Тема 5. Одновимірні дискретні та неперервні випадкові величини (основні поняття)

Змістовий модуль ІІ. Випадкові величини

План

1. Означення дискретної випадкової величини.
2. Закон (ряд) розподілу дискретної випадкової величини.
3. Функція розподілу дискретної випадкової величини.
4. Форми завдання неперервної випадкової величини та її властивості
5. Числові характеристики випадкових величин
    5.1. Характеристики положення випадкової величини на числовій осі
    5.2. Моменти випадкових величин та їх властивості

4.1. Основні поняття

Одним з основних понять теорії ймовірностей є поняття випадкової величини.

Одновимірною випадковою величиною називають величину, що у результаті експерименту приймає заздалегідь невідоме значення.

Для позначення випадкових величин використовують великі літери латинського алфавіту ***X, Y, Z,*** а для позначення їх можливих значень – відповідно малі літери x, y, z.

Приклади випадкових величин:

1. кількість студентів, що присутні на лекції;
2. кількість сонячних днів у році;
3. вага осколка снаряда, що розірвався;
4. час очікування громадського транспорту на зупинці;
5. температура навколишнього середовища.
6. число очок, яке випаде на верхній грані за одне кидання грального кубику ;

число бракованих виробів серед n навмання вибраних;

7. число кидань монети до першої появи герба;
8. число викликів, які надходять на телефонну станцію протягом деякого проміжку часу;
9. тривалість часу обслуговування покупця;
10. час виконання деякого завдання і т. д.

У наведених прикладах траплялися два види випадкових величин: **дискретні величини**, множини можливих значень яких скінченні або злічені, і **неперервні величини**, множини можливих значень яких суцільно заповнюють деякий інтервал.

Наведемо приклади дискретної і неперервної випадкових величин

1. Симетричну монету кидають двічі. Нехай випадкова величина X — кількість появ герба. Простір елементарних подій складається з чотирьох елементів:

$$\Omega = \{\omega_1 = (ЦЦ),\ \omega_2 = (ЦГ),\ \omega_3 = (ГЦ),\ \omega_4 = (ГГ)\}.$$

Таблиця значень випадкової величини X має таку форму:

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$X(\omega_i)$	0	1	1	2

2. Нехай випадкова величина Y є час очикування трамвая на зупинці. Якщо розклад руху трамваїв невідомий, але відомо, що проміжок часу між прибуттям трамваю не перевищує T, то значения У належить відрізку [0, T].

4.1. Означення дискретної випадкової величини

За типом простору можливих значень випадкові величини діляться на ***дискретні і неперервні.***

Випадкова величина називається **дискретною**, якщо:

1. сукупність її можливих значень удається перерахувати −

x1, x2, …, xn (або x1 , x2 , …, xn , …), тобто значення належать зчисленній множині − скінченній або нескінченній;

2. можна знайти відповідні ймовірності k { k } p = P X = x того, що випадкова величина X приймає ці значення .

Аби мати вичерпну характеристику випадкової величини, необхідно знати її закон розподілу.

4.2. Закон (ряд) розподілу дискретної випадкової величини.

Закон розподілу випадкової величини **–** це співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними ймовірностями.

У теорії ймовірностей розрізняють декілька форм завдання закону розподілу дискретної випадкової величини, найбільш корисні з яких є три:

1. ряд розподілу;

2. многокутник розподілу;

3. інтегральна функція розподілу.

Розглянемо послідовно кожну форму завдання закону розподілу дискретної випадкової величини.

4.2. Закон (ряд) розподілу дискретної випадкової величини

Ряд розподілу являє собою таблицю, що складається з двох рядків. У першому рядку розташовуються в порядку зростання всі можливі значення дискретної випадкової величини. В другому – відповідні ймовірності.

Загальний вид ряду розподілу відповідає табл.4.1.

Таблиця 4.1 − Закон розподілу у вигляді ряду розподілу

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
$\boldsymbol{p_i}$	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

4.2. Закон (ряд) розподілу дискретної випадкової величини

В результаті експерименту випадкова дискретна величина повинна прийняти одне з можливих значень.

Оскільки всі можливі події *{X = x1}, {X = x2}, ... утворюють повну групу* несумісних подій, то сума відповідних імовірностей обов'язково повинна дорівнювати одиниці (умова норм

$$\sum_{i=1}^{n\,(+\infty)} p_i = 1 .$$

4.2. Закон (ряд) розподілу дискретної випадкової величини

Многокутник розподілу це графічне зображення ряду розподілу ймовірностей. По осі абсцис відкладаються можливі значення випадкової величини, а по осі ординат − імовірності цих значень. Для наочності отримані точки з’єднуються відрізками прямих.

Таким чином **многокутник розподілу** – це діаграма залежності ймовірностей **pі** можливих значень випадкової величини від самих цих значень хі (i={1, 2, …,n}) (рис.

