Омский государственный технический университет

Кафедра физики

Калистратова Л.Ф.

Электронные лекции по разделам электромагнетизма

(электростатика, постоянный ток, магнетизм)

17 лекций

(34 аудиторных часа)

Тема 3.
Метод расчёта электрических полей на основе теоремы Гаусса

План лекции

1. Электрическое поле заряженной нити.
2. Электрическое поле заряженной плоскости.
3. Электрическое поле плоского конденсатора.
4. Электрическое поле заряженной сферы.
5. Электрическое поле заряженного шара.

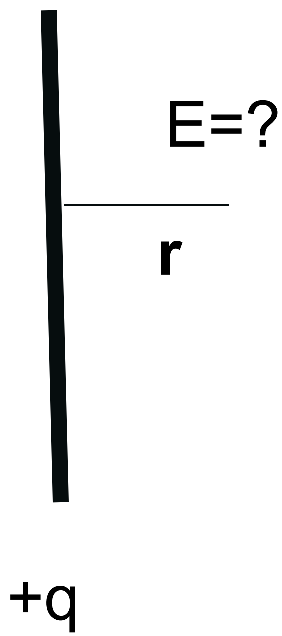
1. Электрическое поле заряженной нити

Пусть бесконечная нить однородно заряжена с **линейной плотностью заряда.**

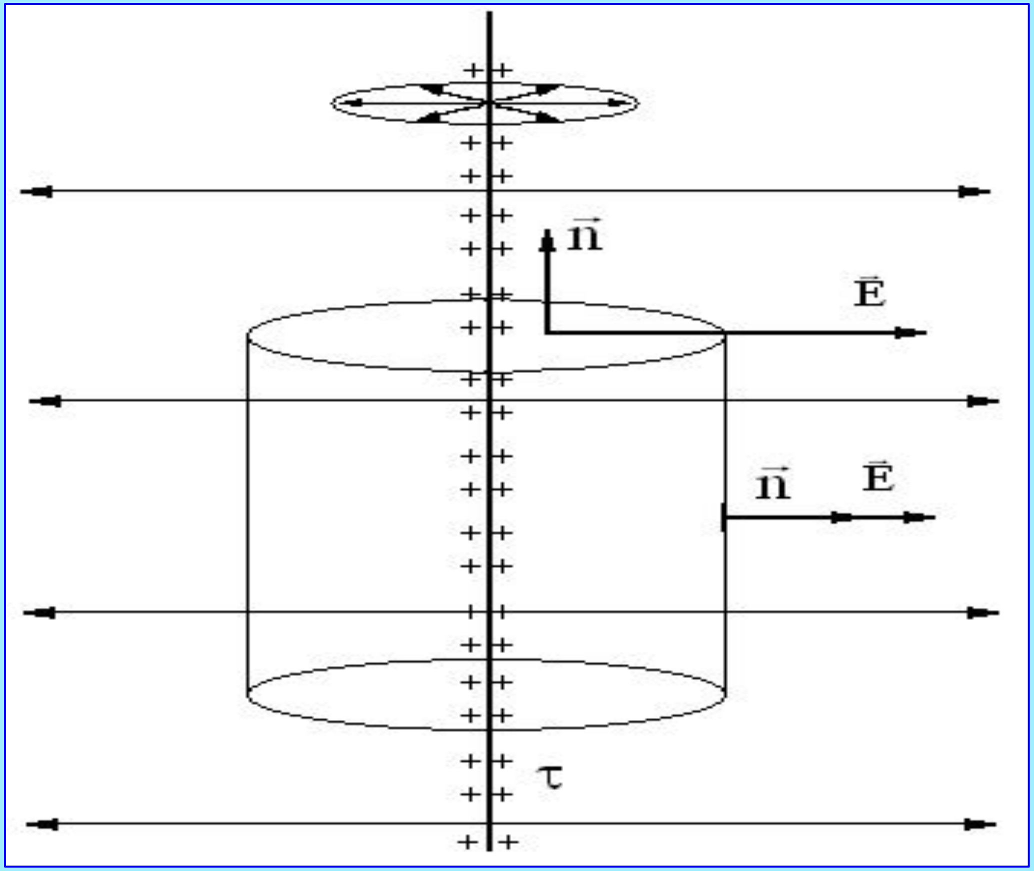
$$\tau = \frac{dq}{dl}$$

Будем считать заряд нити положительным по знаку.

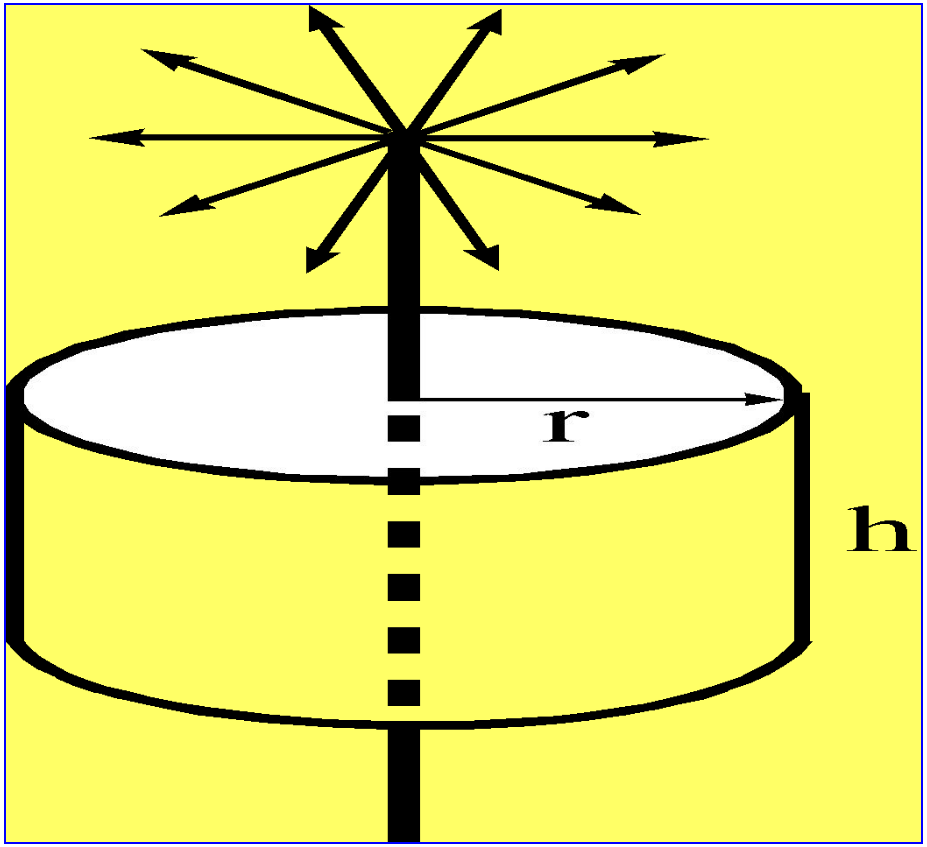
Вычислим **напряженность** поля E на расстоянии **r** от нити.



Электрическое поле **симметрично** относительно нити. Из симметрии следует, что **силовые линии** – **радиальные прямые**, перпендикулярные к нити.



В качестве **гауссовой поверхности** следует выбрать замкнутую **цилиндрическую поверхность** радиусом **r** и высотой **h**, коаксиальную с нитью.



Поток вектора $\vec{E}$ через эту **цилиндрическую поверхность** складывается из потока через боковую поверхность и потоков через два основания цилиндра:

$$N = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_{бок.}} E_n dS + \int_{S_{верх.осн}} E_n dS + \int_{S_{ниж.осн.}} E_n dS.$$

Второй и третий интегралы (потоки напряжённости через основания) равны нулю, так как эти основания параллельны линиям $\vec{E}$:

$$\left(\int_{осн.} E_n dS = 0 \right)$$

На боковой же поверхности цилиндра $\vec{E} \parallel d\vec{S}$.

Тогда поток через боковую поверхность цилиндра:

$$N = \int\limits_{S_{бок.}} E_n dS = \int\limits_{S_{бок.}} E dS = E \int\limits_{S_{бок.}} dS = E\, S_{бок.} = E \cdot 2\pi r h$$

Гауссова цилиндрическая поверхность заключает в себе заряд:

$$q' = \tau h$$

.

