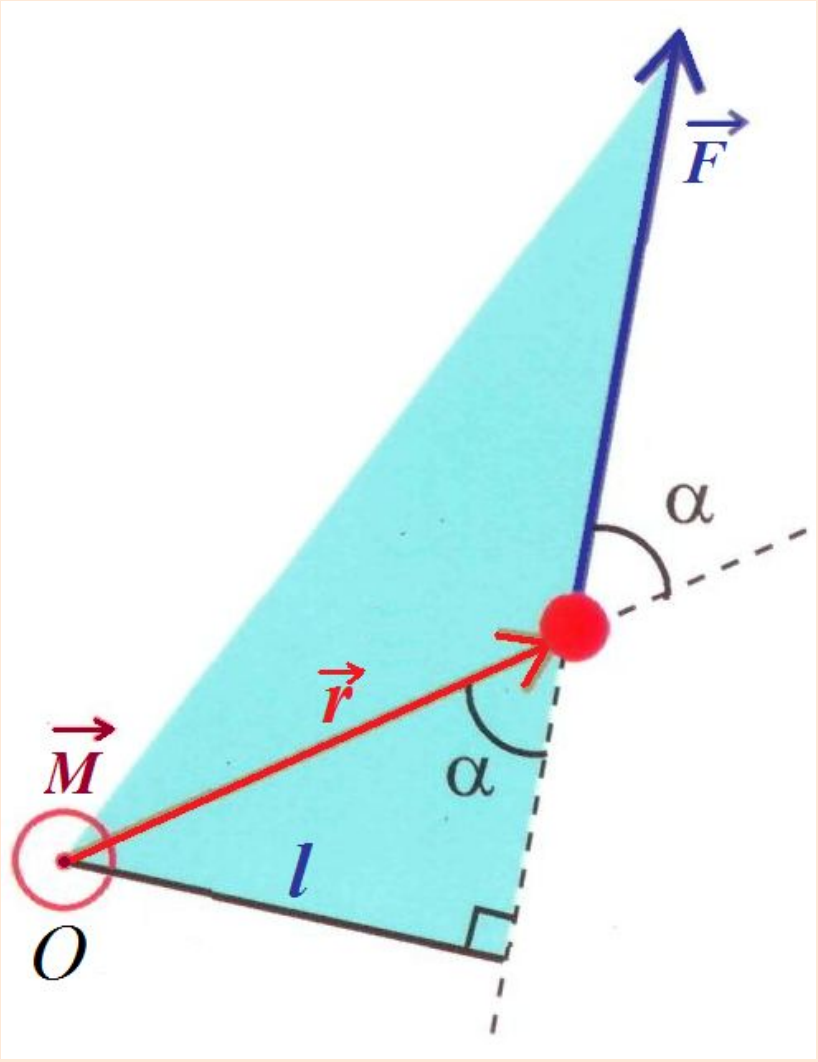
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

