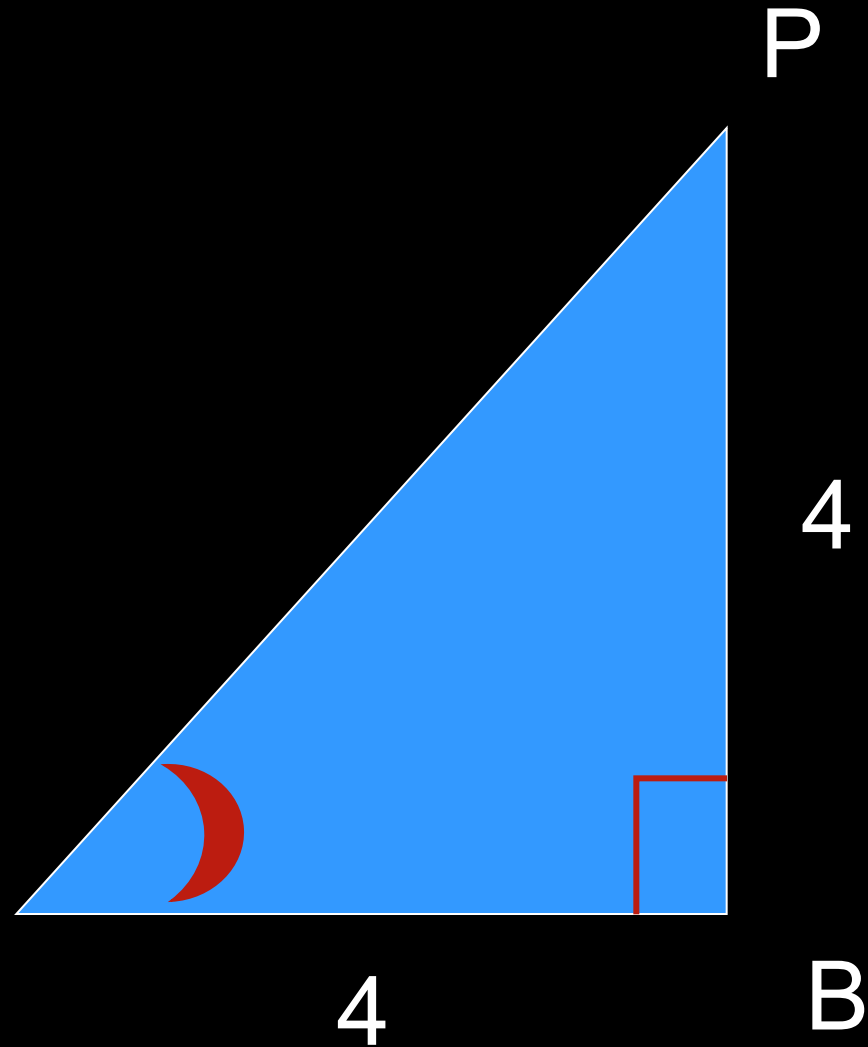
C

P



2)  $BP=BC \Rightarrow \triangle CBP$  - равнобедренный,

$$\angle C = \angle P = 45^\circ$$



Ответ:  $\angle BCP = 45^\circ$

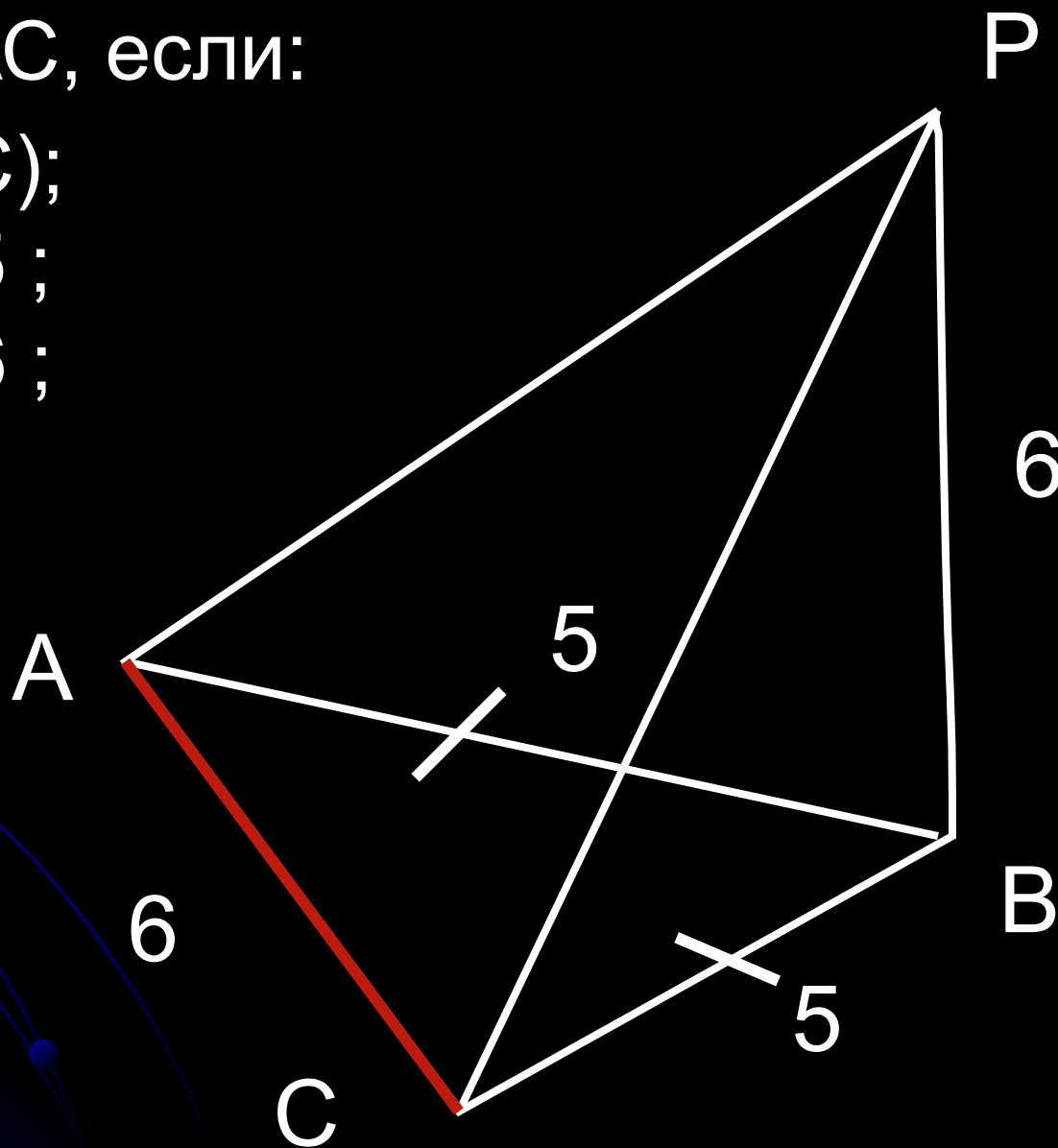
в)  $PAVC$  — пирамида;

найти величину двугранного угла  
с ребром  $AC$ , если:

$(PB) \perp (ABC)$ ;

$AB = BC = 5$ ;

$PB = AC = 6$ ;



$\angle PACB =$

?



1)

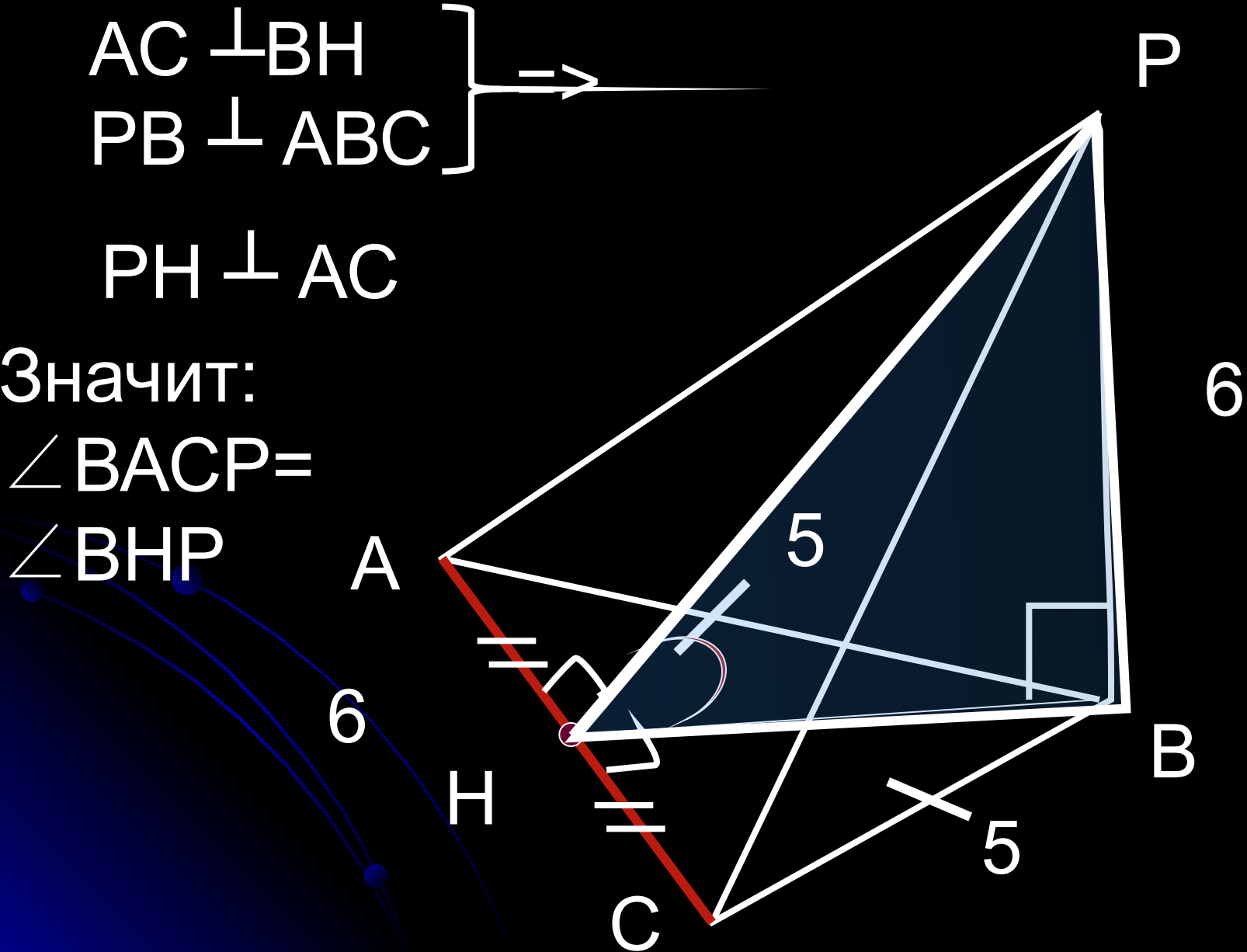
$$\left. \begin{array}{l} AC \perp BH \\ PB \perp ABC \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$PH \perp AC$$

Значит:

$$\angle BACP =$$

$$\angle BHP$$



2)