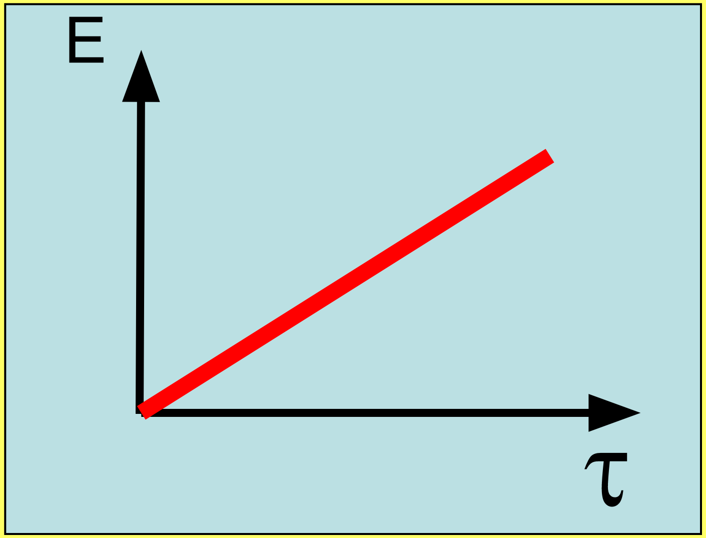
По теореме Гаусса: $N = \dfrac{q'}{\varepsilon_0}$. Тогда $E \cdot 2\pi r h = \dfrac{\tau h}{\varepsilon_0}$.

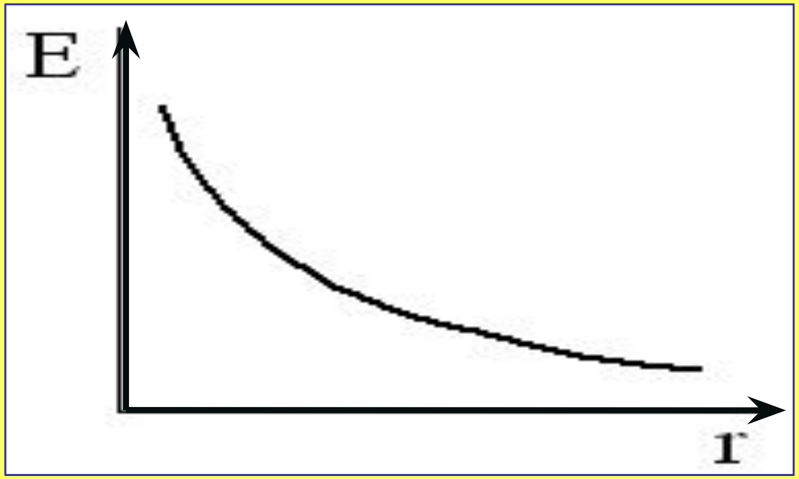
Окончательно получим: $$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Напряженность поля нити:

- **прямо пропорциональна** линейной плотности заряда;
- **обратно пропорциональна** расстоянию от нити.

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2k\tau}{r}$$





Для вычисления **потенциала** используем формулу связи напряженности и потенциала: $d\varphi = -E_r\, dr$

Проинтегрируем обе части выражения:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -\int_{r_1}^{r_2} E_r\, dr \longleftarrow \quad \mathrm{E} = \frac{2k\tau}{r}$$

Проведем интегрирование, подставив в последнее выражение формулу напряжённости.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{2k\tau}{r} \cdot dr = 2k\tau \cdot \ln\frac{r_1}{r_2}$$

Конкретную зависимость потенциала от расстояния получим, если примем,

что при $r_1 = 0$ потенциал равен $\varphi_1 = \varphi_0$,

а при $r_2 = r$ потенциал равен $\varphi_2 = \varphi_r$.

Тогда можно записать

$$\varphi_r = \varphi_0 - 2k\tau \cdot \ln r$$

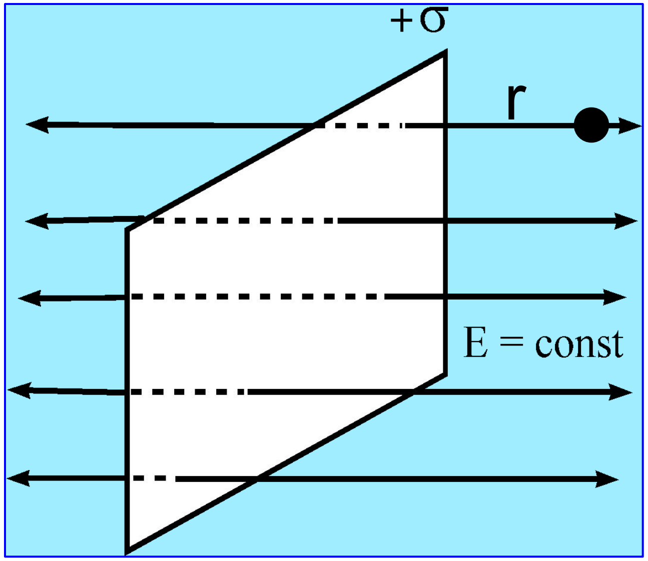
Потенциал убывает с увеличением расстояния по закону натурального логарифма от максимального значения φ_0 до нуля.

2. Электрическое поле заряженной плоскости

Пусть бесконечная плоскость равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

Вычислим **напряжённость** поля на расстоянии **r** от плоскости.



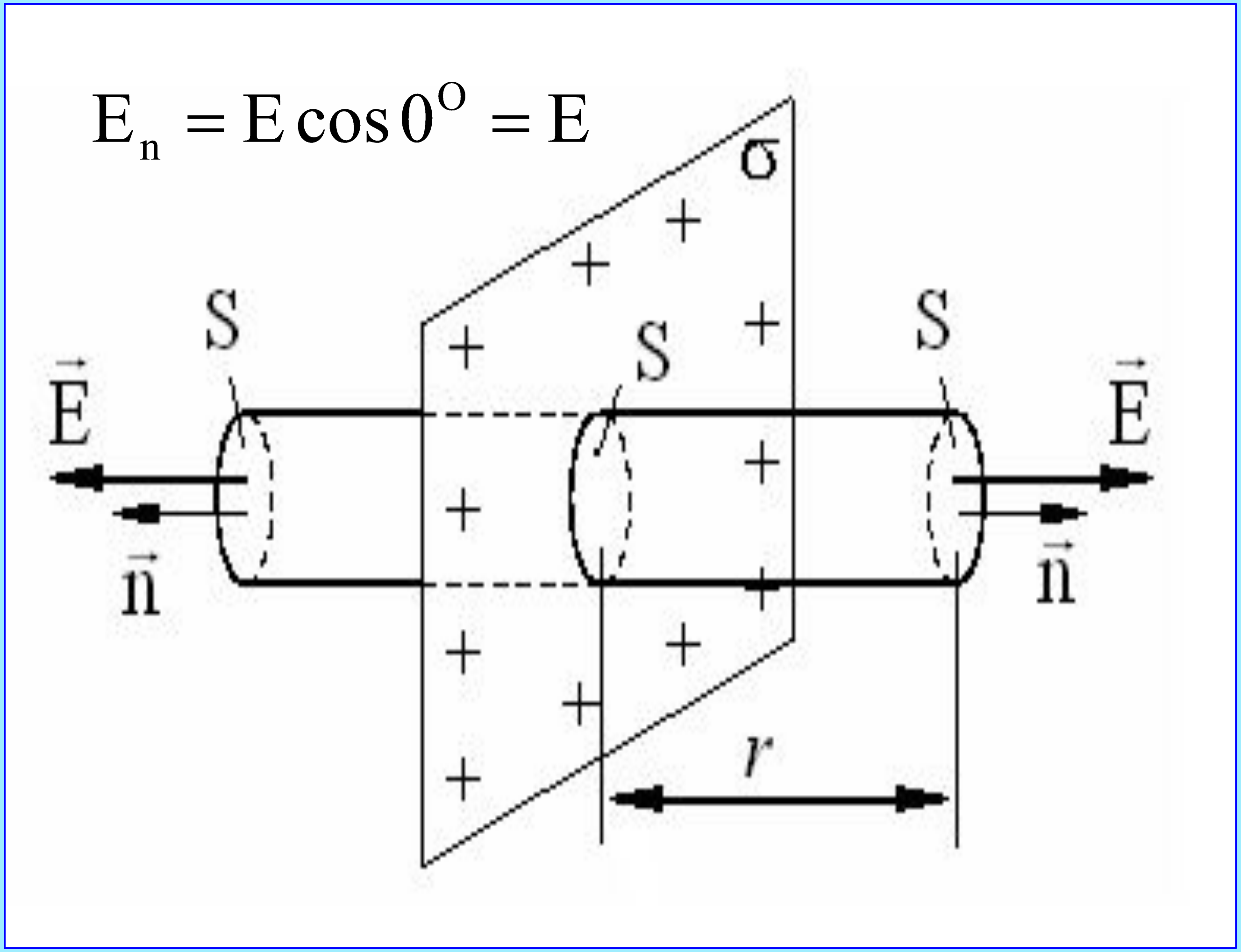
Силовые линии в обе стороны **параллельны** между собой и **перпендикулярны** плоскости.

Напряжённость поля в точках, расположенных по обе стороны от плоскости на одинаковых расстояниях:

- **равна по величине;**
- **противоположна по направлению.**

Гауссовой поверхностью является **поверхность цилиндра,** образующие которого параллельны линиям поля, а основания S расположены на одинаковых расстояниях r от плоскости.