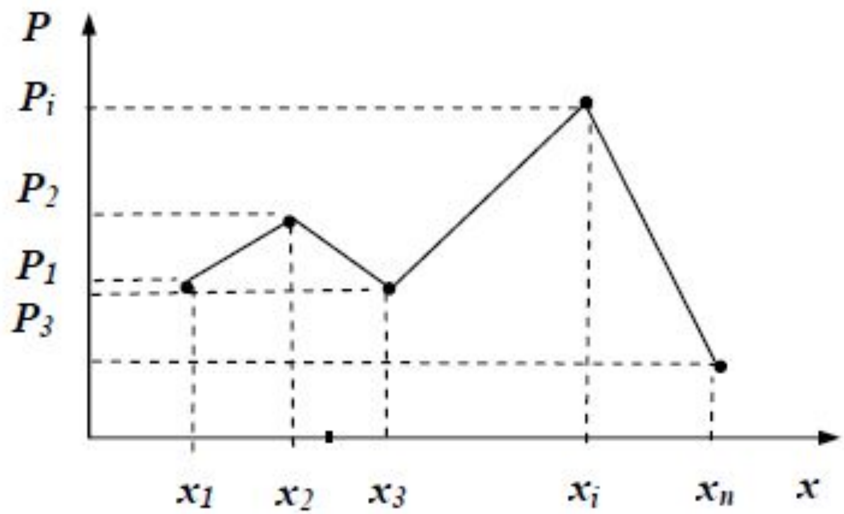


Рис. 4.1

3. Функція розподілу дискретної випадкової величини

Інтегральною функцією розподілу випадкової величини X називається функція F(x), яка при кожному значенні свого аргументу x чисельно дорівнює ймовірності того, що випадкова величина X опиниться менше, ніж значення

$$F(x) = P\ \{\ X < x\ \}\ .$$

3. Функція розподілу дискретної випадкової величини

Інтегральна функція має властивості:

Властивість 1. 0 ≤ F(x) ≤ 1, оскільки F(x) – ймовірність.

Властивість 2. F(x) – неспадна функція,

тобто якщо $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$.

3. Функція розподілу дискретної випадкової величини

Доведення. Нехай $x_2 > x_1$, тоді подію, яка полягає в тому, що випадкова величина X прийме значення менше x_2 , можна розділити на дві несумісні події:

A1 – X прийме значення менше x_1 з імовірністю $P\{X<x_1\}$;

A2 – X прийме значення з інтервалу $x_1 \le X < x_2$ з імовірніст $P\{x_1 \le X < x_2\}$;

3. Функція розподілу дискретної випадкової величини

За теоремою додавання несумісних подій отримуємо:

$$P\{X < x_2\} = P(A_1 + A_2) = P\{X < x_1\} + P\{x_1 \le X < x_2\}.$$

Звідси

$$P\{X < x_2\} - P\{X < x_1\} = P\{x_1 \le X < x_2\},$$

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 \le X < x_2\} \ge 0,$$ що і требо було довести.

Отже, $F(x)$ – неспадна функція.

3. Функція розподілу дискретної випадкової величини

Наслідок 1. ***Ймовірність влучення випадкової величини в заданий діапазон***

Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, що містяться в інтервалі (a, b), дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі:

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)$$

3. Функція розподілу дискретної випадкової величини

Властивість 3.

$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$; оскільки $P\{X<-\infty\}=0$ − неможлива подія.

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$; оскільки $P\{X<+\infty\}=1$ − достовірна подія.

Властивість 4. $F(x)$ – неперервна зліва функція, тобто $\lim\limits_{x\to a-0} F(x)=F(a)$. .

Аналітичний запис функції розподілу $F(x)$ має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sum_{i:x_i<x} p_{i,} & x>0. \quad \dots\end{cases} \qquad (4.4)$$

Тобто для дискретних випадкових величин $F(x)$ – розривна ступінчаста функція, неперервна зліва (рис. 4.2).

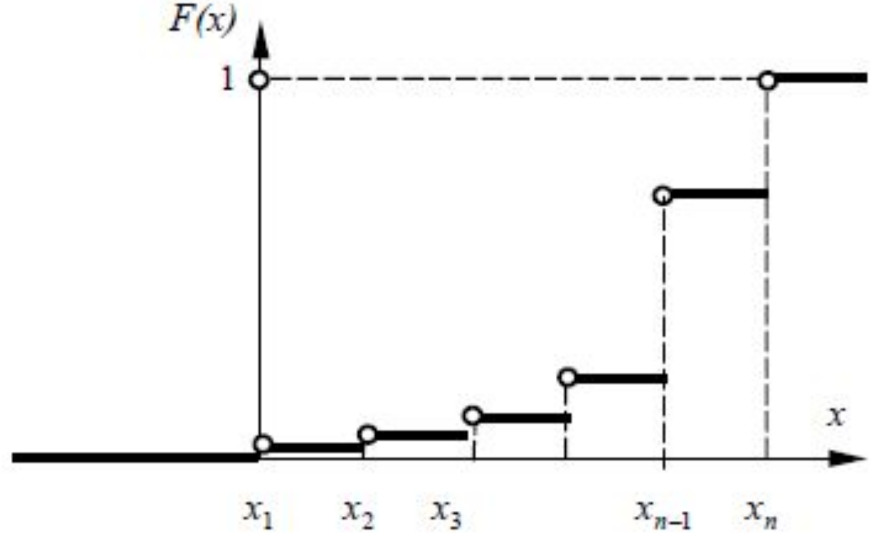


Рис. 4.2.

Задача 4.1. Ймовірність здачі в запланований термін для кожного з трьох будинків, що будуються однакова і дорівнює 0,9. Необхідно:

1). Побудувати закон розподілу випадкової величини X – кількість будинків, які здано в експлуатацію в запланований термін.