$\triangle ABC$  - равнобедренный,

$BH$  - высота,

значит:  $BH$  - медиана,

$AH = HC = 3$ ,

$\triangle BHC$  - прямоугольный,

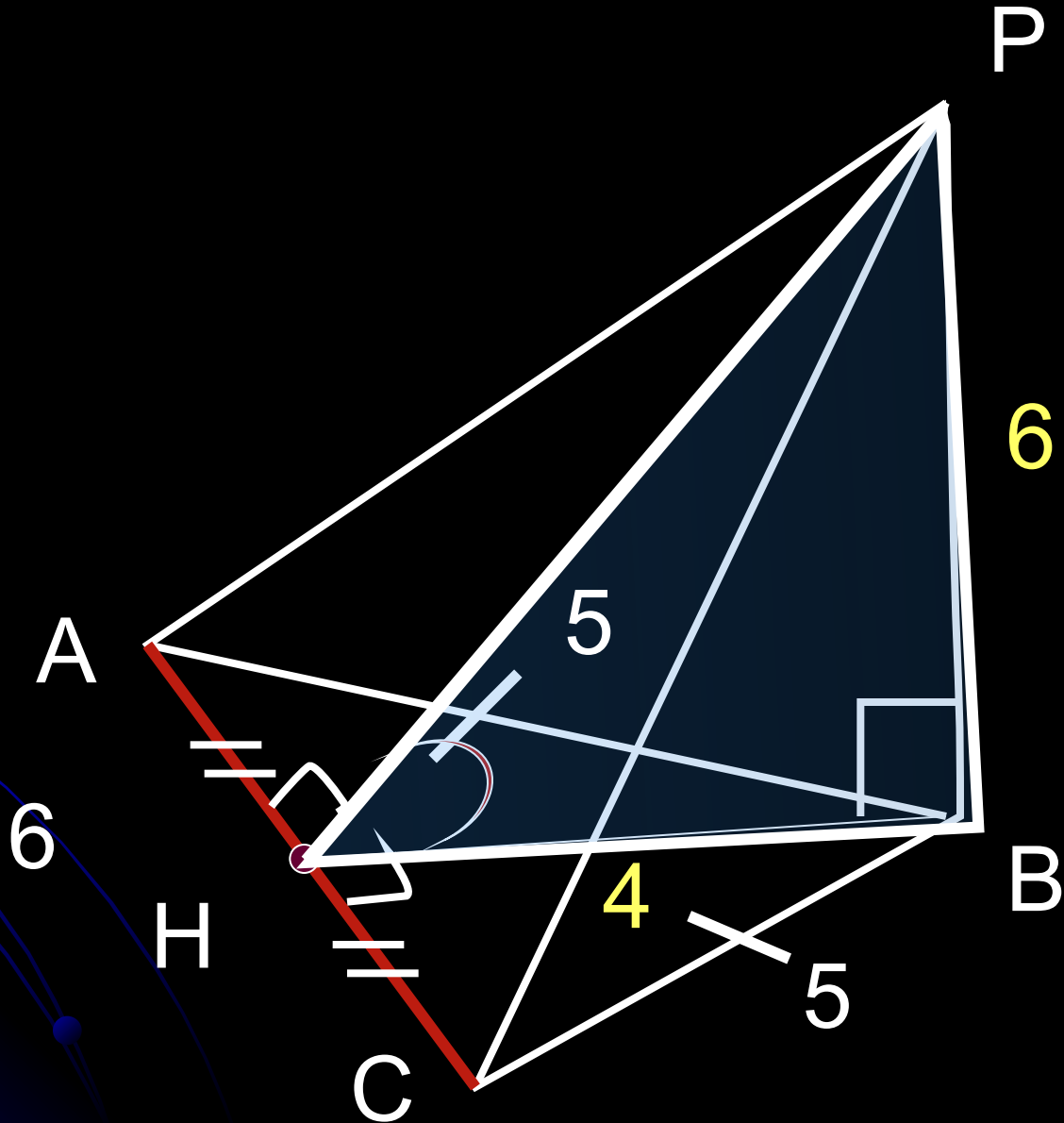
$BH^2 = BC^2 - HC^2$ ,

$BH = 4$



1)

Значит:  
 $\angle BACP =$   
 $\angle BHP$



3)  $\triangle PBN$  - прямоугольный,

$$\operatorname{tg} \angle N = PB / BN,$$

$$\operatorname{tg} \angle N = 6/4 = 1,5$$

Ответ:

$$\angle PNB = \operatorname{arctg}$$

1,5

Н

4

В

Р

6



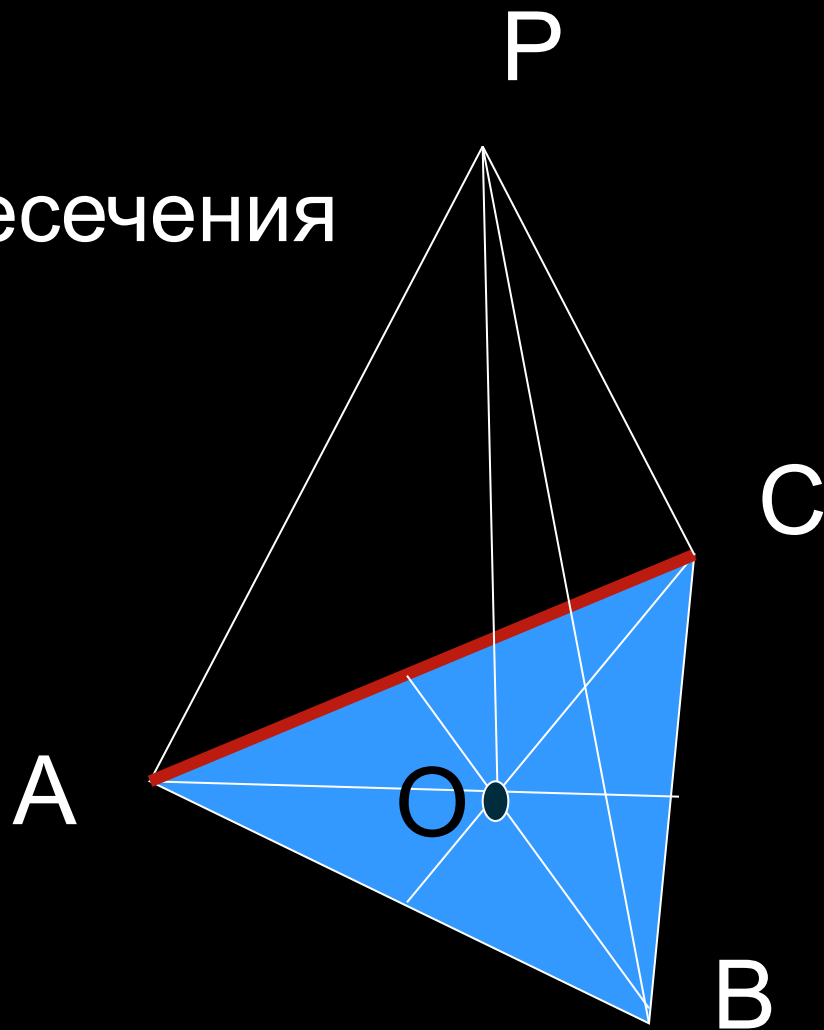
с)  $PAVC$  — пирамида;  
найти величину двугранного угла  
с ребром  $AC$ , если:

$\triangle ABC$  — правильный  
треугольник;

$AB = 6$ ;  $O$  — точка пересечения  
медиан  $ABC$ ;

$(PO) \perp (ABC)$ ;

$$PO = \sqrt{3}$$



$\angle PACB =$

?

1) BK - медиана, P

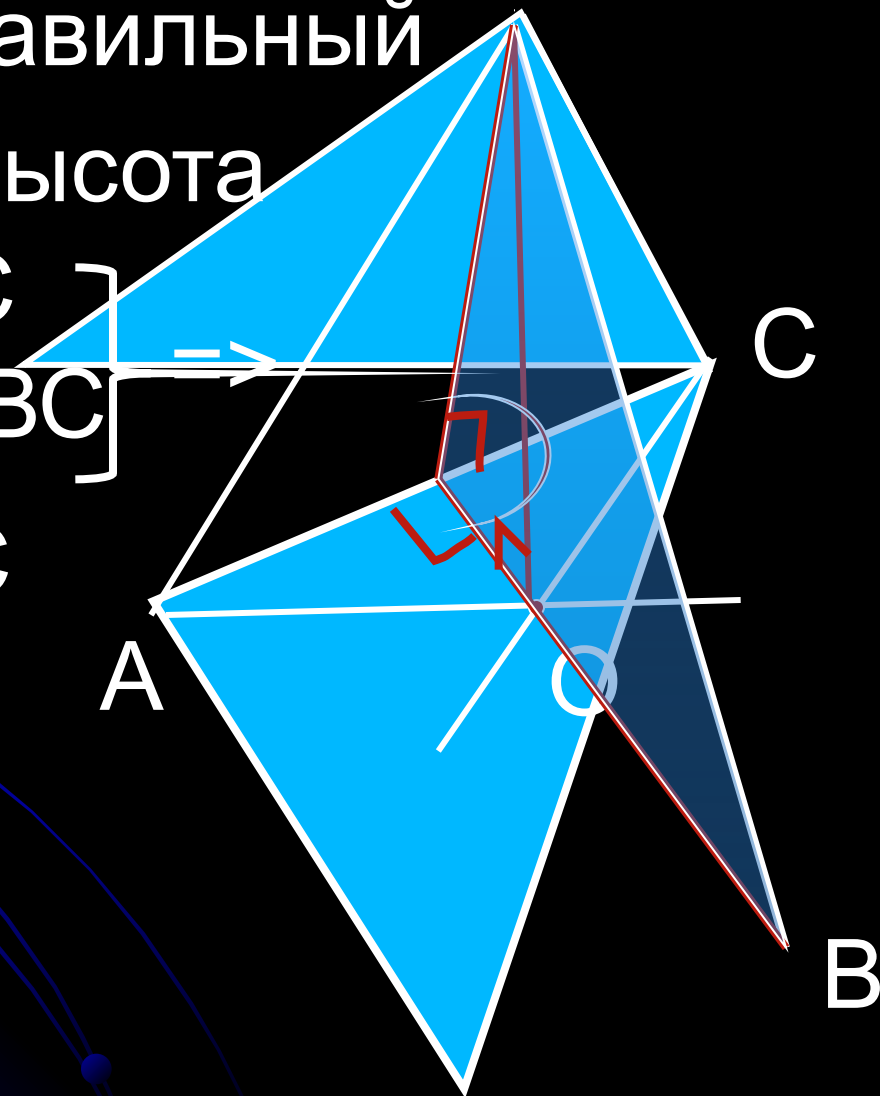
$\triangle ABC$  - правильный

$\Rightarrow$  BK - высота

$BO \perp AC$

$PO \perp ABC$

$PK \perp AC$



$$PO = \sqrt{3}$$

KO - ?

$\angle PACB$

$= \angle PKB$

2)  $\triangle ABC$  - правильный,  
O - точка пересечения  
медиан, значит:  
 $OB = 2OK$ .

Найдем BK.

$\triangle BKC$ :