Гауссова поверхность цилиндрической формы



Полный поток линий $\vec{E}$ через эту поверхность складывается из потоков через основания цилиндра и его боковую поверхность:

$$N = \oint\limits_{\substack{\text{цил.}\\\text{пов.}}} E_n dS = 2\int\limits_{\text{осн.}} E_n dS + \int\limits_{\substack{\text{бок.}\\\text{пов.}}} E_n dS = 2ES_{\text{осн.}}$$

Поток через боковую поверхность равен нулю, так как вектор напряжённости параллелен этой поверхности.

Поток вектора напряжённости через два основания:

$$N = 2ES_{\text{осн}}$$

Внутрь цилиндра попадает заряд: $q' = \sigma S_{осн}$.

Используя теорему Гаусса $N = \dfrac{q'}{\varepsilon_0}$,

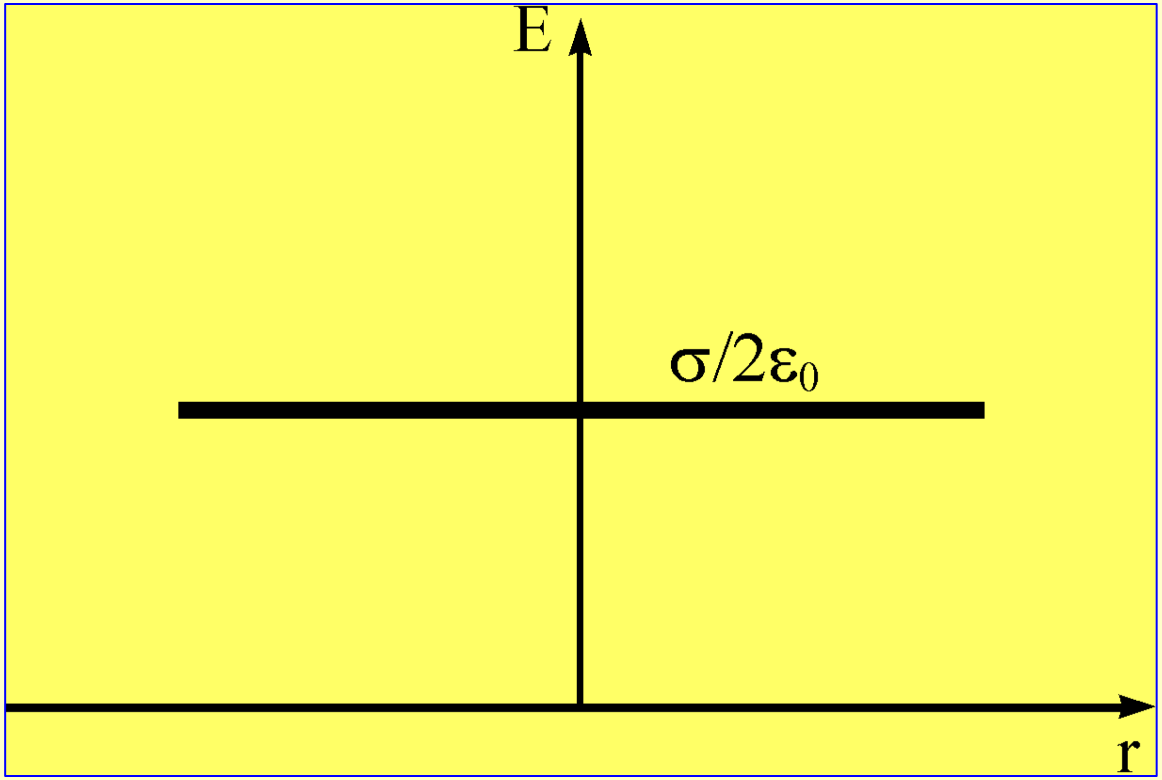
получим равенство:

$$2ES_{осн} = \frac{\sigma S_{осн}}{\varepsilon_O}.$$

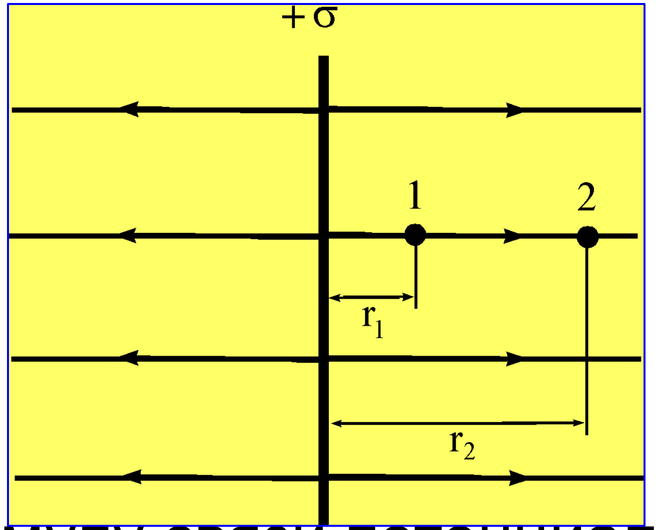
Напряжённость электрического поля плоскости определяется формулой: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Электрическое поле бесконечной равномерно заряженной плоскости – **однородное**

(Е не зависит от r).



Определим **разность потенциалов** двух точек, расположенных на одной силовой линии.



Запишем формулу связи потенциала с напряжённостью:

$$d\varphi = -E dr \quad \leftarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Подставим формулу напряжённости и проинтегрируем полученное выражение.

Тогда $$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot dr$$ или $$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(r_1 - r_2)$$

Примем, что при $r_1 = 0$ потенциал равен $\varphi_1 = \varphi_0$

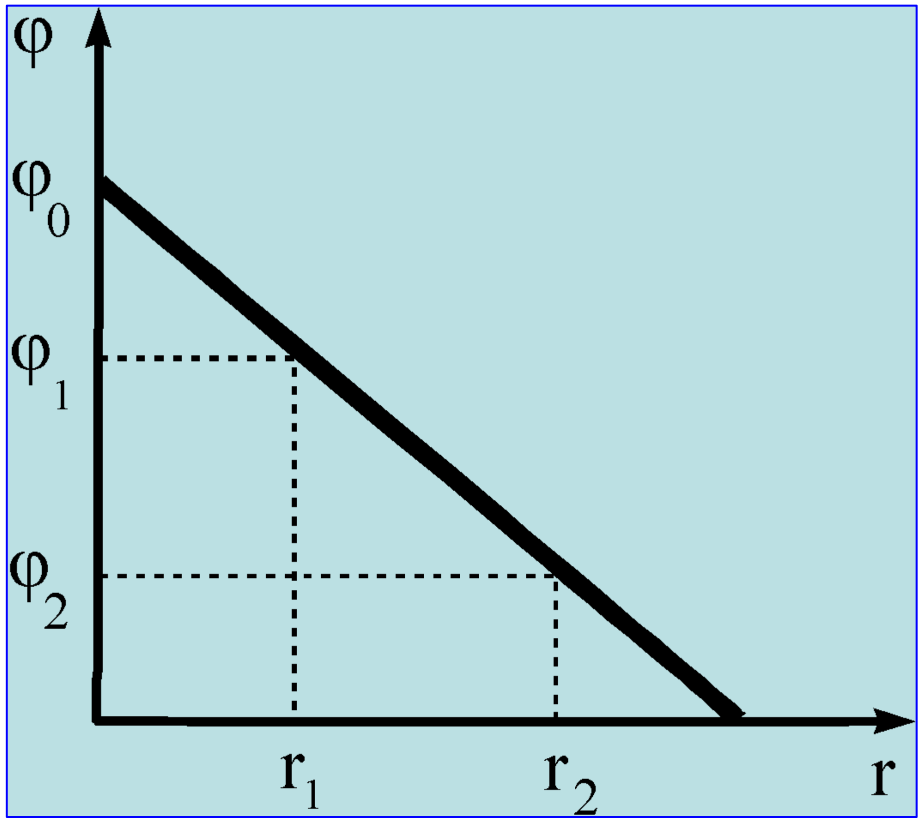
и при $r_2 = r$ потенциал равен $\varphi_2 = \varphi_r$

Тогда $$\varphi_r - \varphi_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(0 - r)$$

$$\varphi_r = \varphi_0 - \frac{\sigma r}{2\varepsilon_0}$$

Потенциал линейно убывает с увеличением расстояния от максимального значения до нуля.