2). Визначити ймовірність попадання випадкової величини X в діапазон [2,5; 3,5), тобто ймовірність $P\{2{,}5 \le X < 3{,}5\}$.

Розв'язання. Випадкова величина X – кількість будинків, зданих в експлуатацію в запланований термін – може приймати значення 0, 1, 2 або 3.

1). За умовами прикладу

$n = 3$ − загальна кількість експериментів (кількість будинків),

$p = 0{,}9$ − ймовірність побудови кожного будинку у запланований термін,

$q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Тоді ймовірності p_i $(i = 0,1,2,3)$ того, що з 3 будинків у запланований термін буде здано рівно 0, 1, 2 або 3 визначаються за допомогою формули **Бернуллі**:

$$p_0 = P\{X = 0\} = P_3(0) = C_3^0 p^0 q^{3-0} = 1 \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}001 \;;$$

$$p_1 = P\{X = 1\} = P_3(1) = C_3^1 p^1 q^{3-1} = 1 \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}027 \;;$$

$$p_2 = P\{X = 2\} = P_3(2) = C_3^2 p^2 q^{3-2} = 1 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}243 \;;$$

$$p_3 = P\{X = 3\} = P_3(3) = C_3^3 p^3 q^{3-3} = 1 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^0 = 0{,}729 \;.$$

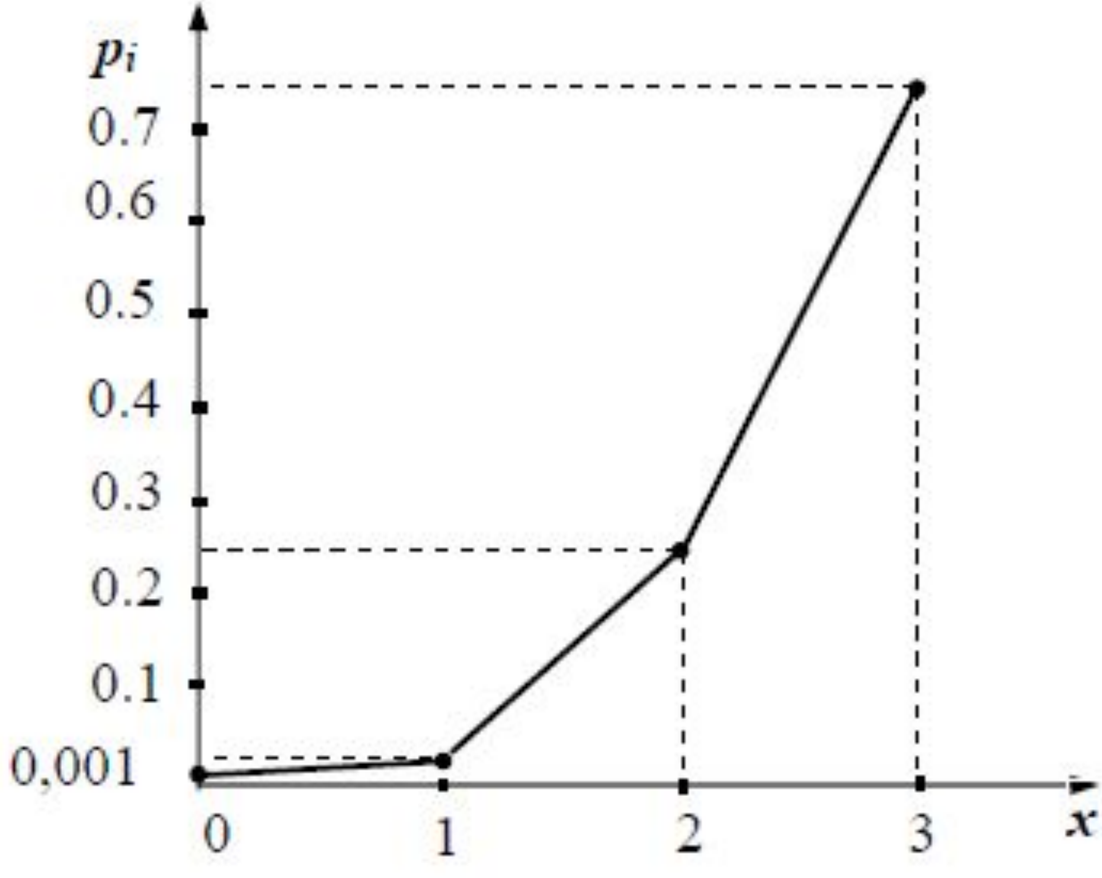
Ряд розподілу випадкової величини X набуває вигляду

x_i	0	1	2	3
p_i	0,001	0,027	0,243	0,729

Перевіримо критерій слушності побудови закону розподілу (рівність одиниці суми значень імовірностей у другому рядку ряду розподілу), тобто умову нормування за формулою (4.1):

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0,001 + 0,027 + 0,243 + 0,729 = 1.$$

Побудуємо **многокутник розподілу.**



Побудуємо **інтегральну функцію F(x)** випадкової величини X.