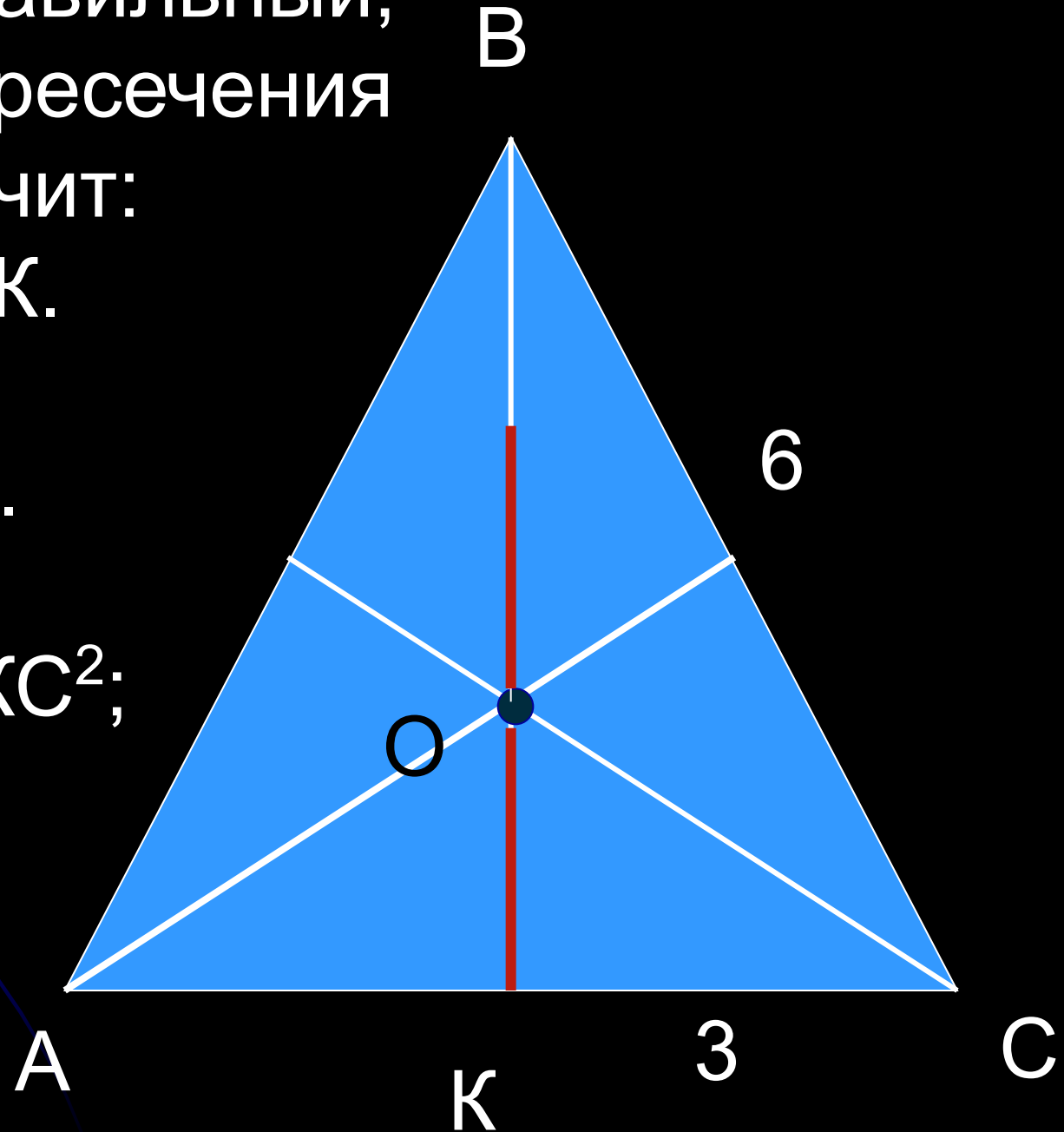
$$BK^2 = BC^2 - KC^2;$$

$$BK^2 = 27;$$

$$BK = 3\sqrt{3}$$

$$BK = 3OK,$$

$$OK = \sqrt{3}$$



1) BK - медиана, P

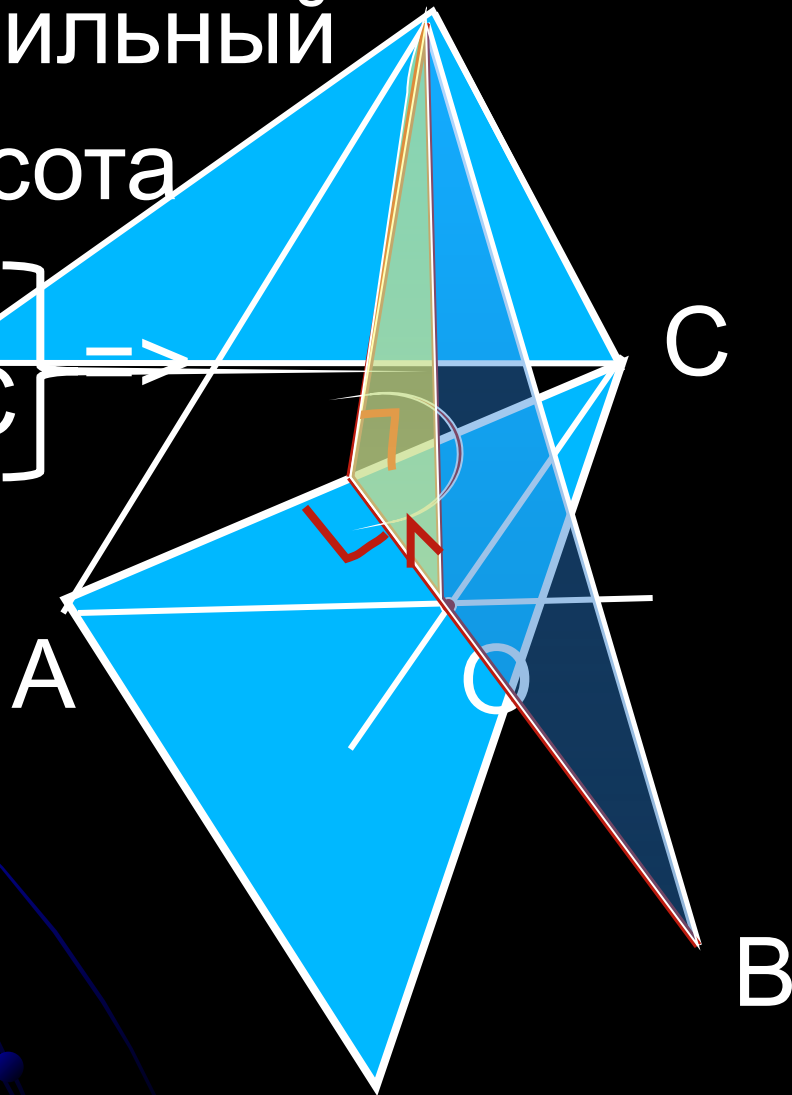
$\triangle ABC$  - правильный

$\Rightarrow$  BK - высота

$BO \perp AC$

$PO \perp ABC$

$PK \perp AC$



$$PO = \sqrt{3}$$

$$KO = \sqrt{3}$$

$\angle PACB$   
 $= \angle PKP$

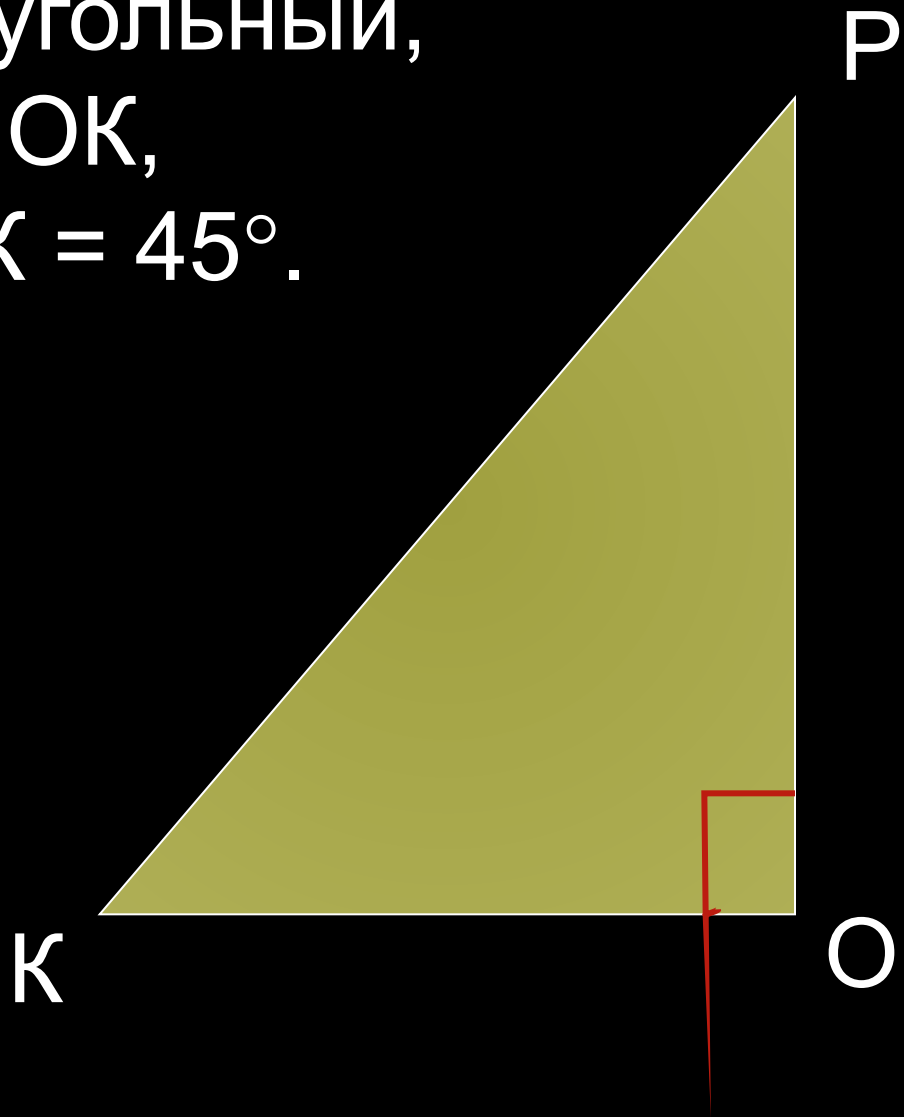


3)  $\triangle POK$  - прямоугольный,  
 $\angle O = 90^\circ$ ,  $PO = OK$ ,  
значит  $\angle P = \angle K = 45^\circ$ .

Ответ:

$\angle PACB =$

$45^\circ$



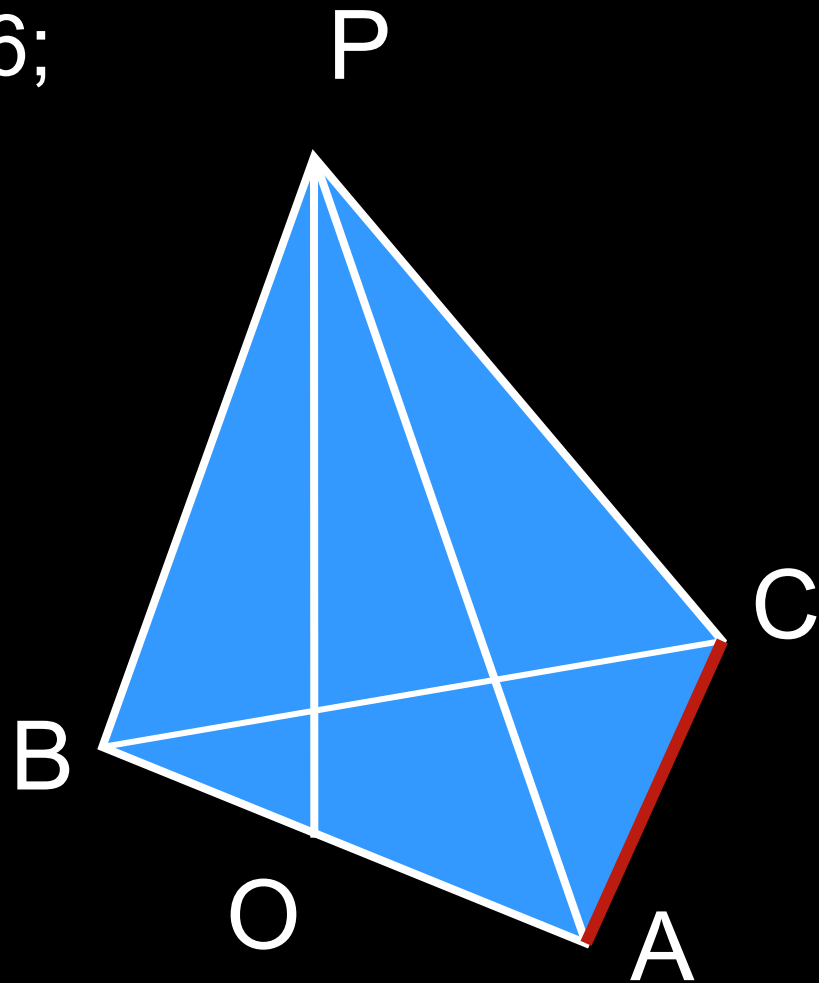
D) PABC — пирамида;  
найти величину двугранного угла  
с ребром AC, если:

ABC — правильный треугольник;

O — середина AB;  $AB = 6$ ;

$(PO) \perp (ABC)$ ;

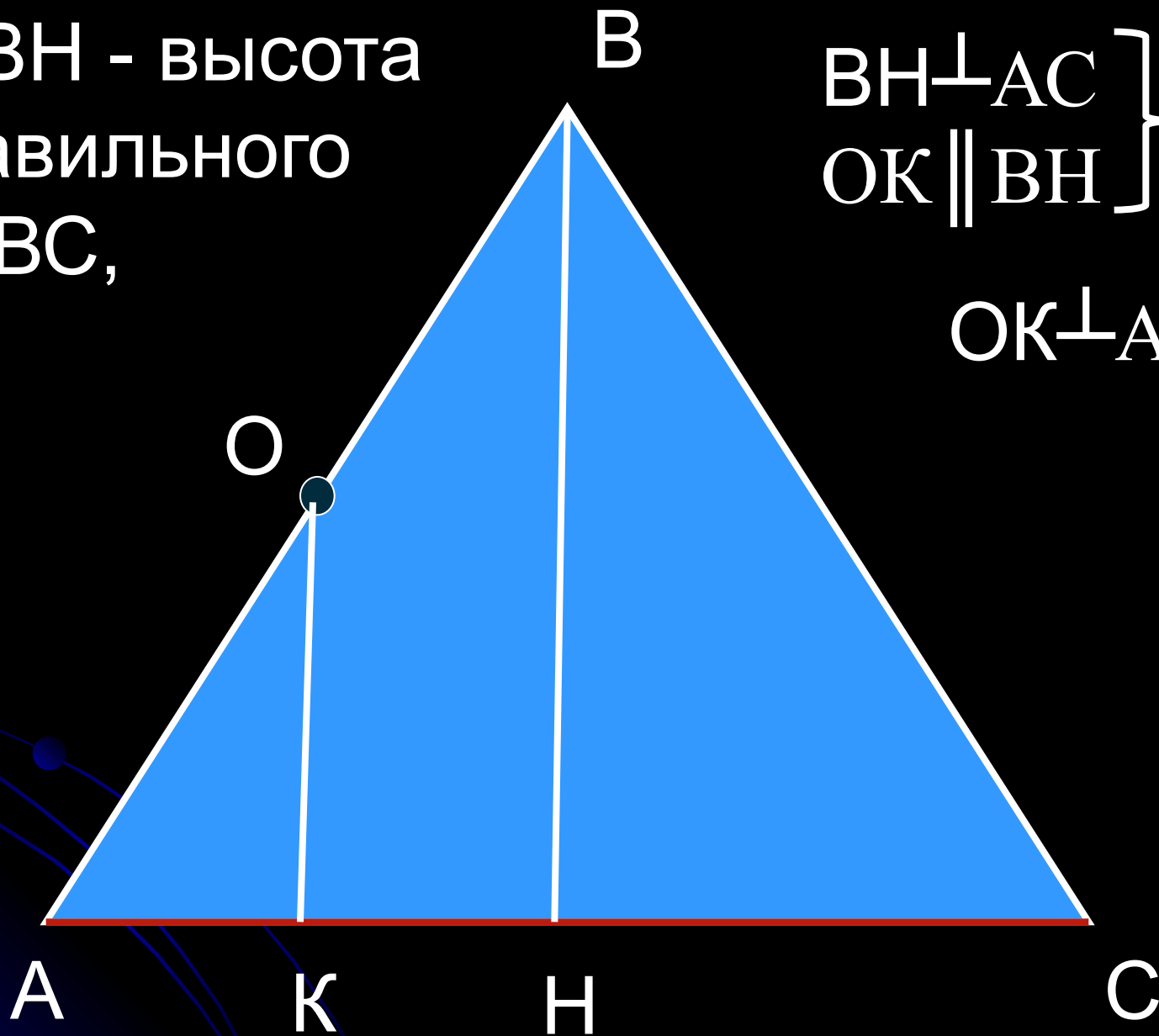
$PO = 4$  ;