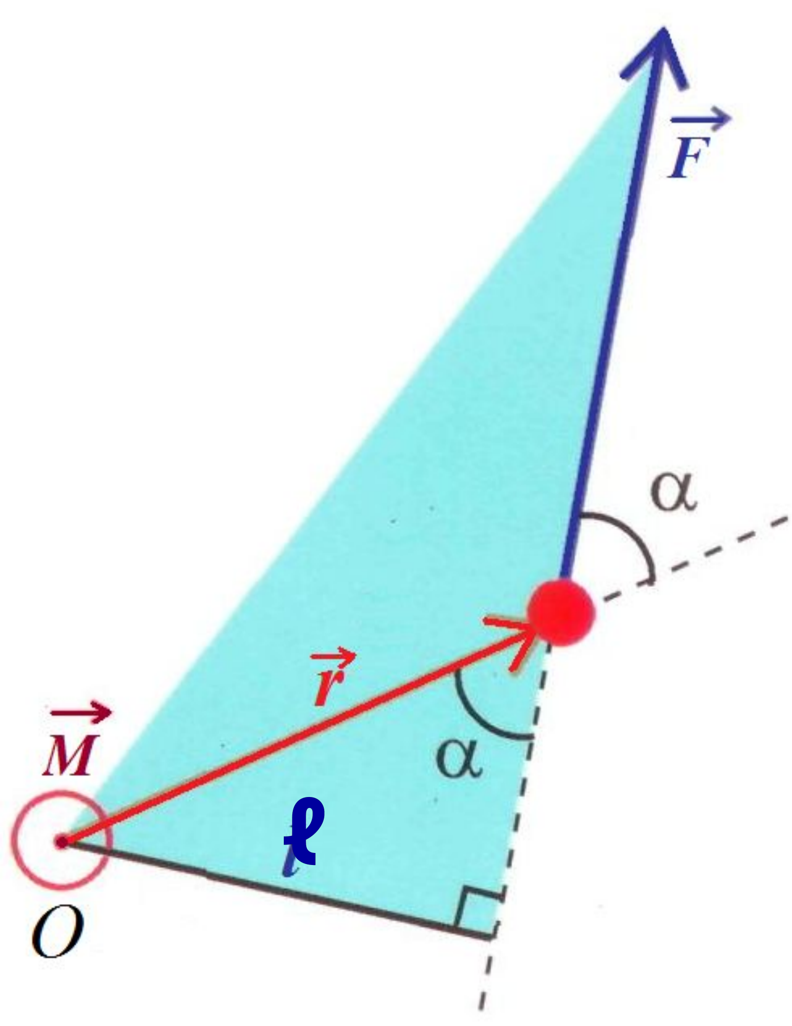
Момент силы



Момент силы относительно точки O:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

Момент силы, взятый относительно точки O, находится как векторное произведение радиус-вектора, проведенного из точки О в точку приложения силы, на эту силу.



$$M = r \cdot F \cdot \sin\alpha$$

$$\ell = r \cdot \sin\alpha$$

$$M = F \cdot \ell$$

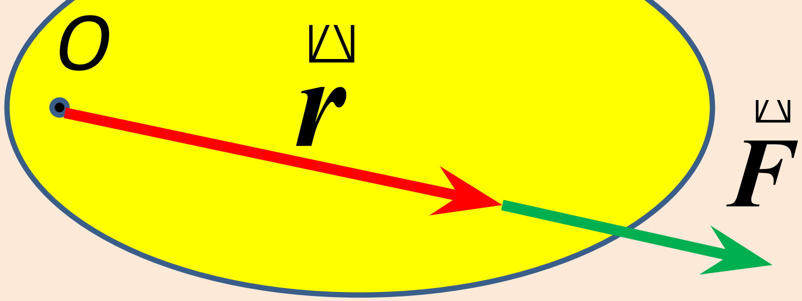
l - плечо силы

Направление вектора момента силы находим по правилу правого винта.

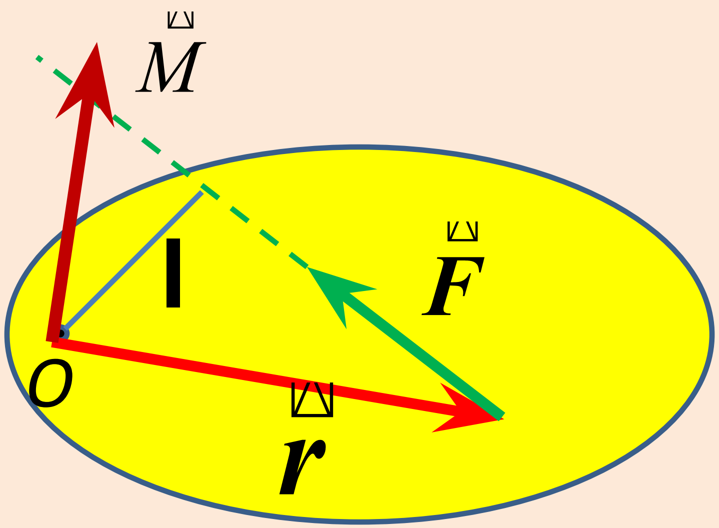
Этот вектор перпендикулярен и силе, и радиус-вектору.

$$\vec{M} \perp \vec{F}, \vec{M} \perp \vec{r}$$

Момент силы, вычисленный относительно точки, характеризует способность силы вызывать поворот вокруг этой точки.