При побудови графіку F(x) вісь абсцис можливими значеннями випадкової величини розбивається на (n +1) діапазон, в кожному з таких діапазонів функції F(x) має постійне значення:

$x \le 0 \qquad F(x) = P\{X < 0\} = 0$;

$0 < x \le 1 \qquad F(x) = P\{X < 1\} = P\{X=0\} = 0{,}001$;

$1 < x \le 2 \qquad F(x) = P\{X < 2\} = P\{X=0\} + P\{X=1\} = 0{,}001 + 0{,}027 = 0{,}028$;

$2 < x \le 3 \qquad F(x) = P\{X < 3\} = P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\} = 0{,}028 + 0{,}243 = 0{,}271$;

$3 < x \le +\infty \qquad F(x) = P\{X < +\infty\} = P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\} + P\{X=3\} =$

$= 0{,}001 + 0{,}027 + 0{,}243 + 0{,}729 = 1.$

Таким чином, аналітичний запис функції розподілу F(x) має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 0;, \\ 0{,}001, & при \quad 0 \le x < 1; \\ 0{,}028, & при \quad 1 \le x < 2; \\ 0{,}271, & при \quad 2 \le x < 3; \\ 1, & при \quad x > 3. \end{cases}$$

На рис.4.3 зображений графік інтегральної функції розподілу, що побудована відповідно до її аналітичного запису.

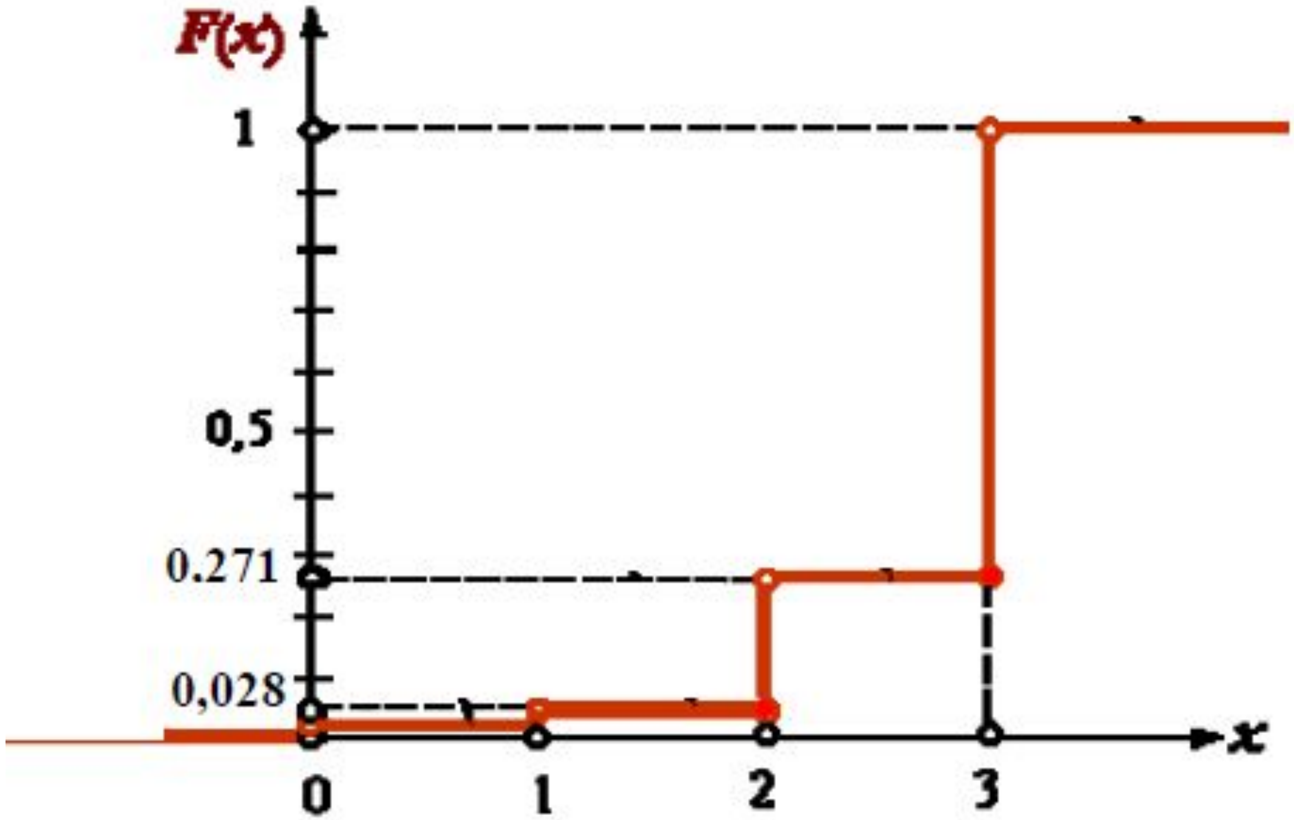


Рис. 4.3

2). Визначимо ймовірність попадання випадкової величини X в діапазон [2,5; 3,5). У даному випадку a = 2,5 , a b = 3,5.