$\angle PACB =$

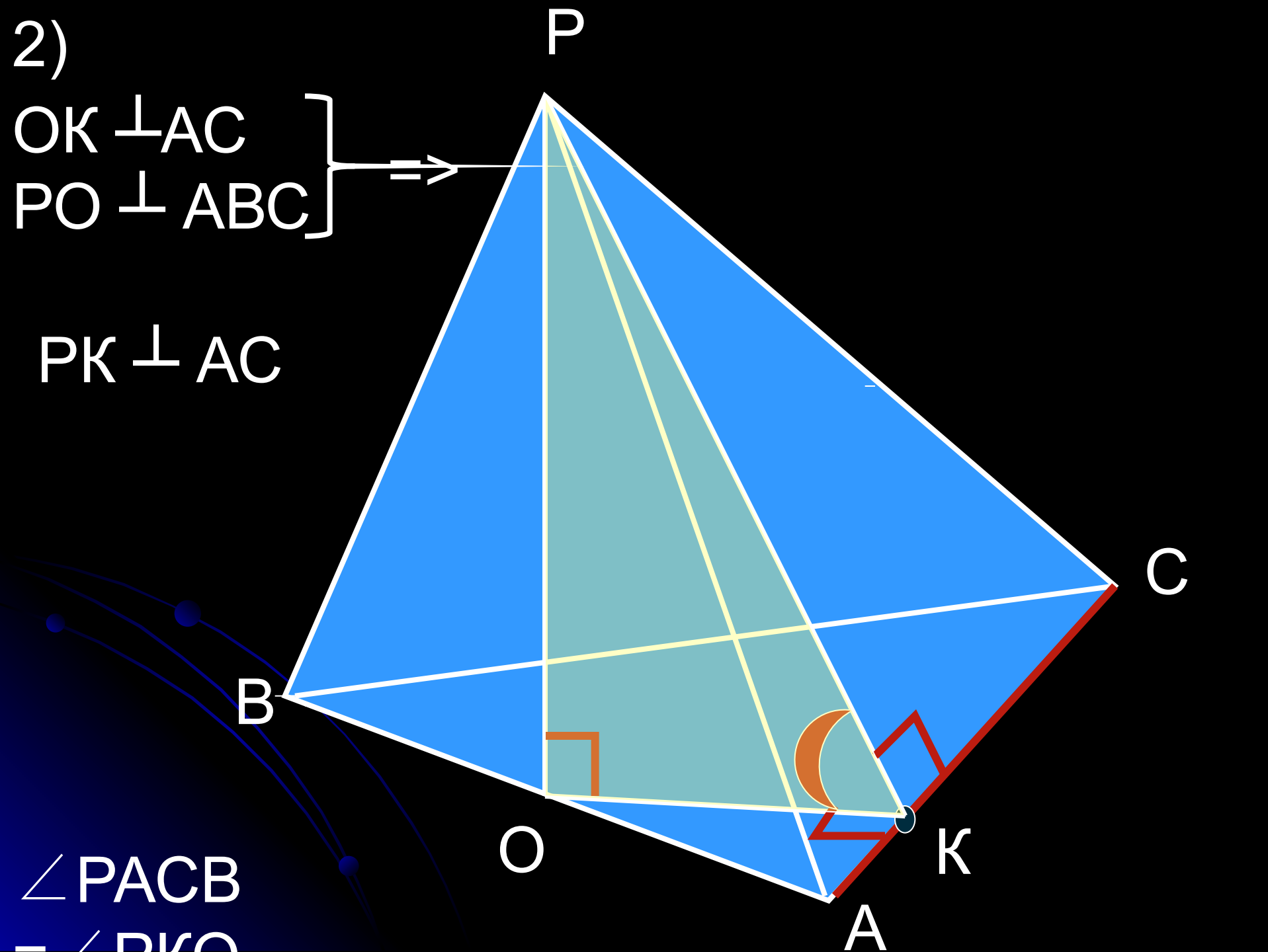
?

1)  $BH$  - высота  
правильного  
 $\triangle ABC$ ,

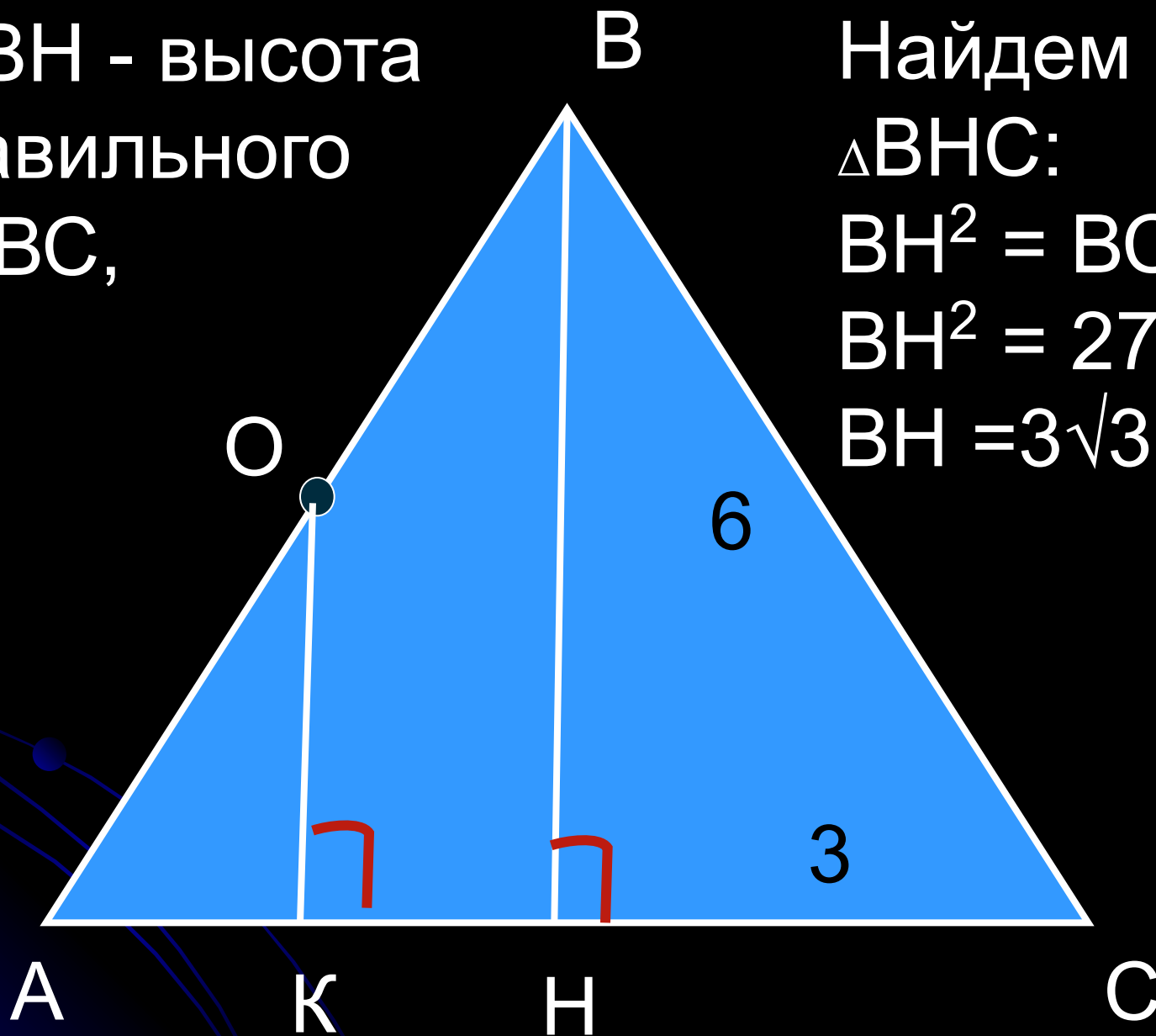


$BH \perp AC$   
 $OK \parallel BH$

$OK \perp AC$



3) ВН - высота  
правильного  
 $\triangle ABC$ ,



Найдем  $BH$ .

$\triangle BHC$ :

$$BH^2 = BC^2 - HC^2;$$

$$BH^2 = 27;$$

$$BH = 3\sqrt{3}$$

$$BH = 3\sqrt{3}$$

$\triangle ABH$ ,  $O$  - середина  $AB$ ,

$OK \parallel BH \Rightarrow OK$  - средняя линия,

$$OK = BH/2$$



4)  $\triangle POK$ ;  $\angle C = 90^\circ$

$\text{tg } \angle K = PO/OK,$

$\text{tg } \angle K = 4/\sqrt{3}$

6

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

O

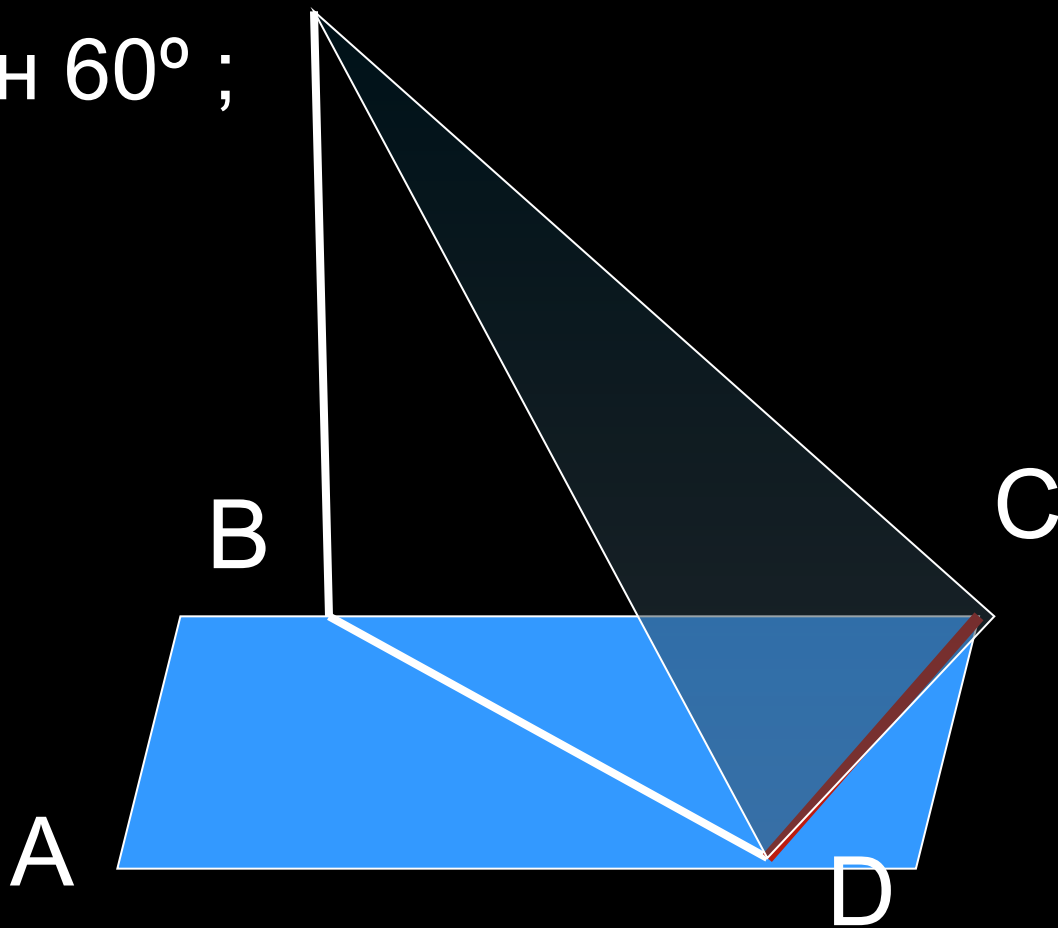
K

Ответ:

$\angle PACB = \text{arctg } 4/\sqrt{3}$



е) ABCD —  
прямоугольник;  
 $BD = 4\sqrt{3}$  ;  
 $(PB) \perp (ABC)$ ;  $PB = 6$  ;    P  
Двугранный угол  
с ребром DC равен  $60^\circ$  ;  
Найти стороны  
прямоугольника.