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\sigma r}{2\varepsilon_0}$$



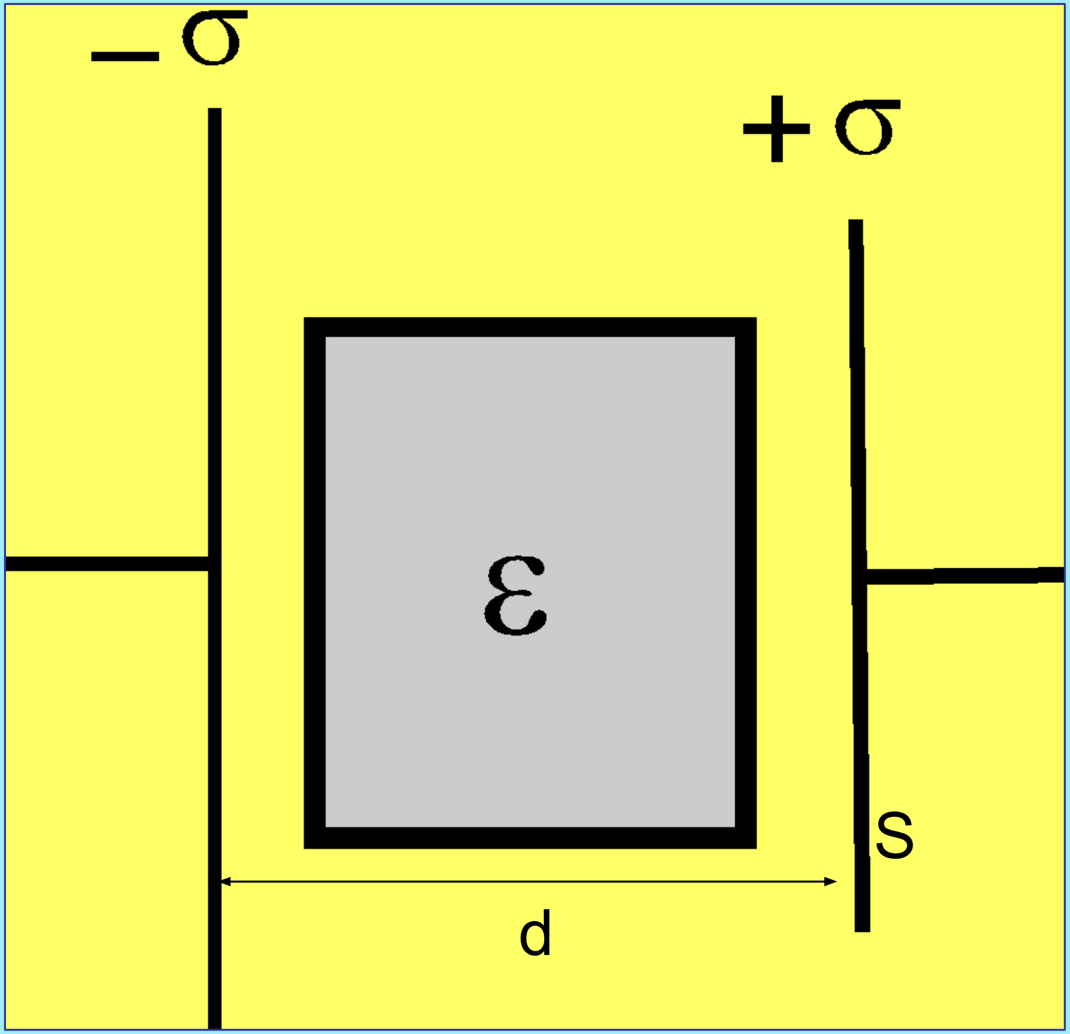
3. Электрическое поле плоского конденсатора

Плоским конденсатором называется система двух заряженных металлических плоскостей (пластин), находящихся на расстоянии d друг от друга.

Плоскости заряжены разным по знаку, но одинаковым по величине зарядом $q = \sigma S$, где S – площадь пластин.

Между пластинами может быть помещён диэлектрик с диэлектрической проницаемостью **ε**.

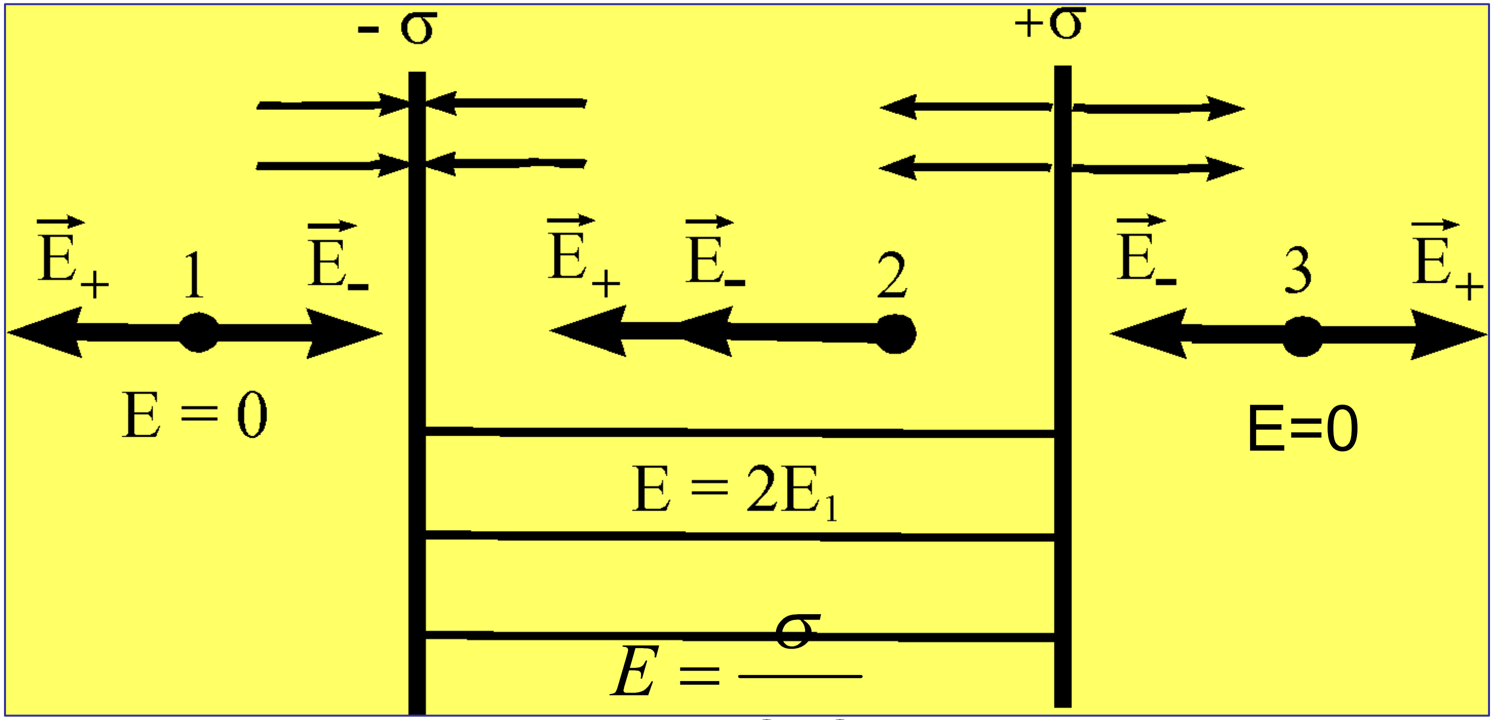
Конденсатор с диэлектриком



Напряженность поля в конденсаторе найдем по **принципу суперпозиции**: $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$,

причем,

$$E_+ = E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$$

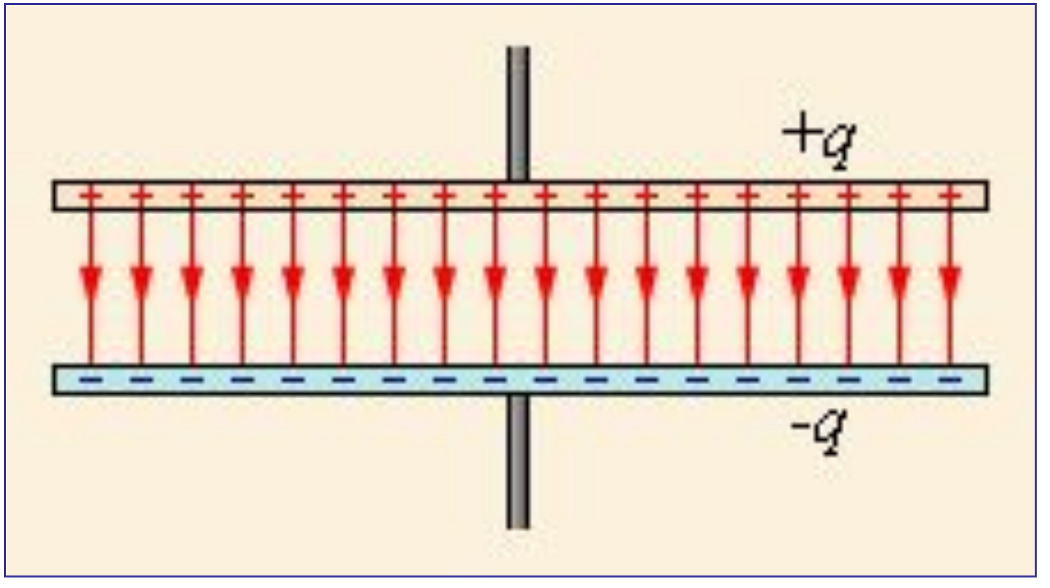


$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_O\varepsilon}$$

Напряжённость поля в конденсаторе с диэлектриком:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

Электрическое поле в плоском конденсаторе с бесконечными пластинами – **однородное**.