Підставляючи у формулу (4.3) значення аргументу інтегральної функції і обчислюючи значення інтегральної функції на границях заданого діапазону, одержуємо шуканий результат:

$$P\{2,5 \leq X < 3,5\} = F(b) - F(a) =$$

$$= F(3,5) - (2,5) = 1 - 0,271 = 0,729.$$

Шукана ймовірність і значення інтегральної функції *F(x)* легко визначаються за графіком інтегральної ф

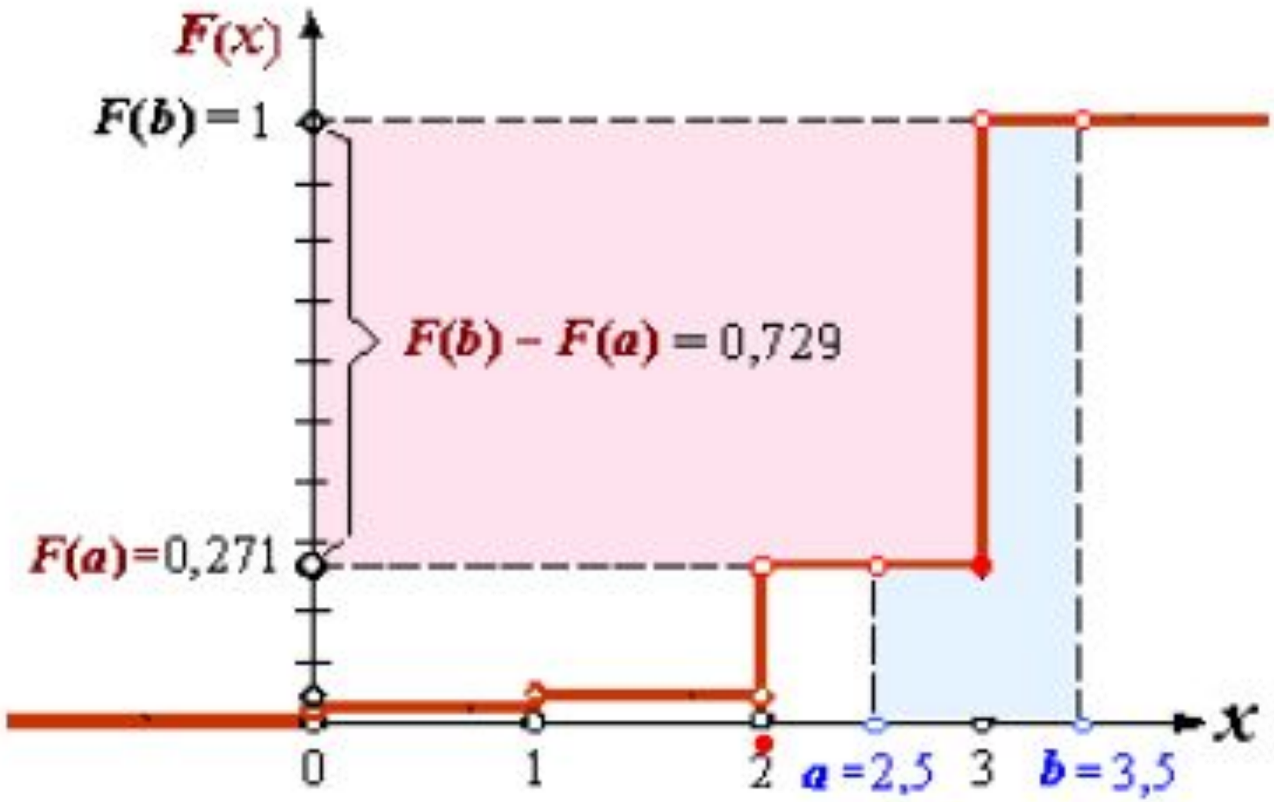


Рис. 4.4

4. Форми завдання неперервної випадкової величини та її властивості

Випадкова величина називається **неперервною**, якщо:

1. множина її значень співпадає з проміжком (кількома проміжками) числової осі, множина може бути обмеженою або необмеженою;
2. ймовірність того, що випадкова величина набуває будь-якого наперед заданого значення xi , дорівнює нулю.

$P\{X=a\}=\lim\limits_{b\to a}P\{a\le X<b\}=\lim\limits_{b\to a}\left[F(b)-F(a)\right]=F(a)-F(a)=0$, тобто

$P\{X=a\}=0$.

Зауважимо, що хоча $P\{X=x_i\}=0$, подія $X=x_i$ є можливою.

В теорії ймовірностей розглядаються дві форми завдання закону розподілу неперервної випадкової величини:

1) інтегральна функція розподілу ймовірності;

2) щільність розподілу ймовірності.

Обидві форми абсолютно рівноправні. Перша характеризує розподіл імовірностей у залежності від діапазону значень неперервної випадкової величини, а друга – від конкретних значень.

Інтегральна функція розподілу

Інтегральна функція розподілу ймовірності – це універсальна форма завдання випадкових величин. З її допомогою можна задати закон розподілу як

дискретної випадкової величини, так і неперервної.

При числі діапазонів n $\rightarrow\infty$ дискретна функція розподілу перетворюється в неперервну інтегральну функцію розподілу $F(x)$, зберігаючи всі її властивості.

Для інтегральної функції неперервної випадкової величини також справедлива формула (4.3), що дозволяє обчислювати ймовірність влучення значень

випадкової величини в заданий діапазон $[a,b)$ (рис. 4.5).