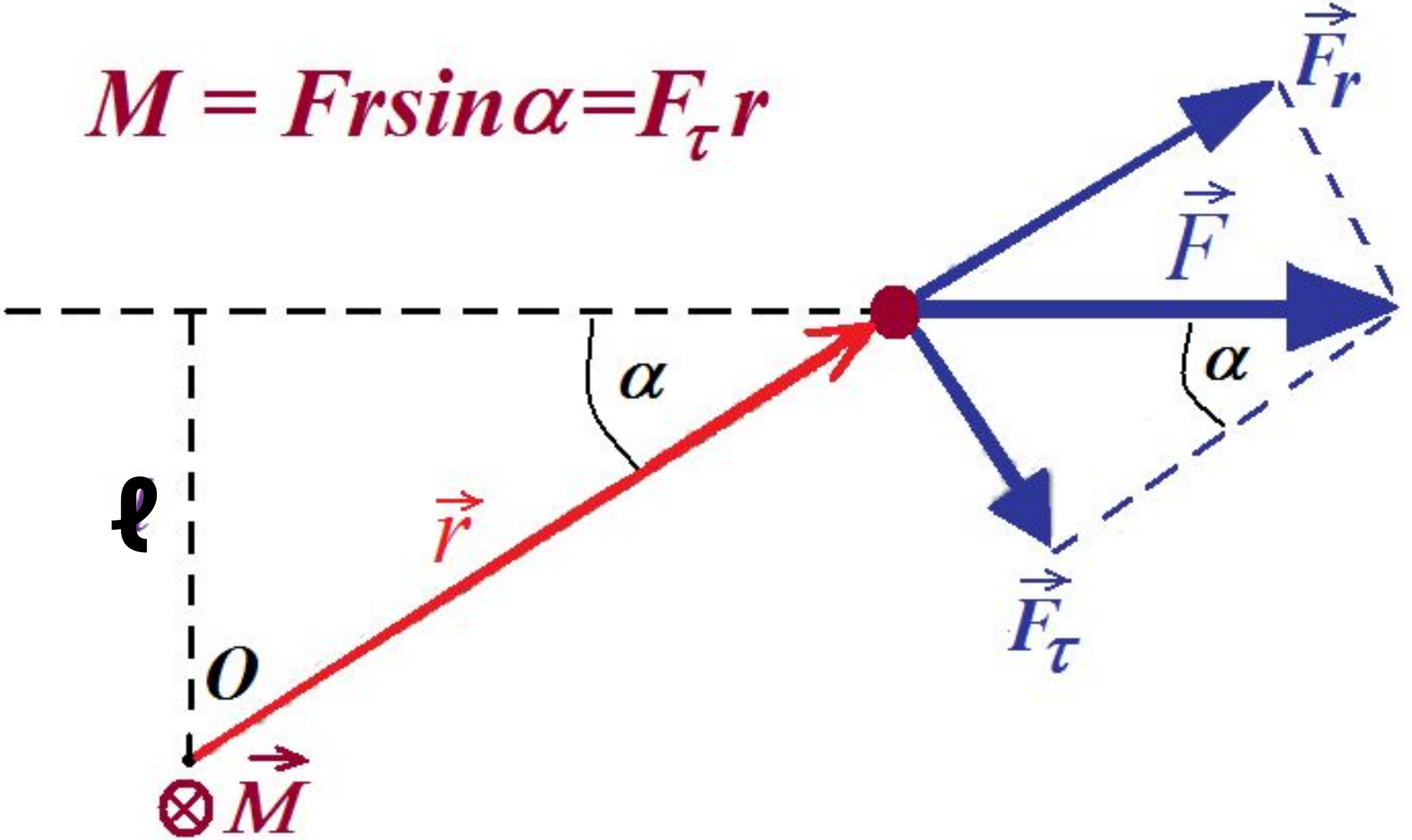
$$\vec{M} = 0$$



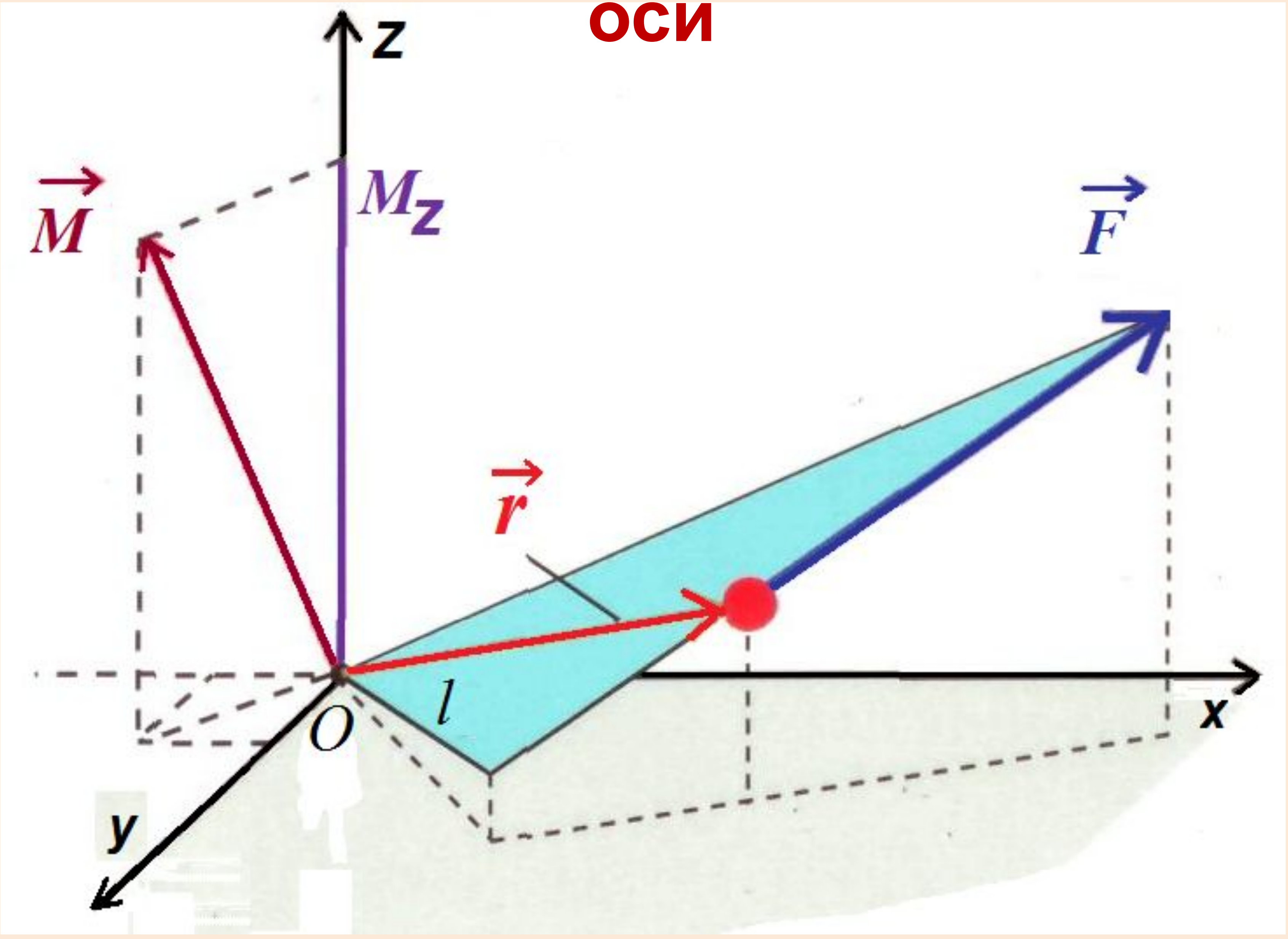
$$\vec{M} \neq 0$$

Другой способ вычисления момента силы