Определим зависимость **потенциала** от расстояния:

$$d\varphi = -Edr$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -\int_{r_1}^{2} Edr$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma}{\varepsilon_O} dr$$

После интегрирования:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_O}(r_2 - r_1)$$

Примем, что при $r_1 = 0$ потенциал равен φ_O

и при $r_2 = d$ потенциал равен φ_d

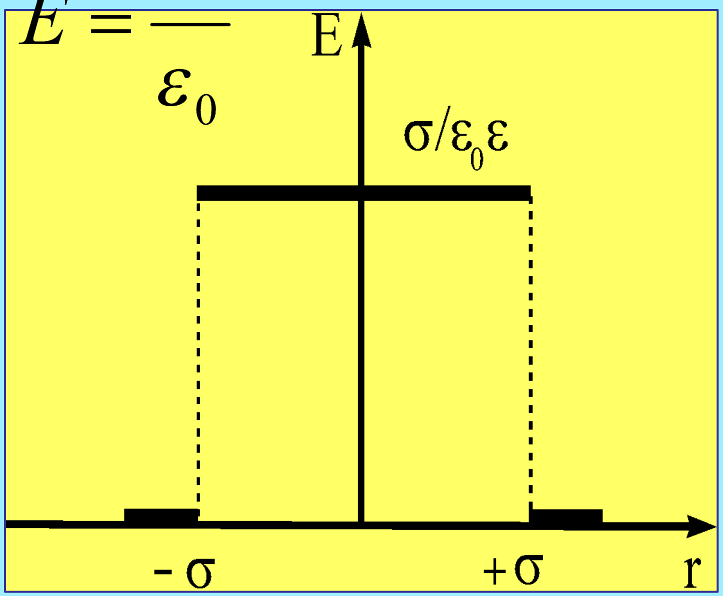
Получим
$$\varphi_d - \varphi_O = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} d$$

Окончательно
$$\varphi_d = \varphi_O - \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} d$$

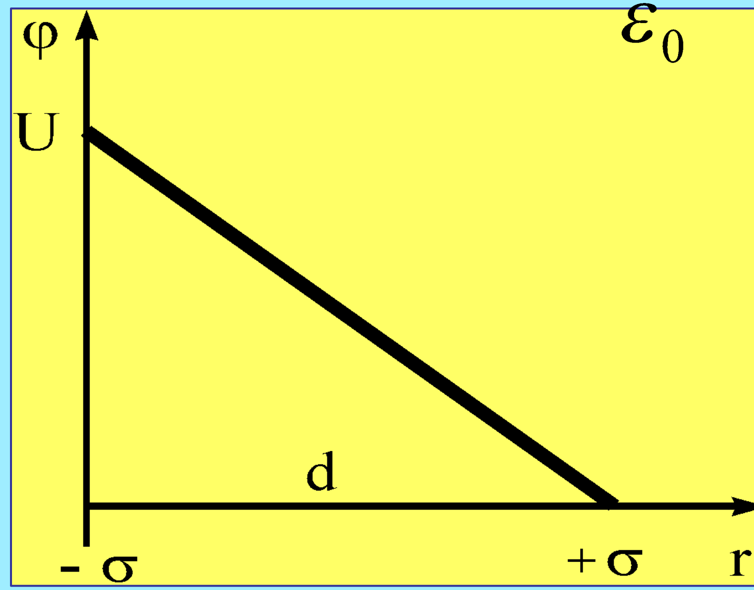
Потенциал линейно уменьшается от одной пластины конденсатора к другой.

Зависимости E (r) и φ (r) для воздушного конденсатора

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



$$\varphi_d=\varphi_O-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$$

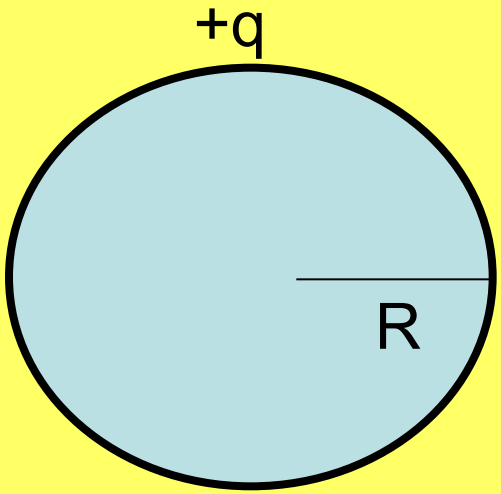


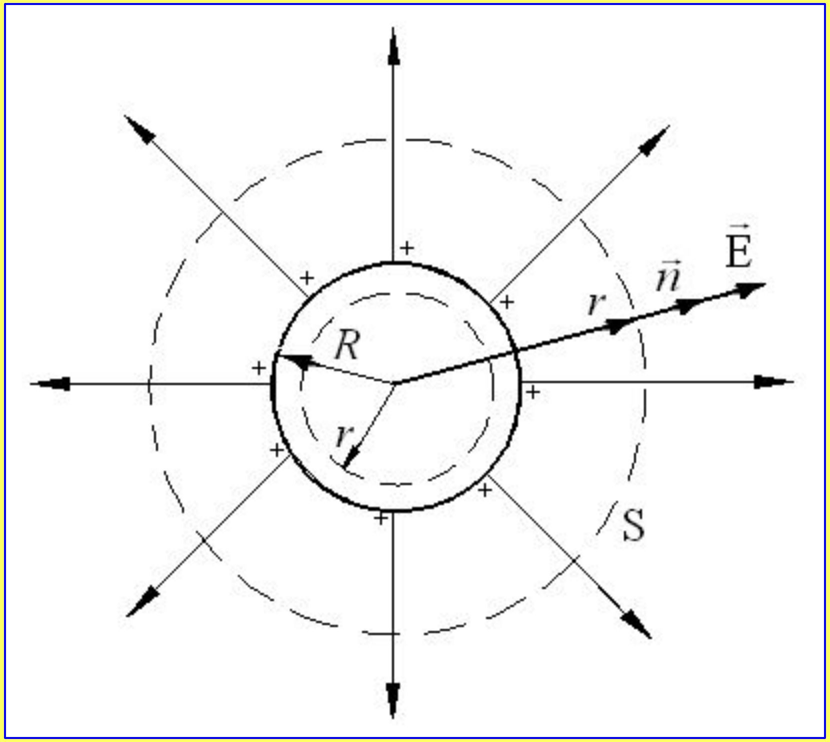
Напомним, что в однородном поле:

$$\mathrm{E}=\frac{\left|\varphi_{\mathrm{O}}-\varphi_{\mathrm{d}}\right|}{\Delta \mathrm{r}}=\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{d}}$$

4. Электрическое поле заряженной сферы

Обозначим: **R**– радиус сферы, **q** – ее заряд.