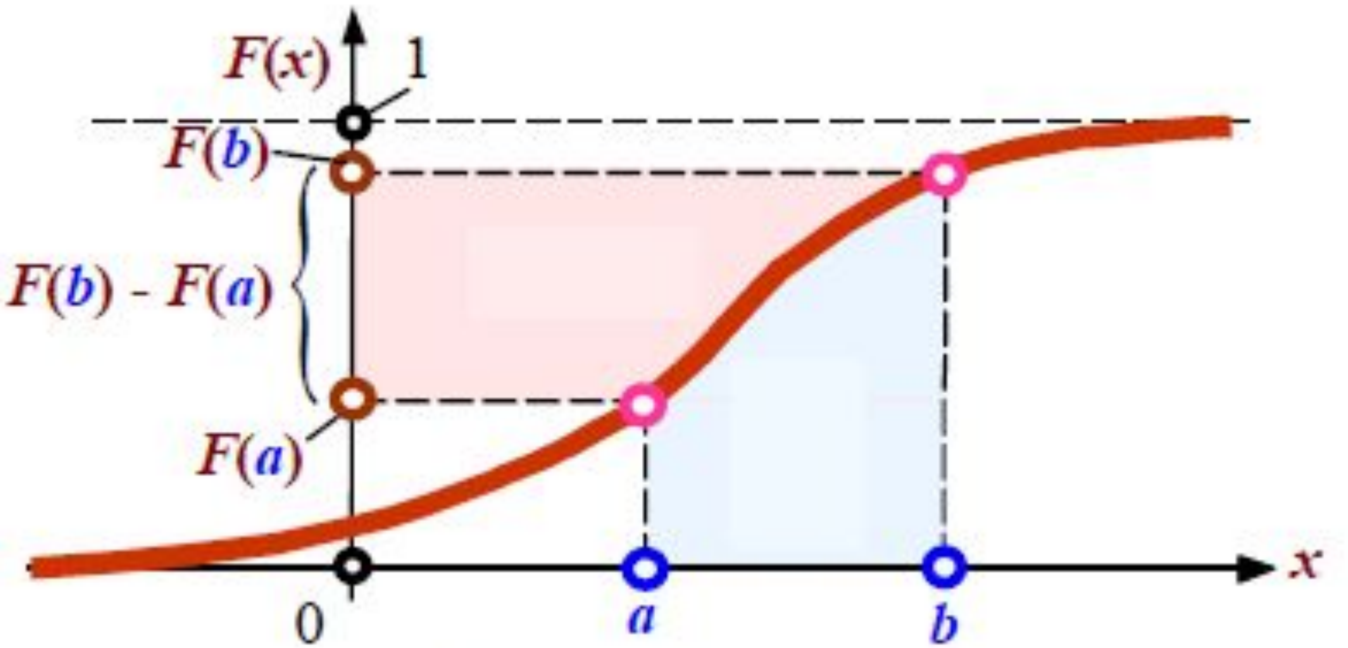


Рис. 4.5

Щільність розподілу ймовірності

За визначенням інтегральна функція розподілу ймовірності характеризує діапазони значень (– ∞, x) неперервної випадкової величини. Проте, становить інтерес і функція, що здатна характеризувати кожне значення неперервної величини. Такою функцією є щільність розподілу ймовірності.

Функція щільності розподілу ймовірності f(x) являє собою відношення ймовірності влучення неперервної випадкової величини в малий діапазон [x,x+Δ x), до довжини цього діапазону Δ x:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{X \in [x, x+\Delta x]\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \le X < (x+\Delta x)\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF}{dx}.$$

Щільністю розподілу ймовірності неперервної випадкової величини називається функція f(x), що є першою похідною від інтегральної функції розподілу ймовірності F(x)

$$f(x) = F'(x).$$

Якщо випадкова величина задана щільністю розподілу, то функцію розподілу можна знайти за форм

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Щільність розподілу f(x) неперервної випадкової величини успадковує усівластивості інтегральної функції розподілу F(x)

Властивості щільності розподілу:

Властивість 1. Інтеграл у нескінченних границях від щільності розподілу дорівнює одиниці (умова нормування)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \qquad (4.7)$$

Доведення. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$.

Геометричний зміст рівності (4.7) полягає в рівності одиниці площі, обмеженої графіком функції *f(x)* і віссю абсцис.

Властивість 2. Щільність розподілу – функція невід’ємна. Оскільки її первісна F(x) є неспадною функ $f(x) \ge 0$.

Властивість 3. Ймовірність влучення неперервної випадкової величини в заданий діапазон $[a,b)$

$$P\{a \le X < b\} = \int_a^b f(x)dx \ . \qquad (4.9)$$

На рис.4.6 дана графічна інтерпретація ймовірності влучення неперервної випадкової величини в діапазон $[a,b)$. Чисельно значення такої ймовірності дорівнює заштрихованій площі.

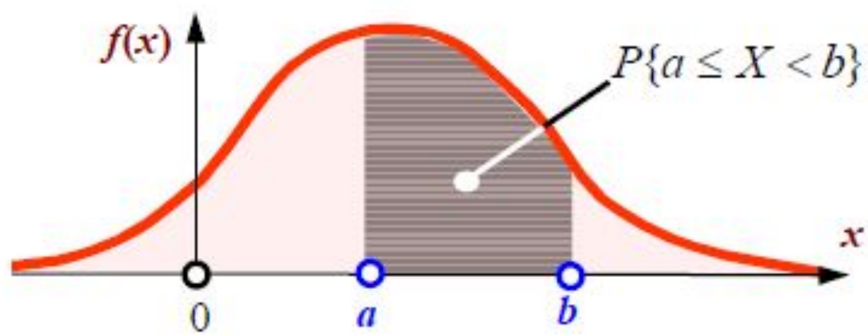


Рис.4.6

Числові характеристики випадкових величин

Числові характеристики випадкових величин кількісно визначають їх властивості, дозволяють проводити порівняльний аналіз випадкових величин, давати оцінку очікуваним результатам експерименту, знаходити зв'язок і визначати залежність між різними випадковими величинами.