1)

$$\left. \begin{array}{l} \angle PDCB = 60^\circ \\ BC \perp CD \\ PB \perp ABC \end{array} \right\} \Rightarrow$$

P

$$BD = 4\sqrt{3};$$

$$PB = 6;$$

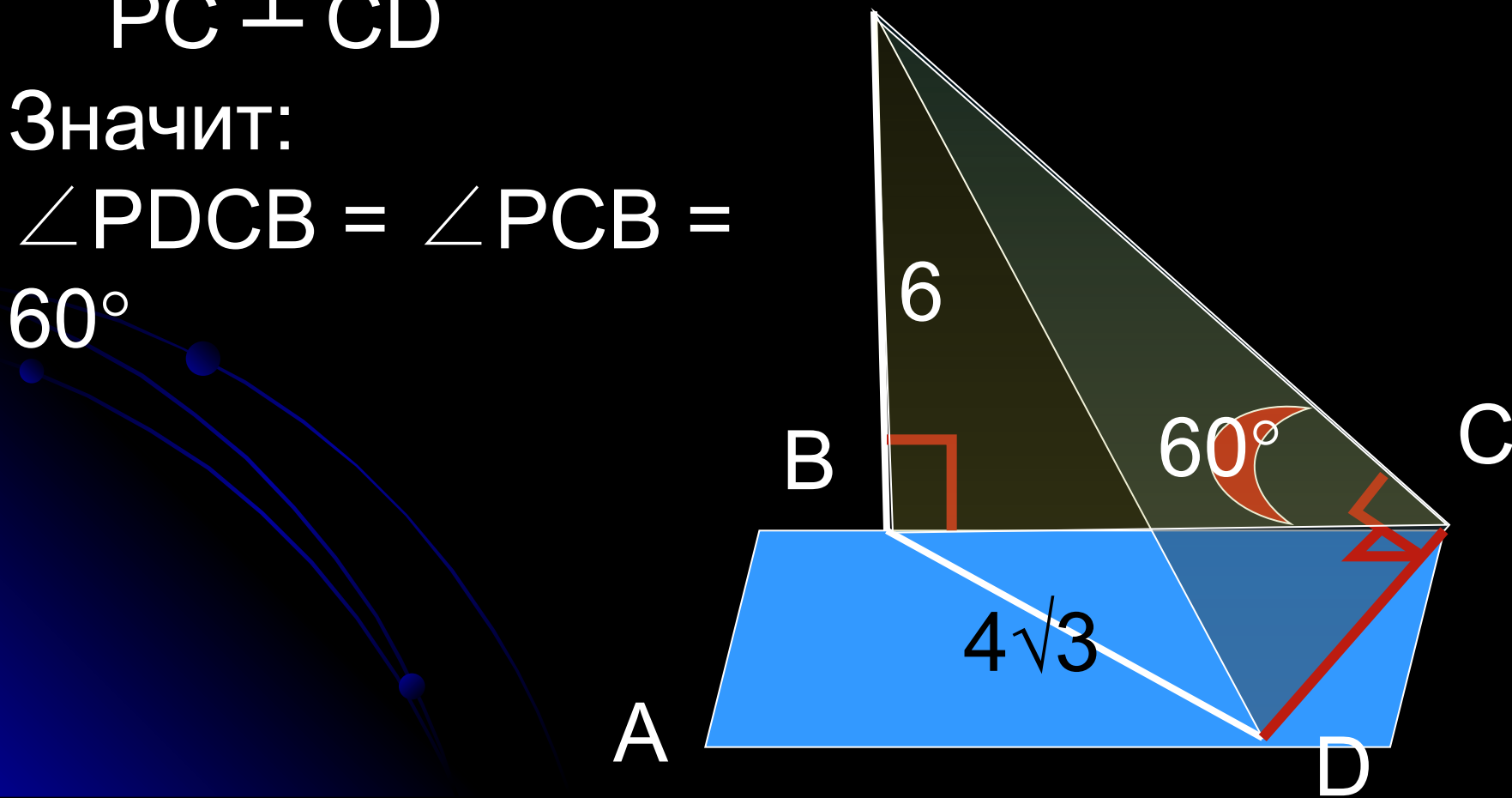
$$\angle PCB = 60^\circ$$

$$PC \perp CD$$

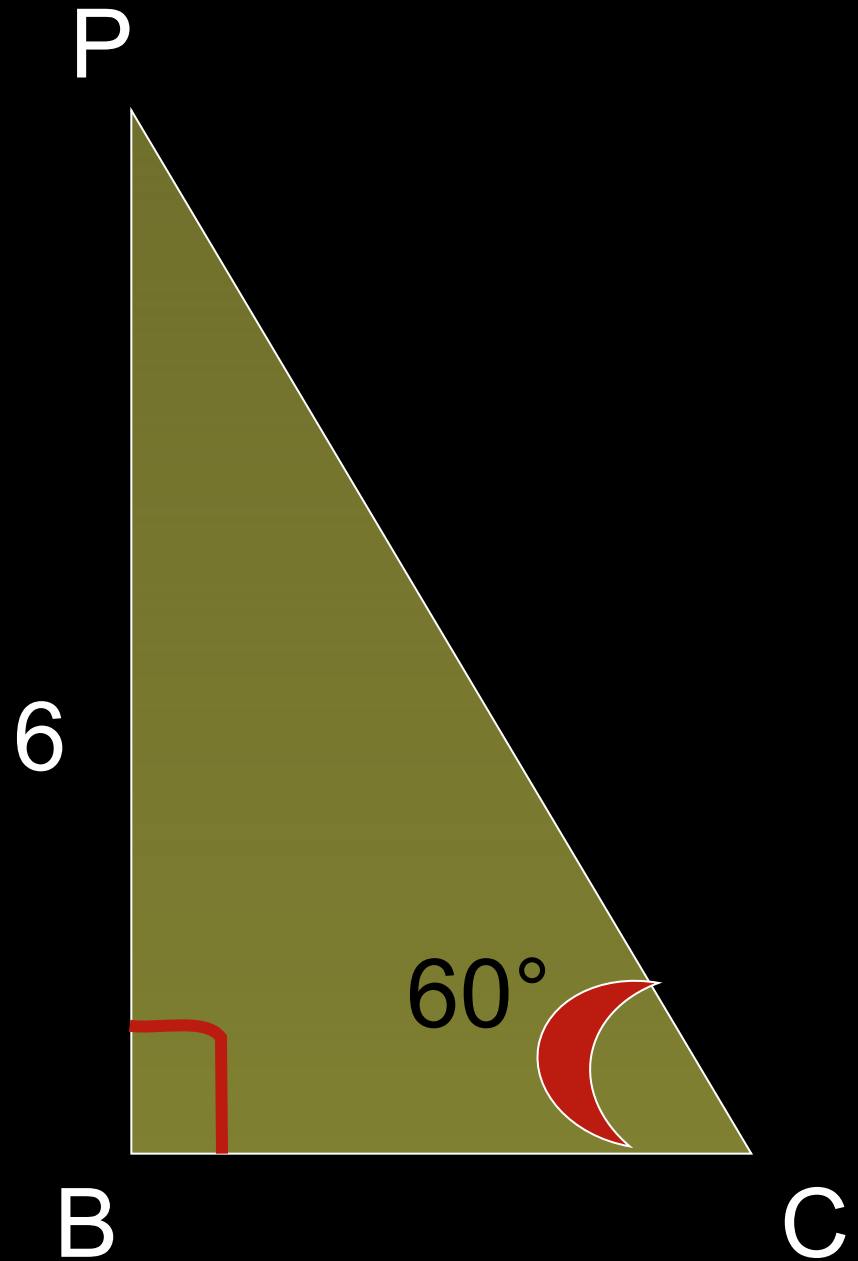
Значит:

$$\angle PDCB = \angle PCB =$$

$$60^\circ$$



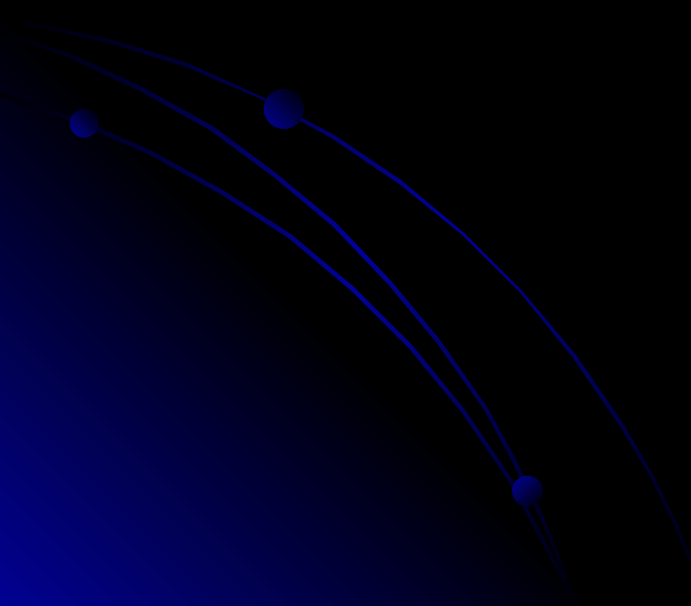
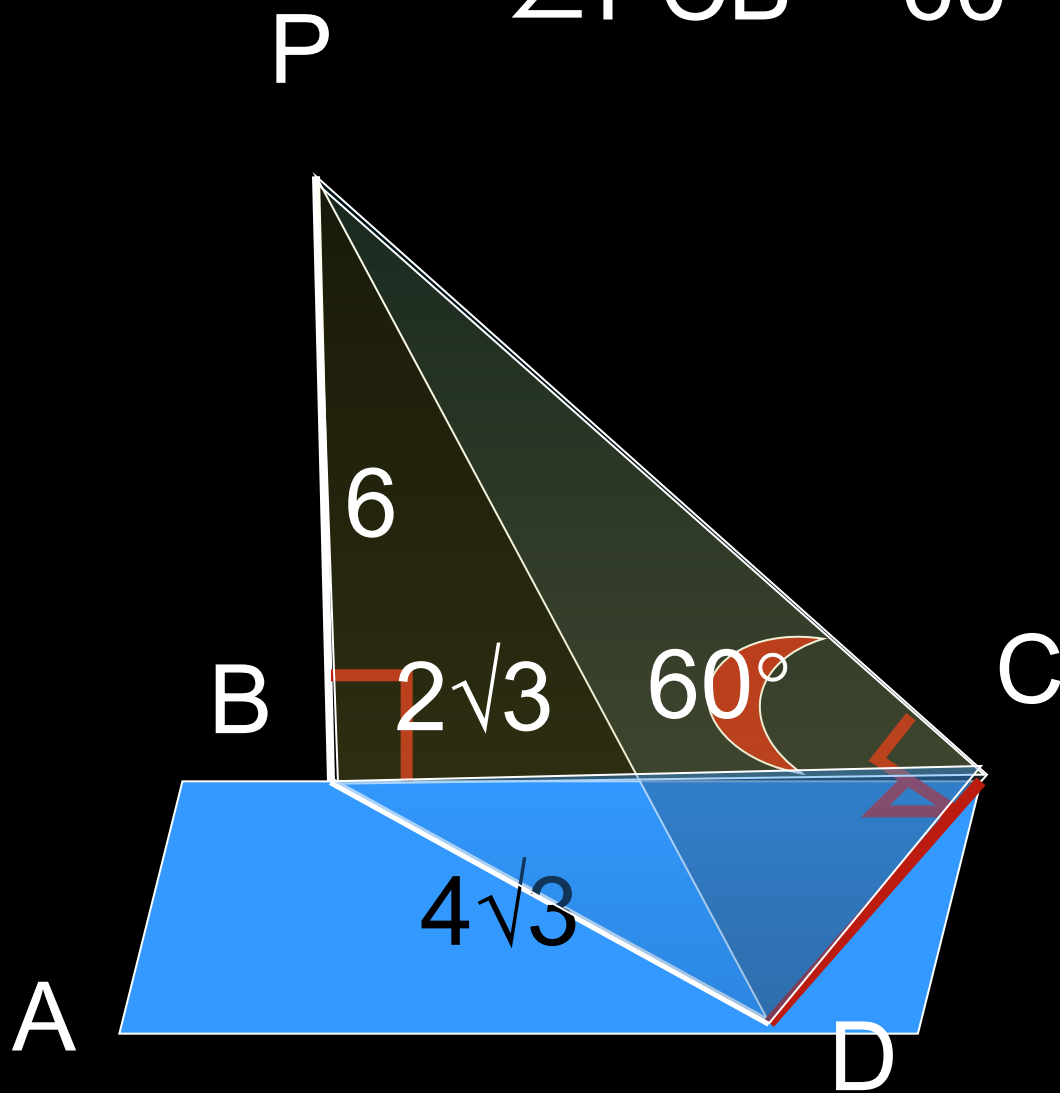
2)  $\triangle PBC$ ,  $\angle B = 90^\circ$ ,  
 $\operatorname{tg} \angle C = PB/BC$ ,  
 $\sqrt{3} = 6/BC$ ,  
 $BC = 6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$