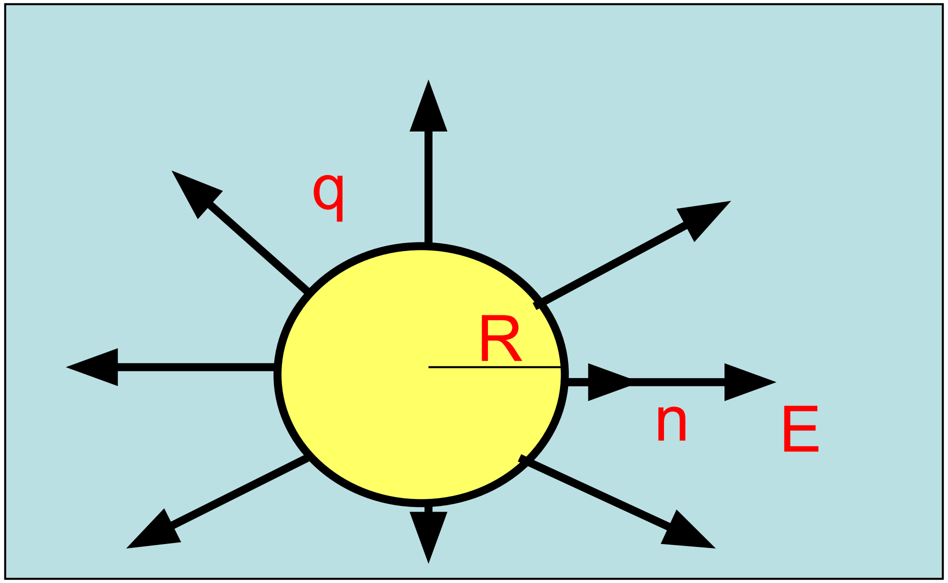




Заряды расположены на поверхности сферы, причём

$$q = \sigma S = \sigma \cdot 4\pi R^2$$

σ - поверхностная плотность заряда/



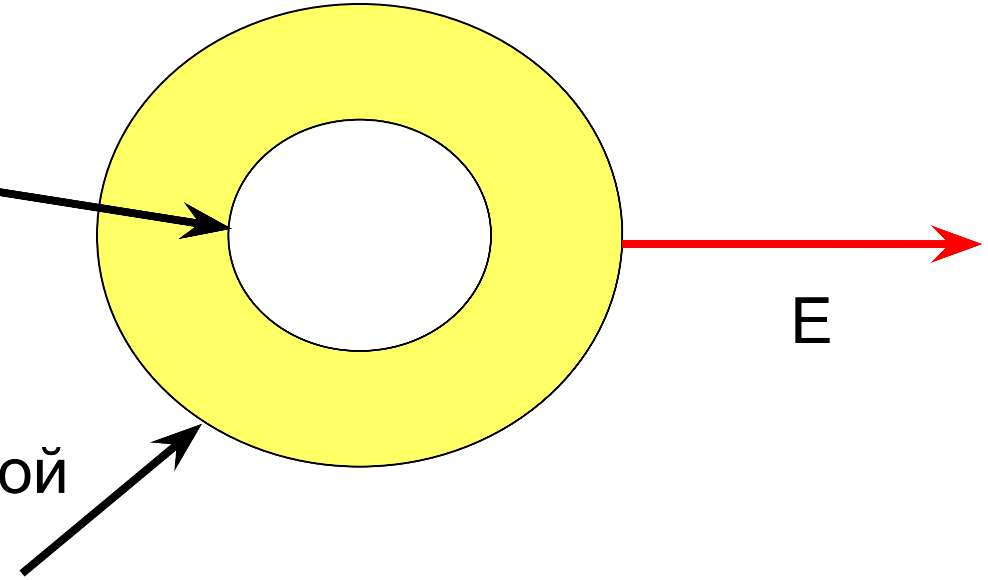
Электрическое поле заряженной сферы – **центральное, обладает сферической симметрией.**

В качестве **гауссовой поверхности** следует выбрать **сферу** радиуса **r**.

Рассмотрим два случая: **а) r < R;** **б) r ≥ R.**

случай 1: r < R

Гауссова поверхность радиусом **r**



Поверхность заряженной сферы радиусом **R**

Сферическая **гауссова** поверхность радиуса **r** не охватывает никакого заряда $q' = 0$.

Поток вектора напряжённости сквозь гауссову поверхность:

$$N = \oint_S \vec{E} d\vec{S}$$

Используя теорему Гаусса, получим:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 0$$

Таким образом, **напряженность** поля **внутри заряженной сферы равна нулю** (E = 0).

$$E = 0$$

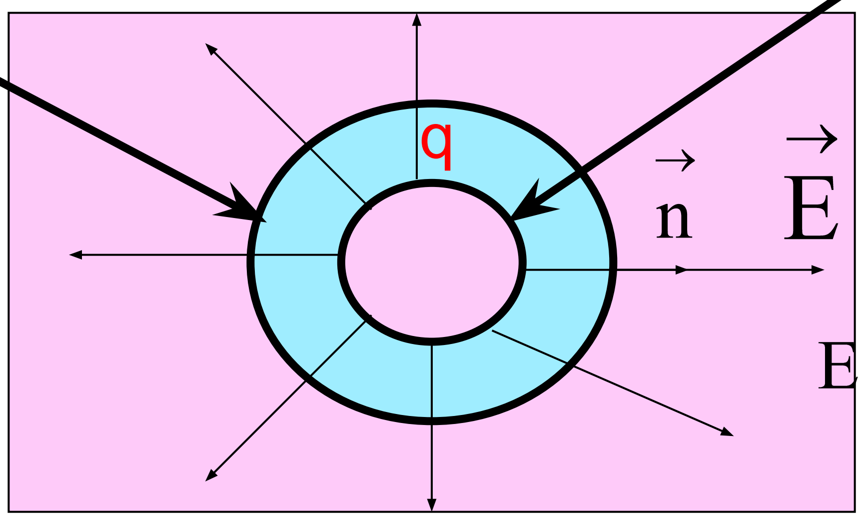
Случай 2: r ≥ R

Так как $\vec{E} \parallel \vec{n}$ во всех точках гауссовой поверхности, то поток силовых линий через гауссову поверхность радиуса r равен:

$$N = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E_n dS = E \oint_S dS = ES = E \cdot 4\pi r^2$$

$\vec{E}$

Гауссова поверхность Поверхность сферы



$$E_n = E\cos 0^O = E$$

Внутрь гауссовой поверхности попадает весь заряд сферы q, создающий поле и расположенный на поверхности сферы радиуса R:

$$q = \sigma \cdot 4\pi R^2$$

Используя теорему Гаусса, получим:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\varepsilon_O}$$

Напряжённость поля в точках, расположенных

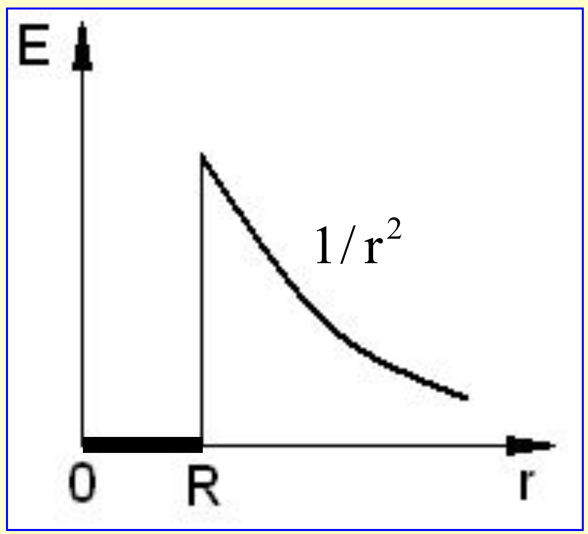
вне сферы: на поверхности сферы:

$$E(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_O r^2}$$

$$E_R = \frac{\sigma}{\varepsilon_O}$$

Из полученных расчётов следует, что:

- **внутри сферы поле отсутствует (E = 0);**
- **при переходе через заряженную поверхность напряженность скачком возрастает до максимального значения** $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ **;**
- **затем убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра сферы.**



Вычислим потенциал: $$d\varphi = -E_r\,dr$$

Для области **(r > R)** можно записать:

$$\varphi_r - \varphi_\infty = \int_r^\infty E(r) \cdot dr$$

Потенциал в бесконечности $\phi_\infty = 0$.

Тогда с использованием формулы $$E(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_O r^2}$$

получим

$$\varphi_r = \int_r^\infty \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_O r^2} dr = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_O r}$$

Потенциал на поверхности заряженной сферы (при значении **r = R**) равен значению

$$\varphi_R = \frac{\sigma R}{\varepsilon_O}$$

Для точек, лежащих внутри сферы (область: **r < R**) можно записать

$$\varphi_r - \varphi_R = -\int_R^r E(r) \cdot dr$$

.

Но так как напряжённость E = 0, то

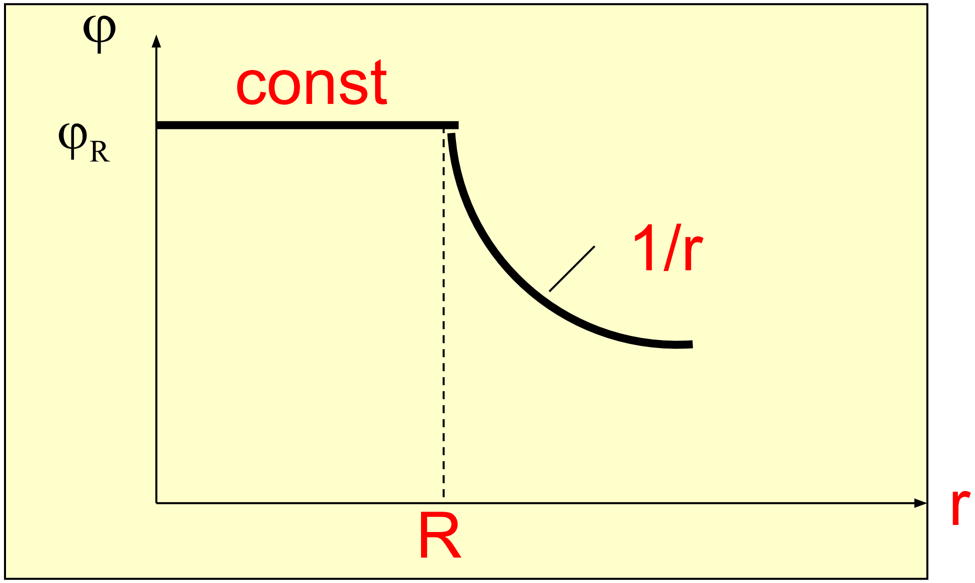
$$\varphi_r = \varphi_R$$

Потенциал:

- внутри сферы не зависит от расстояния и равен значению потенциала на его поверхности;

$$\varphi_R = \frac{\sigma R}{\varepsilon_O} = \text{const}$$

- затем убывает обратно пропорционально расстоянию от центра сферы.