Числові характеристики випадкових величин – це **не випадкові величини**.

Кожна числова характеристика має тільки одне значення, що не залежить ні від результату конкретного експерименту, ні від кількості проведених експериментів.

Характеристики положення випадкової величини на числовій осі

Математичне сподівання **–** це середньовиважене за

ймовірностями значення випадкової величини.

Математичне сподівання характеризує зміщення значень випадкової величини на числовій осі х відносно початку координат. Математичне сподівання інколи називають просто **середнім значенням випадкової величини**.

Математичне сподівання випадкової величини будемо позначати $\mathbf{m_x}$ або **M[X].**

Розмірність математичного чекання збігається з розмірністю випадкової величини Х.

Математичне сподівання ***дискретної випадкової величини*** M(X) називається сума добутків усіх можливих її значень на їх імовірності, тобто

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ , \qquad (4.10)$$

де x_i і p_i – i-те можливе значення дискретної випадкової величини і відповідна ймовірність, $i = \overline{1,n}$.

Зауважимо, що значения математичного сподівання випадкової величини не є випадкове *[M(X) стала величина].*

Нижче буде показано, що математичне сподівання наближено рівне середньому арифметичному спостережуваних значень випадкової величини, і тим точніше, чим більше число спостережень.

Розглянемо приклад, який з'ясовує доцільність прийнятого означення математичного сподівання.

<u>Приклад1</u>. Для розіграшу лотереї було випущено N білетів, з них m1 з виграшем x1 грн., m2 білетів з виграшем x2 грн., … mn білетів з виграшем xn грн. Яка ціна білета, якщо сума грошей, виручених від продажу білетів, дорівнює сумі усіх виграшів?

<u>Рішення</u>. Якщо позначити шукану ціну білета через a , то за умовою:

$$Na = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n$$

звідки

$$a = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{N}$$

тобто ціна одного білета дорівнює "середньому виграшу". Останню формулу можна записати й інакше. Покладемо $p_i = \frac{m_i}{N}$, очевидно, pi- це ймовірність того, що на вибраний наугад білет, випаде виграш xi грн. Тоді ця формула запишеться так:

$$a = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = m_x$$

Математичне сподівання ***неперервної*** випадкової величини визначається за формулою

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx \ , \tag{4.11}$$

де x – неперервна випадкова величина; $f(x)$ – щільність розподілу величини x.

На рис.4.7 наведені графіки функцій щільності розподілу двох неперервних випадкових величин, з різними математичними сподіваннями ($m_{x2} > m_{x1}$).

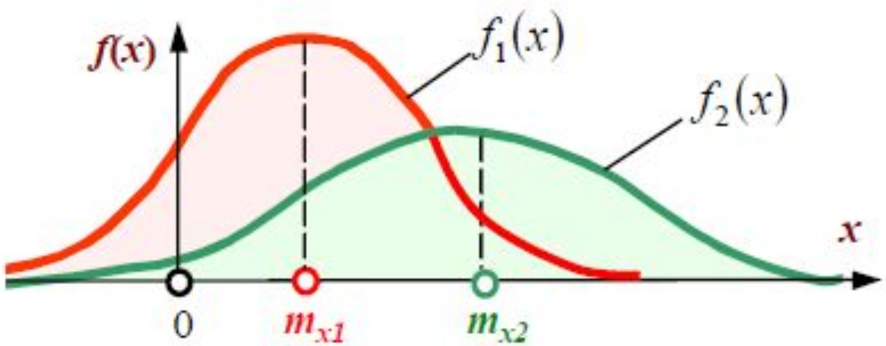


Рис.4.7

Математичне сподівання випадкової величини є найбільш важливою її числовою характеристикою, з якій безпосередньо зв'язана більша частина всіх числових характеристик випадкової величини.

Модою називають найбільш імовірне значення випадкової величини.

Позначається мода випадкової величини символом ***μ .***

Мода μ ***дискретної*** випадкової величини дорівнює такому її значенню x_m, якому відповідає максимальна ймовірність $p_\mu = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \{p_i\}$.

Мода μ ***неперервної*** випадкової величини дорівнює такому значенню аргументу x_μ функції щільності розподілу $f(x)$, при якому $f(x_\mu) = \max\limits_{x \in R^1} f(x)$.

На рис.4.8 показана мода неперервної ***унімодальної*** (з одною модою) випадкової величини, заданої щільністю розподілу.