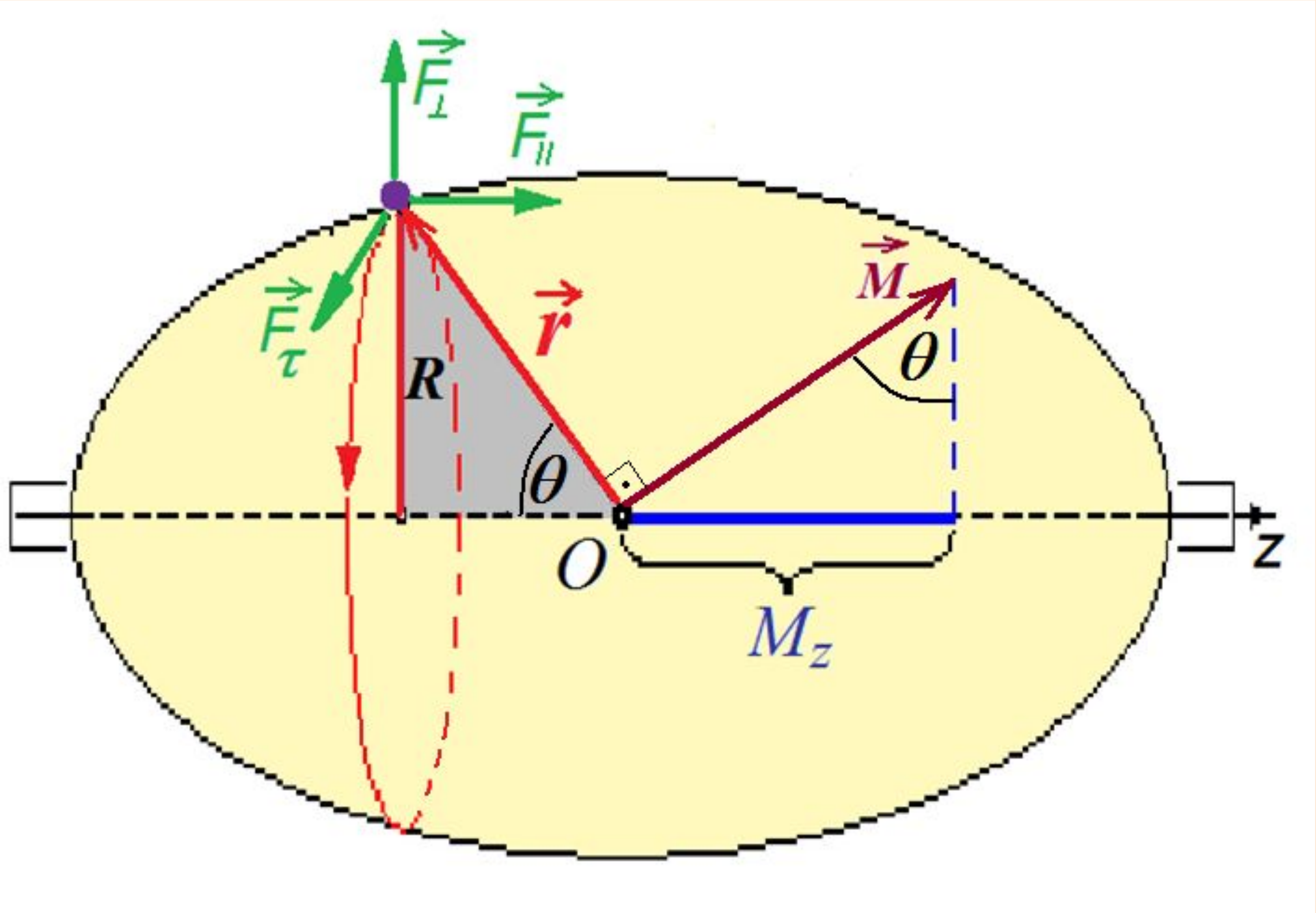
$$M = Fr\sin\alpha = F_\tau r$$



Момент силы относительно оси



Момент силы относительно оси z – это скалярная величина, равная проекции на ось z вектора $\vec{M}$, найденного относительно произвольной точки этой оси.