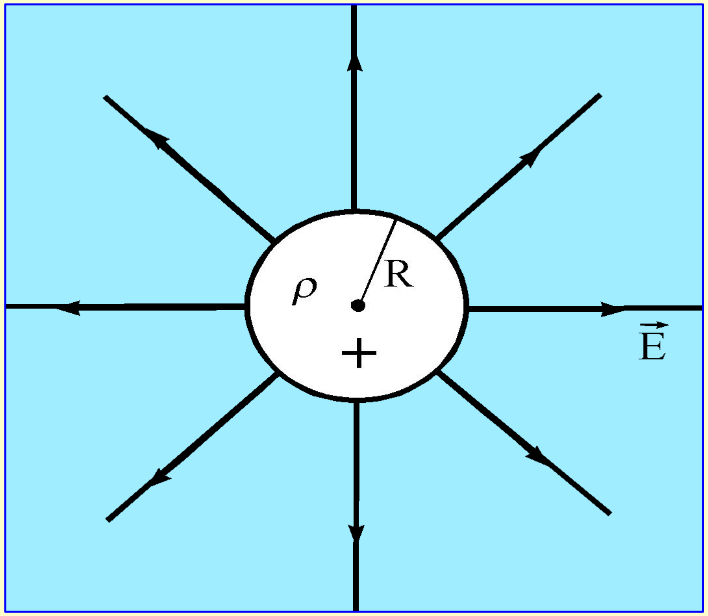
5. Электрическое поле заряженного шара

Рассмотрим шар из материала с диэлектрической проницаемостью **ε** и радиусом R.

Шар равномерно заряжен с объемной плотностью заряда ρ.

Общий заряд шара:

$$q = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$$



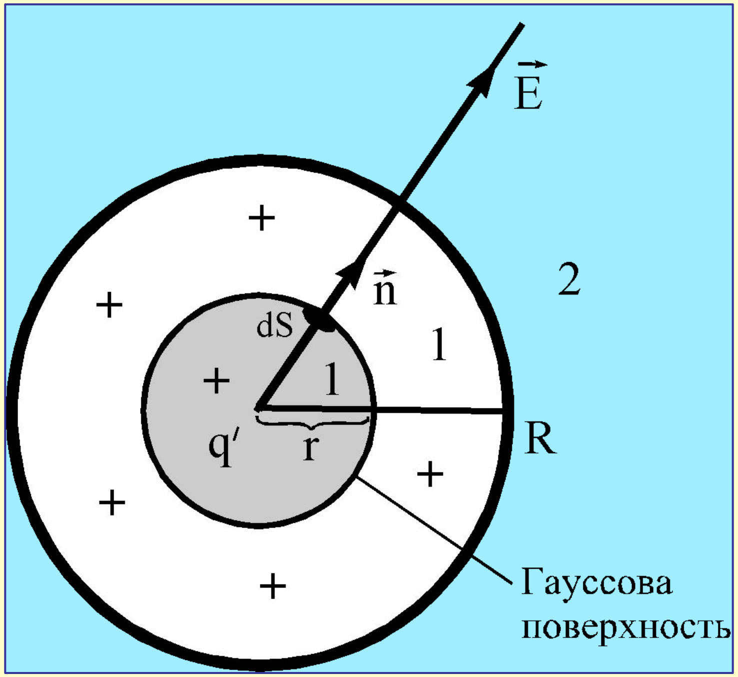
Электрическое поле заряженного шара - **центральное, обладает сферической симметрией.**

На одном и том же расстоянии *r* напряженность будет одинаковой.

Представим **гауссову поверхность в виде сферы радиуса r.**

Рассмотрим область внутри шара

r < R



Линии напряженности пересекают гауссову поверхность.

Вектор $\vec{E}$ и вектор нормали $\vec{n}$ к элементу сферической поверхности совпадают по направлению в любой точке гауссовой поверхности, поэтому

$$E_n = E\cos 0^O = E$$

Поток вектора через сферическую гауссову поверхность равен

$$N = \oint\limits_{\substack{\text{гаусс.} \\ \text{пов.}}} E_n dS = E\oint\limits_{S} dS = E \cdot 4\pi r^2$$

Заряд, заключённый внутри гауссовой поверхности, равен

$$q' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

Используя теорему Гаусса, получим:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

Окончательно

$$E_r = \frac{q'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0}$$

В точках, лежащих на самой поверхности шара ($r = R$), напряженность равна

$$E_R = \frac{\rho R}{3\varepsilon\varepsilon_0}$$

Таким образом, для точек, лежащих внутри шара, **напряженность линейно возрастает с увеличением расстояния** от нулевого значения в центре шара, до значения на его поверхности.

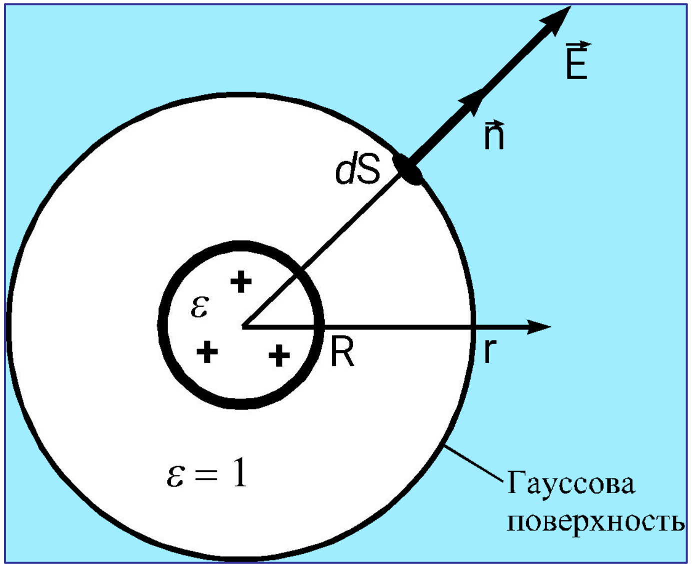
В области вне шара (**r>R**), поверхность шара окружим сферической гауссовой поверхностью радиусом **r**.

Поток вектора напряжённости определим как

$$N = \oint\limits_{\substack{\text{гаусс.}\\\text{пов.}}} E_n dS = E \cdot 4\pi r^2$$

Внутри гауссовой поверхности находится заряд $q' = q$, равный заряду шара.

$$q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$



Объединяя полученные формулы теоремой Гаусса, получим

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}$$

В области вне шара точки пространства находятся в воздухе, поэтому величина ε= 1.

$$E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

В точках, лежащих на самой поверхности шара (**r = R**), напряжённость равна

$$E'_R = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}$$

Напряженность поля вне шара **уменьшается с увеличением расстояния обратно пропорционально квадрату расстояния** (E~ $1/r^2$).

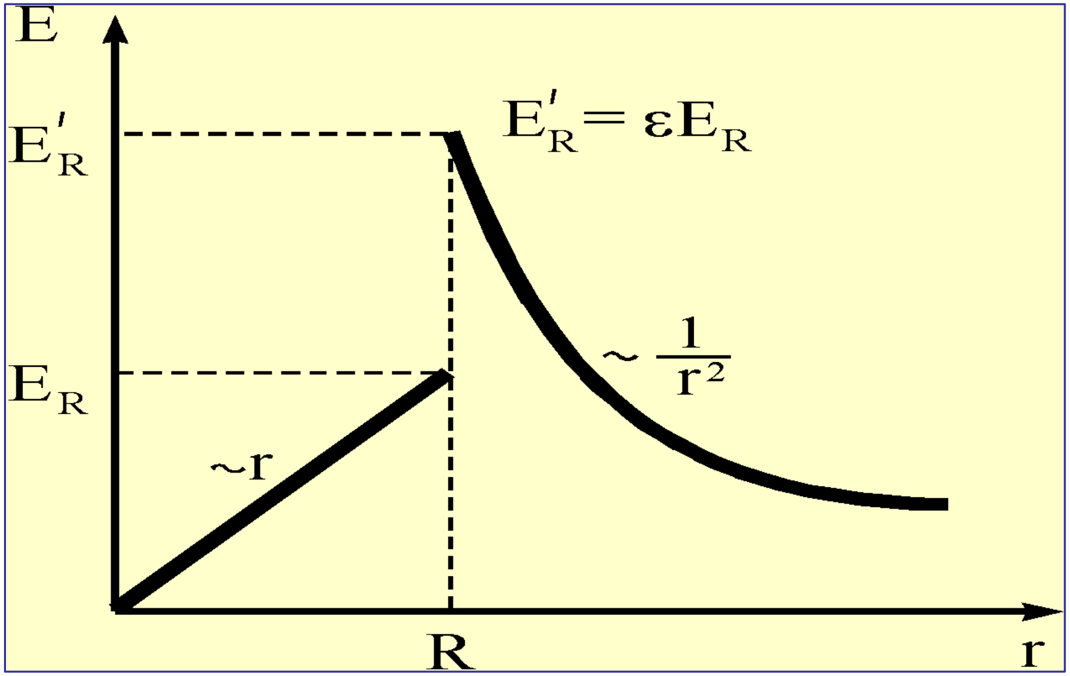
Сравним формулы $E_R = \dfrac{\rho R}{3\varepsilon\varepsilon_0}$ и $E'_R = \dfrac{\rho R}{3\varepsilon_0}$.