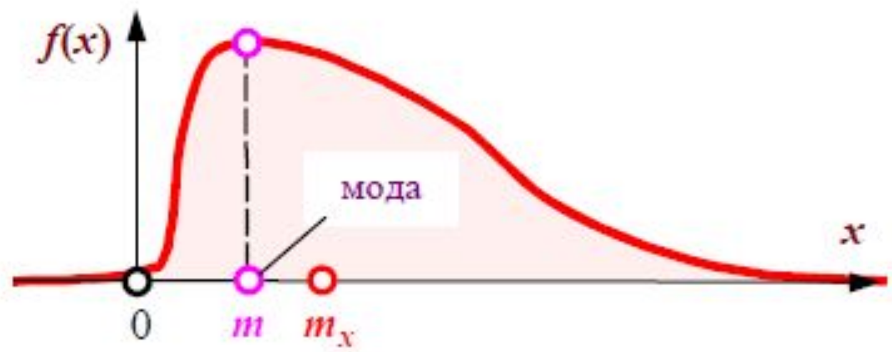


Рис.4.8

Крім унімодальних розподілів випадкових величин, розрізняють ***полімодальні*** (рис.4.9,*а*), ***антимодальні*** (рис.4.9,*б)* і ***безмодальні*** (рис.4.9,*в)*.

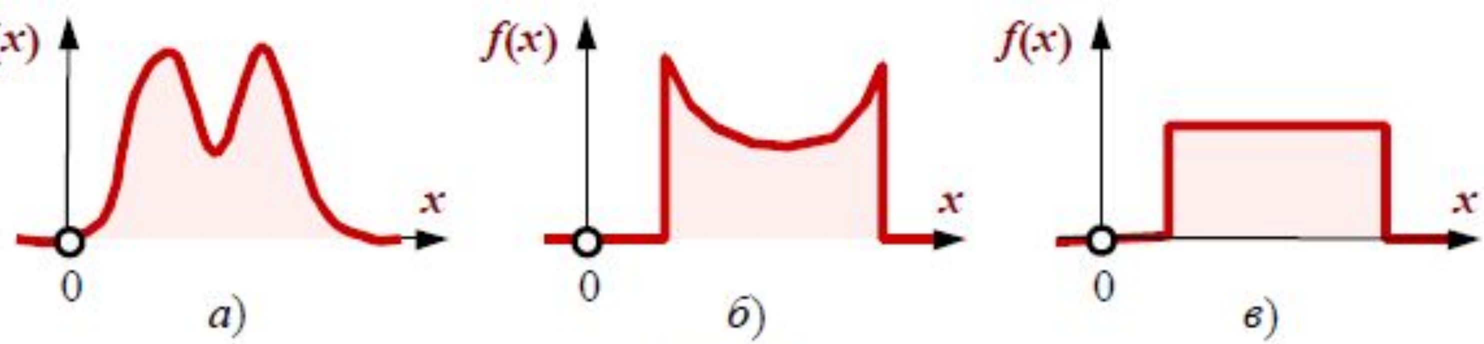


Рис.4.9

Медіаною називають таке значення Ме випадкової величини, для якого справедлива рівність P{X < Me} = P{X > Me}

Для неперервної випадкової величини перпендикуляр до числової осі, що проходить через медіану, поділяє площу, обмежену графіком щільності розподілу *f(x)* і числовою віссю x, на дві рівні частини по 0,5 (рис.4.10).

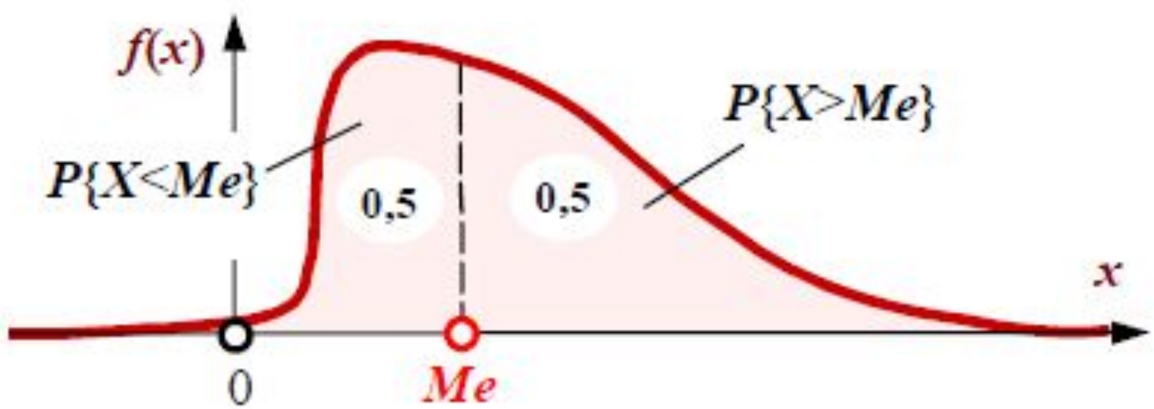


Рис.4.10

Таким чином, медіана може бути визначена за допомогою рівняння

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{+\infty} f(x)dx = 0,5 \quad . \qquad (4.12)$$

Для симетричного унімодального закону розподілу випадкової величини значення математичного сподівання, моди і медіани збігаються.

Модою дискретної випадкової величини X називається те її значения x_i, ймовірність набуття якого є найбільшою.

Медіаною дискретної випадкової величини X називається те її значения у законі розподілу, для якого сума ймовірностей можливих значень зліва і справа від нього не перевищуе 0,5.

Самостійно!

- Моменти випадкових величин та їх властивості