$$BD = 4\sqrt{3} ;$$

$$PB = 6 ;$$

$$\angle PCB = 60^\circ$$



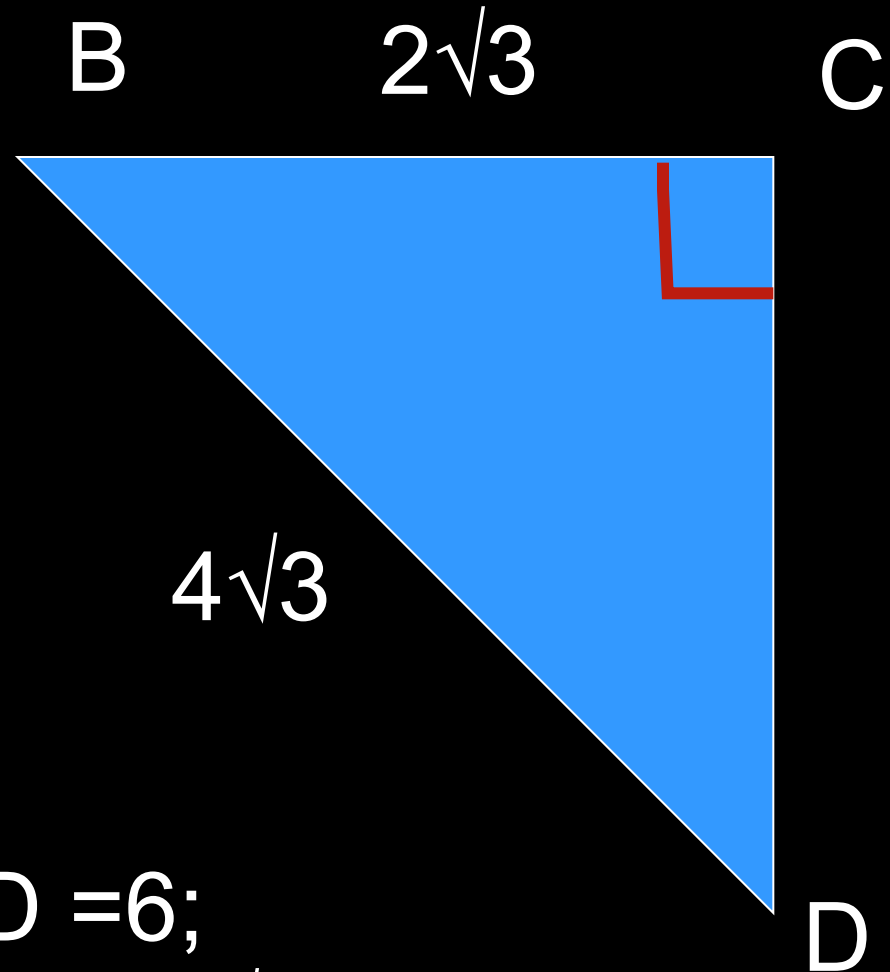
3)  $\triangle BCD$ ;  $\angle C =$

$90^\circ$ ,

$$CD^2 = BD^2 - BC^2;$$

$$CD^2 = 16 \cdot 3 - 4 \cdot 3;$$

$$CD^2 = 36; CD = 6$$



Ответ:  $AB = CD = 6$ ;

$BC = AD = 2\sqrt{3}$ .

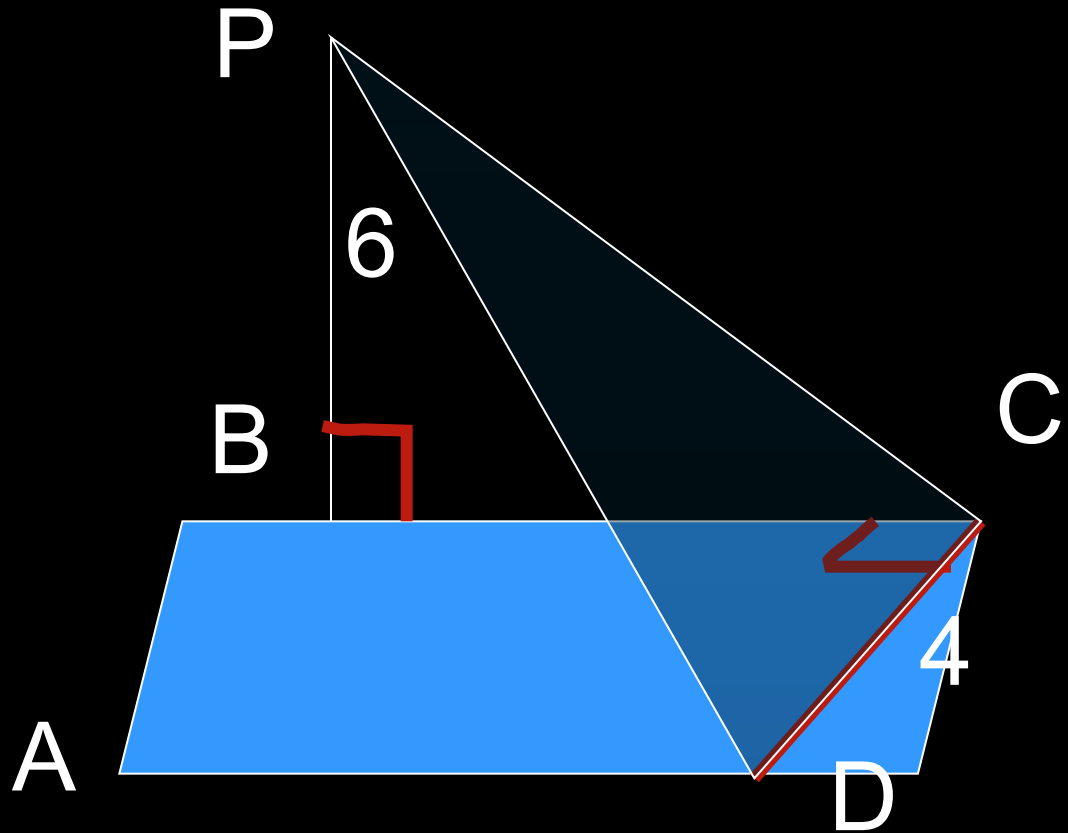
f) ABCD — прямоугольник;

площадь ABCD равна 48 ;

$(PB) \perp (ABC)$ ;  $PB = 6$  ;

$DC = 4$  ;

Найти величину двугранного  
угла с ребром DC.



$\angle PDCB -$

?

1)

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp CD \\ PB \perp ABC \end{array} \right\} \Rightarrow$$

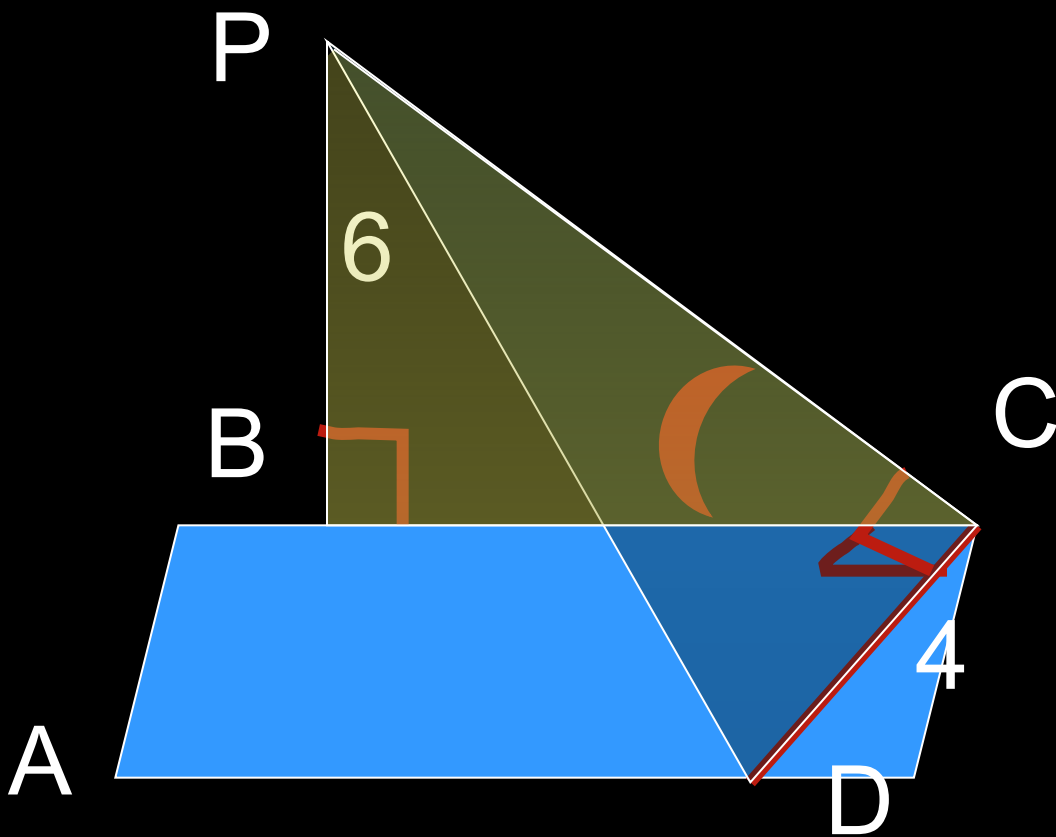
$$PC \perp CD$$

$$\begin{array}{l} S(ABCD)=48, \\ PB = 6, \\ CD = 4. \end{array}$$

Значит:

$$\angle PDCB =$$

$$\angle PCB$$

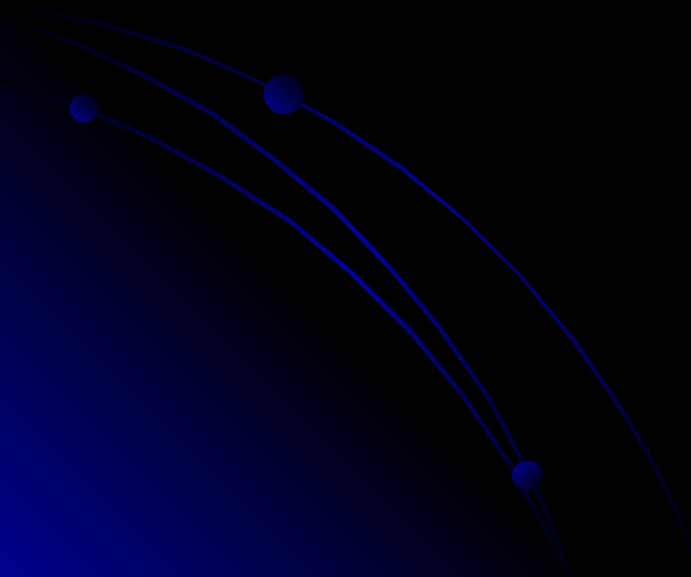


2) ABCD - прямоугольник

$$S(ABCD) = AB \cdot BC = 48,$$

$$AB = CD = 4,$$

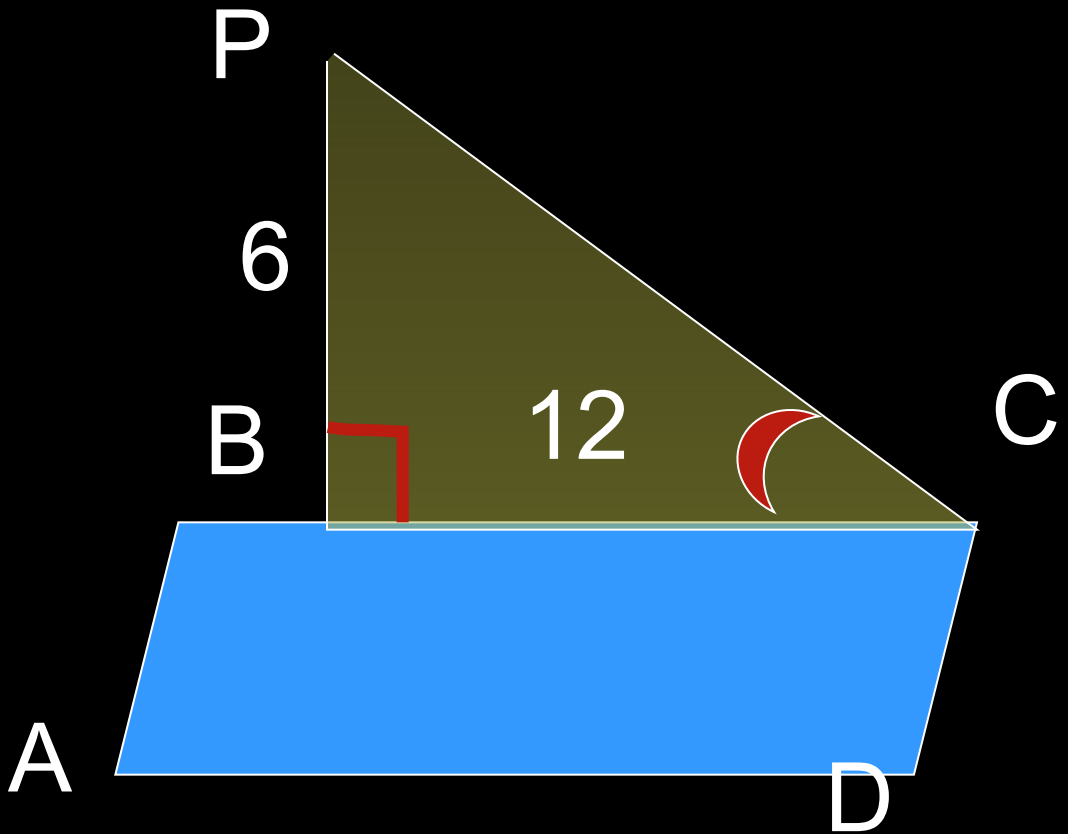
$$4 \cdot BC = 48, BC = 12.$$



3)  $\triangle PBC$ ;  $\angle B = 90^\circ$ ,  
 $\operatorname{tg} \angle C = PB/BC$ ,  
 $\operatorname{tg} \angle C = 0,5$

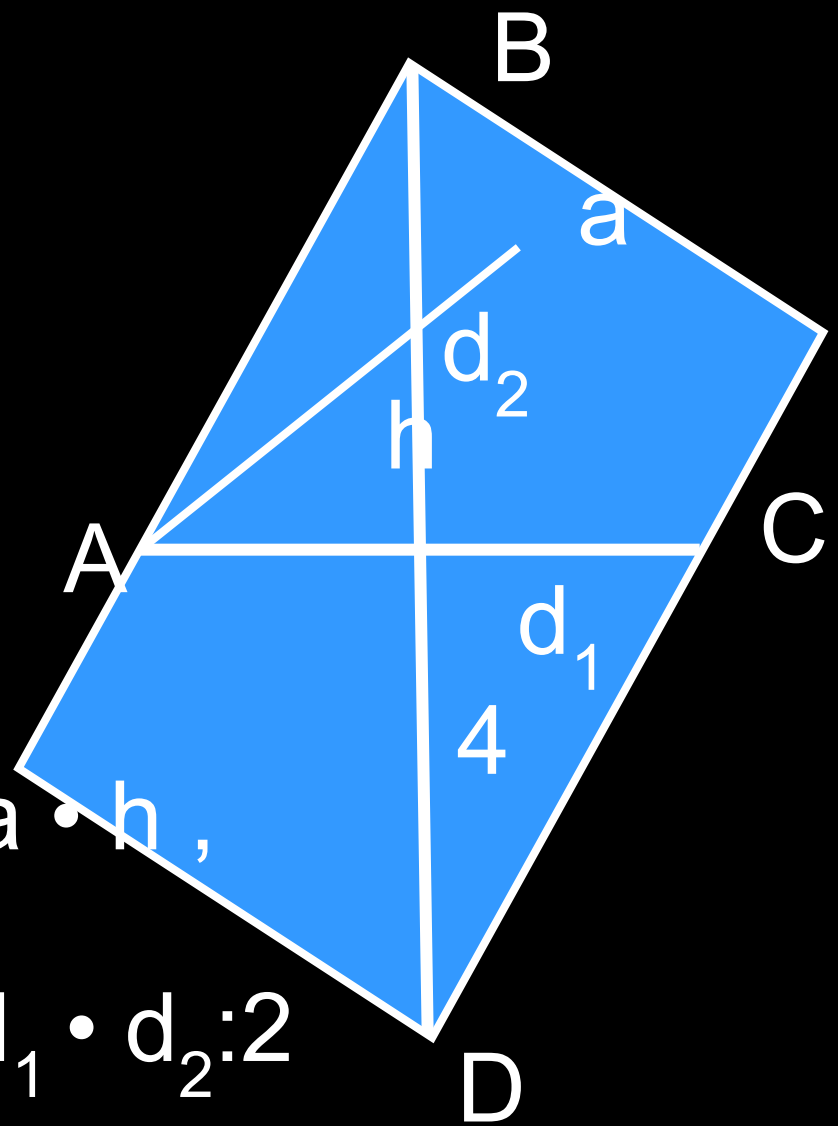
Ответ:

$\angle PDCB = \operatorname{arctg} 0,5$





g) ABCD — ромб;  
 $BD = 4$  ;  
 $(PC) \perp (ABC)$ ;  $PC = 8$  ;  
Двугранный угол с  
ребром  $BD$  равен  $45^\circ$  ;  
Найти площадь ромба



$$S_{\text{ромба}} = a \cdot h,$$

$$S_{\text{ромба}} = d_1 \cdot d_2 : 2$$

2)

$$\left. \begin{array}{l} AO \perp BD \\ PC \perp ABC \end{array} \right\} \Rightarrow$$

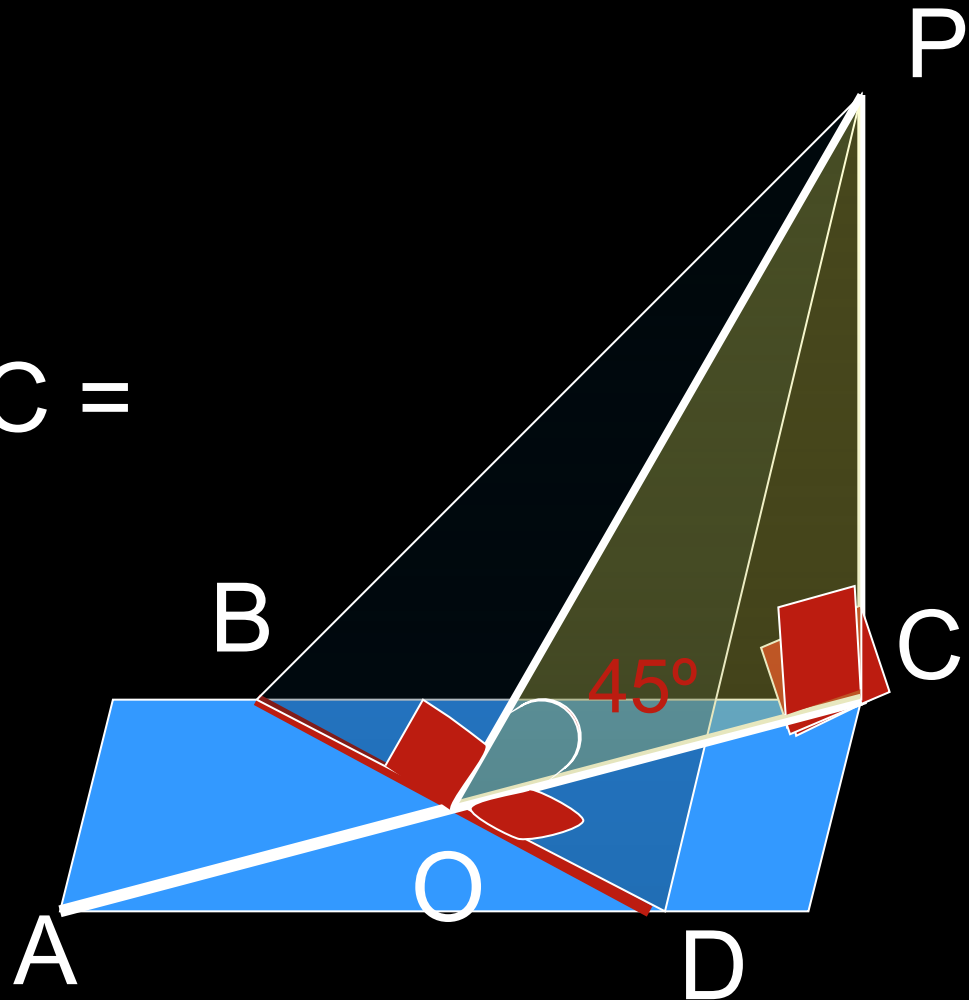
$(PC) \perp (ABC); PC = 8;$   
Двугранный угол с ребром  $BD$  равен  $45^\circ;$

$$PO \perp CD$$

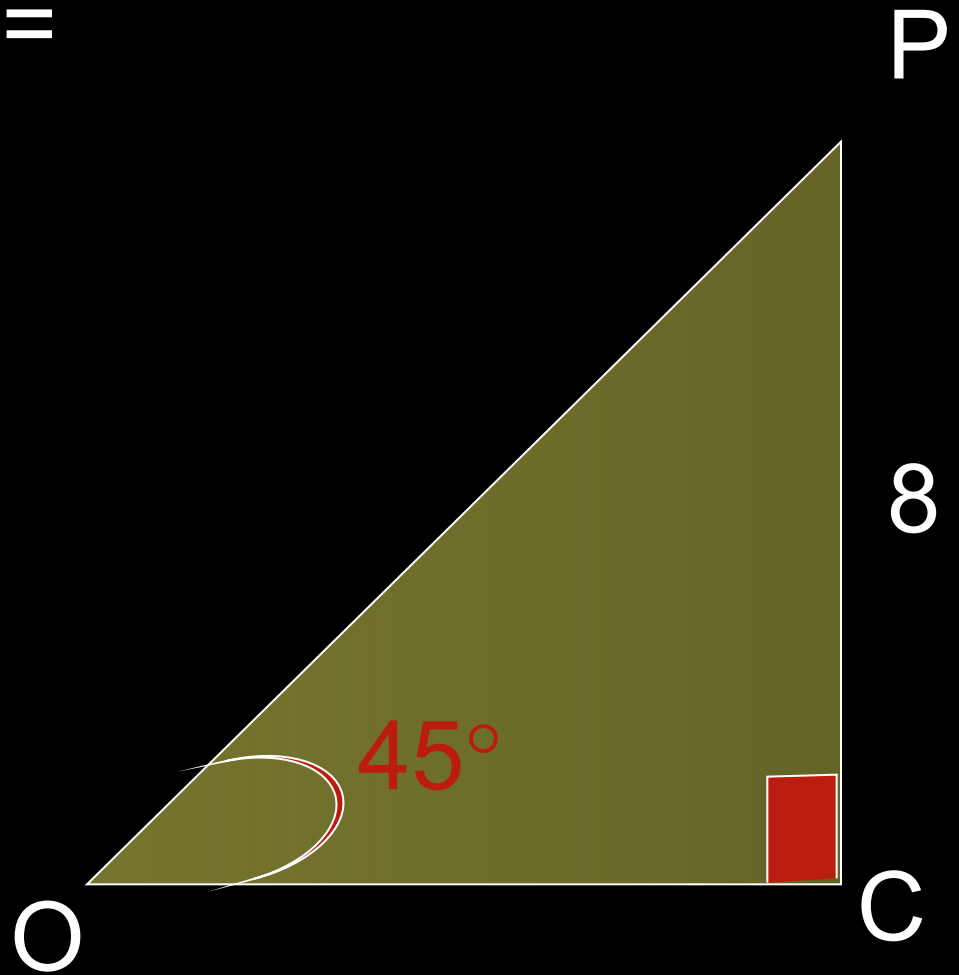
Значит:

$$\angle PBDC = \angle POC =$$

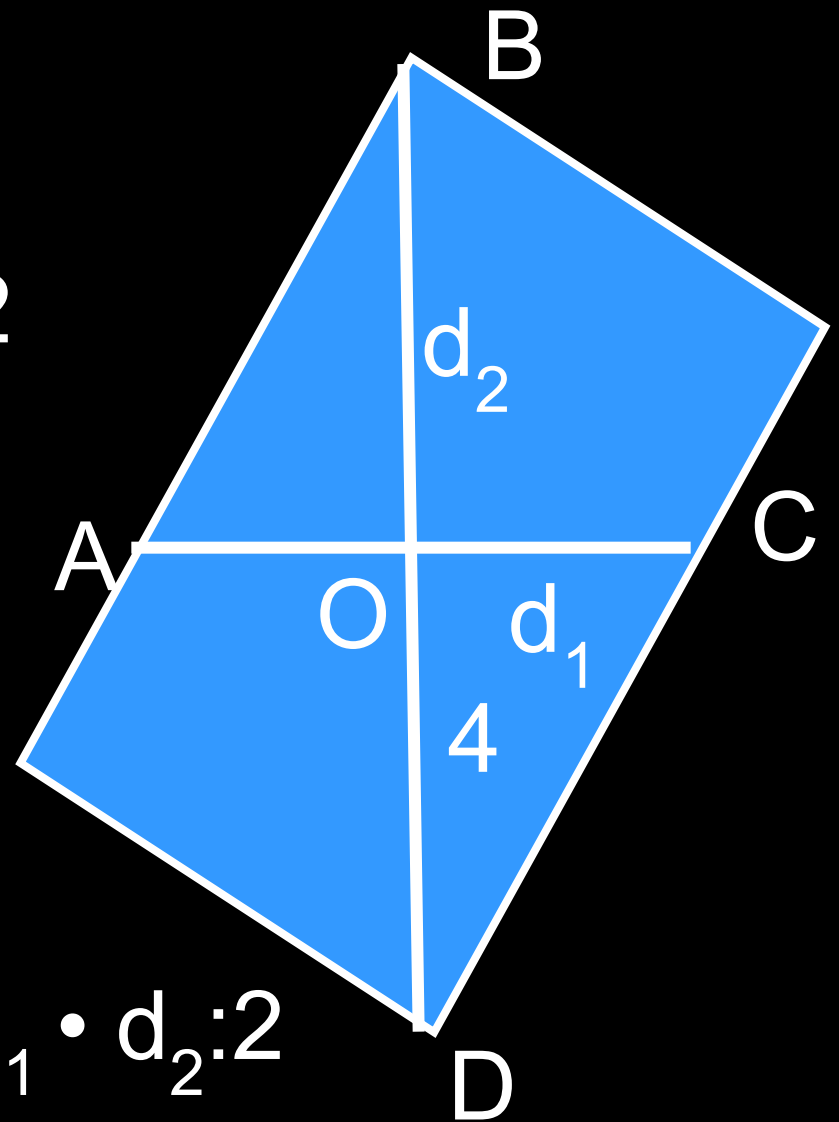
$45^\circ$



3)  $\triangle PCO$ ;  $\angle C = 90^\circ$ ,  
 $\angle O = 45^\circ \Rightarrow \angle P =$   
 $45^\circ$ ,  
 $OC = PC = 8$ .



4)  $d_1 = 2OC = 16,$   
 $d_2 = 4,$   
 $S_{\text{ромба}} = d_1 \cdot d_2 : 2$   
 $S = 32$



Ответ: 32

$S_{\text{ромба}} = d_1 \cdot d_2 : 2$

к) ABCD- параллелограмм;

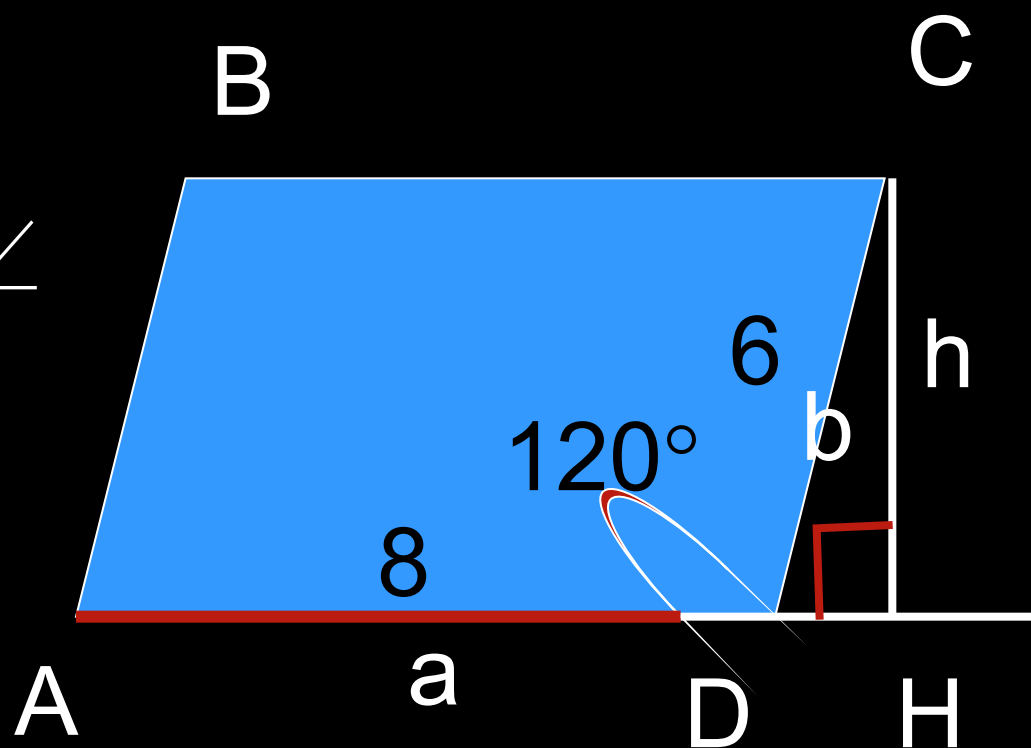
$\angle ADC = 120^\circ$ ;  $AD = 8$  ;

$DC = 6$  ;  $(PC) \perp (ABC)$ ;

$PC = 9$  ;

Найти величину двугранного  
угла с ребром AD и  
площадь ABCD .

$$S_{\text{парал-ма}}(a, b) = a \cdot b \cdot \sin \angle$$
$$S_{\text{парал-ма}} = a \cdot h$$



$$1) S_{\text{парал-ма}} = a \cdot b \cdot \sin \angle$$

(a,b)

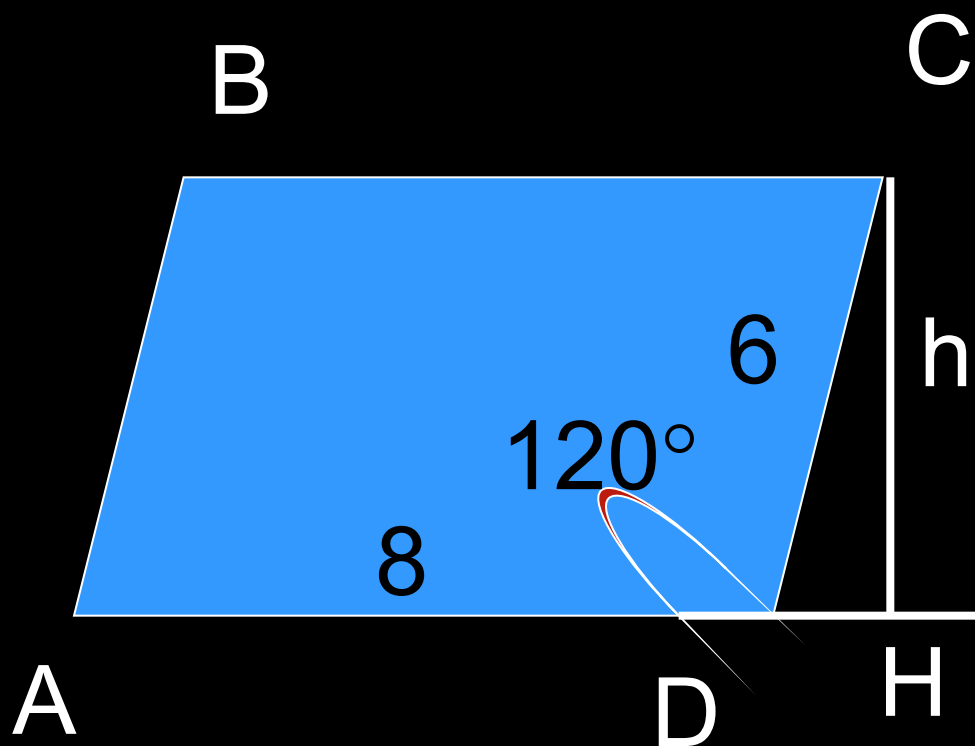
$$S(ABCD) = 8 \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ = 24\sqrt{3}.$$

$$S_{\text{парал-ма}} = a \cdot h$$

$$h = S_{\text{парал-ма}} / a$$

$$h = 24\sqrt{3} / 8$$

$$h = 3\sqrt{3}$$



2)

$(PC) \perp (ABC); PC = 9$  ;

Найти величину двугранного  
угла с ребром AD

$CH \perp AD$

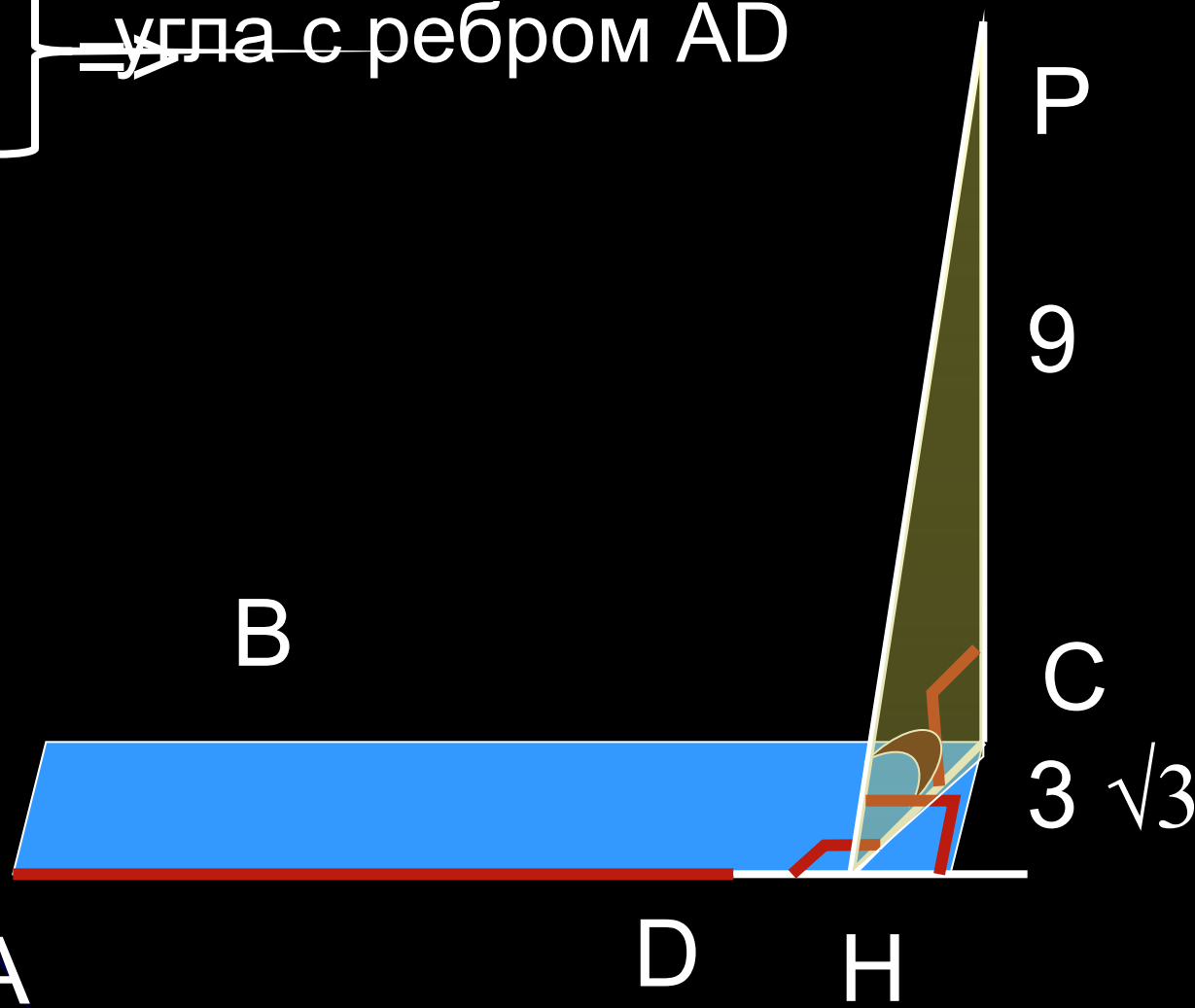
$PC \perp ABC$

$PH \perp CD$

Значит:

$\angle PADC =$

$\angle PHC$



3)  $\triangle PCH$ ;  $\angle C = 90^\circ$ ,

$\operatorname{tg} \angle H = PC/HC$ ,

$\operatorname{tg} \angle H = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$\angle H = 60^\circ$

Ответ:

$\angle PADC = 60^\circ$ ,

$S(ABCD) = 24\sqrt{3}$ .