Они дают значения напряженности на поверхности шара: эти значения **не равны между собой**.

Это говорит о том, что **напряженность** в точках на поверхности шара **испытывает скачок.**

Величина скачка напряженности зависит от диэлектрической проницаемости вещества шара: чем больше ε, тем больше величина скачка напряженности.

Графическая зависимость E(r)



При расчете потенциала надо определить ту точку, в которой потенциал равен нулю.

Такая точка находится в бесконечности.

Тогда для области (**r > R**) на основе формулы связи напряжённости с потенциалом имеем:

$$d\varphi = -Edr$$

$$\int_{0}^{\varphi_r} d\varphi = -\int_{\infty}^{r} E(r)dr$$

Подставляя выражение для напряженности электрического поля вне шара, получим

$$\varphi_r = -\int_{\infty}^{r} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

Таким образом, вне шара **потенциал убывает обратно пропорционально расстоянию** (ϕ ~ $1/r$).

Для точек, лежащих на поверхности шара (**r = R**), получим значение потенциала, равное

$$\varphi'_R = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$$

Перейдём к области точек **r < R**.

С учетом соответствующей формулы для напряженности будем производить интегрирование выражения ,

$$\int_{\varphi'_R}^{\varphi_r} d\varphi = -\int_R^r \frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0} dr$$

в котором величина потенциала $\varphi'_R = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$.

$$\varphi_r = \varphi'_R + \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0\varepsilon} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0\varepsilon}$$

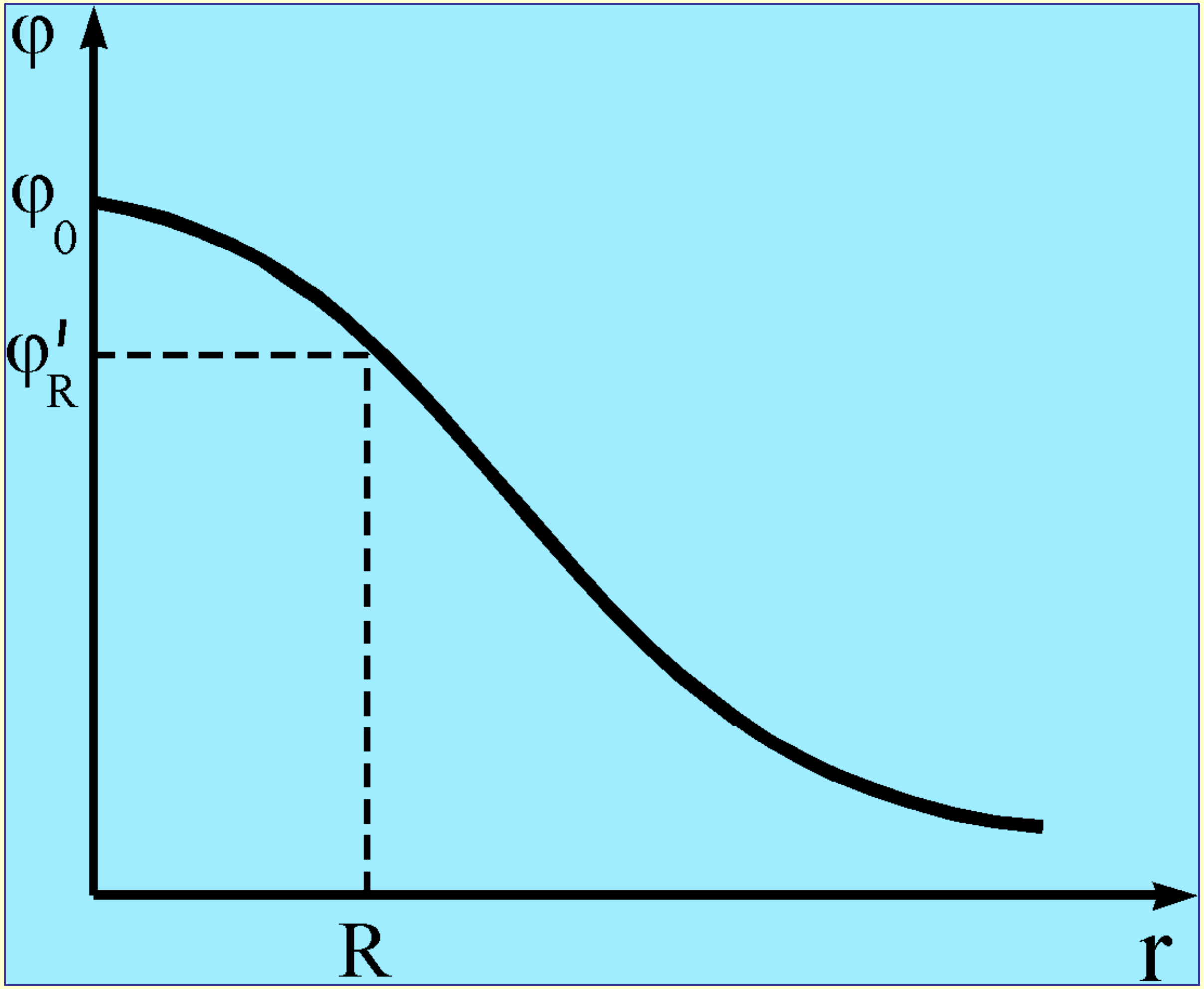
$$\varphi_r = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0\varepsilon} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\rho R^2(1+2\varepsilon)}{6\varepsilon_0\varepsilon} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0\varepsilon}$$

Зависимость φ (r) для точек внутри шара является **квадратичной.**

При **r = 0** потенциал имеет значение: $\varphi_0 = \dfrac{\rho R^2(1+2\varepsilon)}{6\varepsilon_0\varepsilon}$

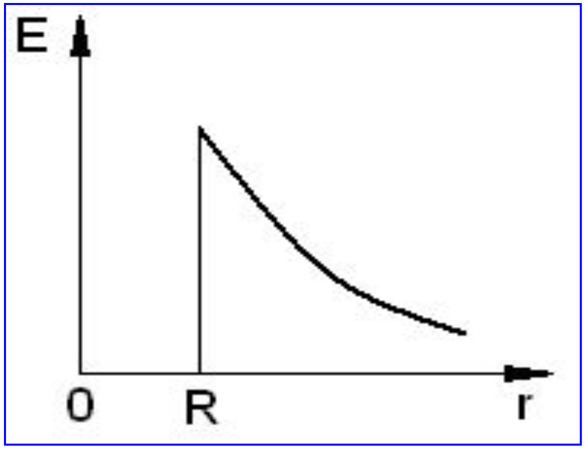
Потенциал – функция непрерывная и не должна испытывать скачков.

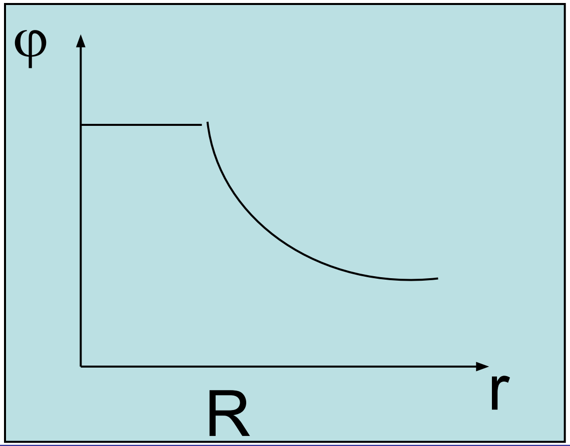
Графическая зависимость φ (r)



Сравнение электрических полей сферы и диэлектрического шара

Сфера





Шар