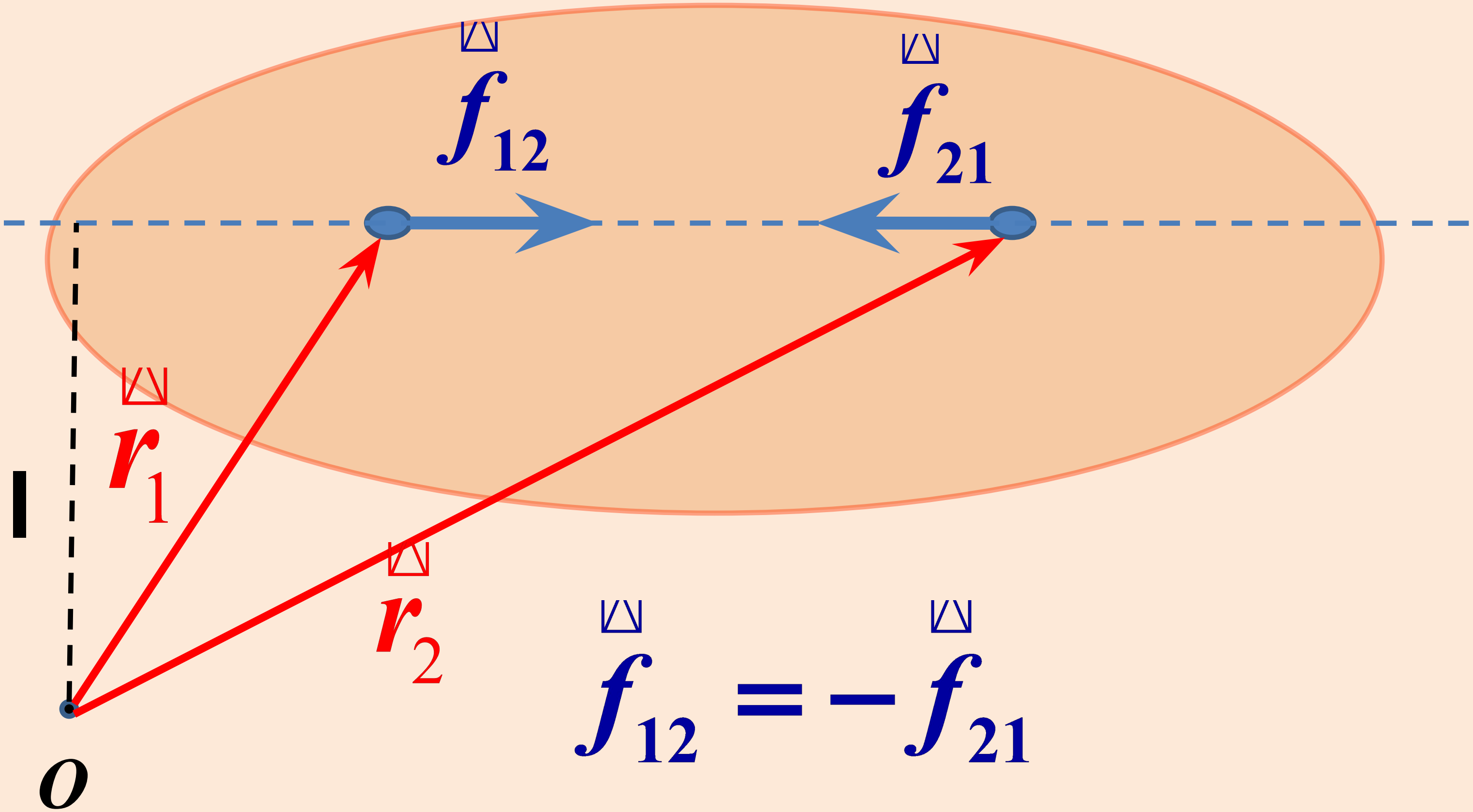
$$M = r \cdot F_\tau$$

$$r \cdot \sin\theta = R$$

$$M_z = M \cdot \sin\theta$$

$$M_z = F_\tau \cdot R$$

Момент сил взаимодействия

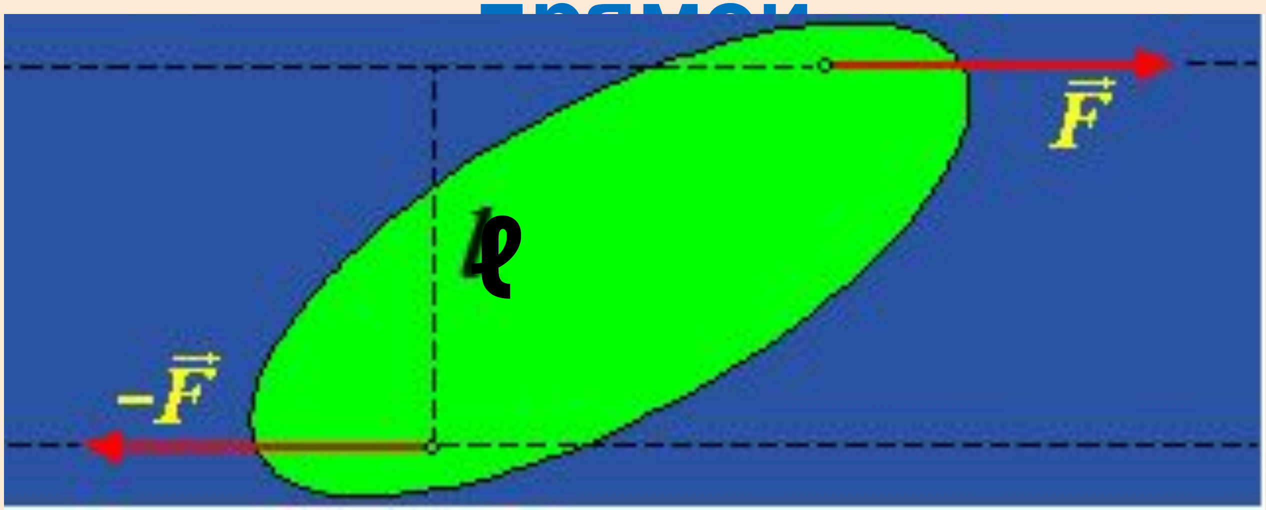


$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$$

$$\vec{M}_{12} = -\vec{M}_{21} \qquad \vec{M} = \vec{M}_{12} + \vec{M}_{21} = 0$$

Момент пары сил

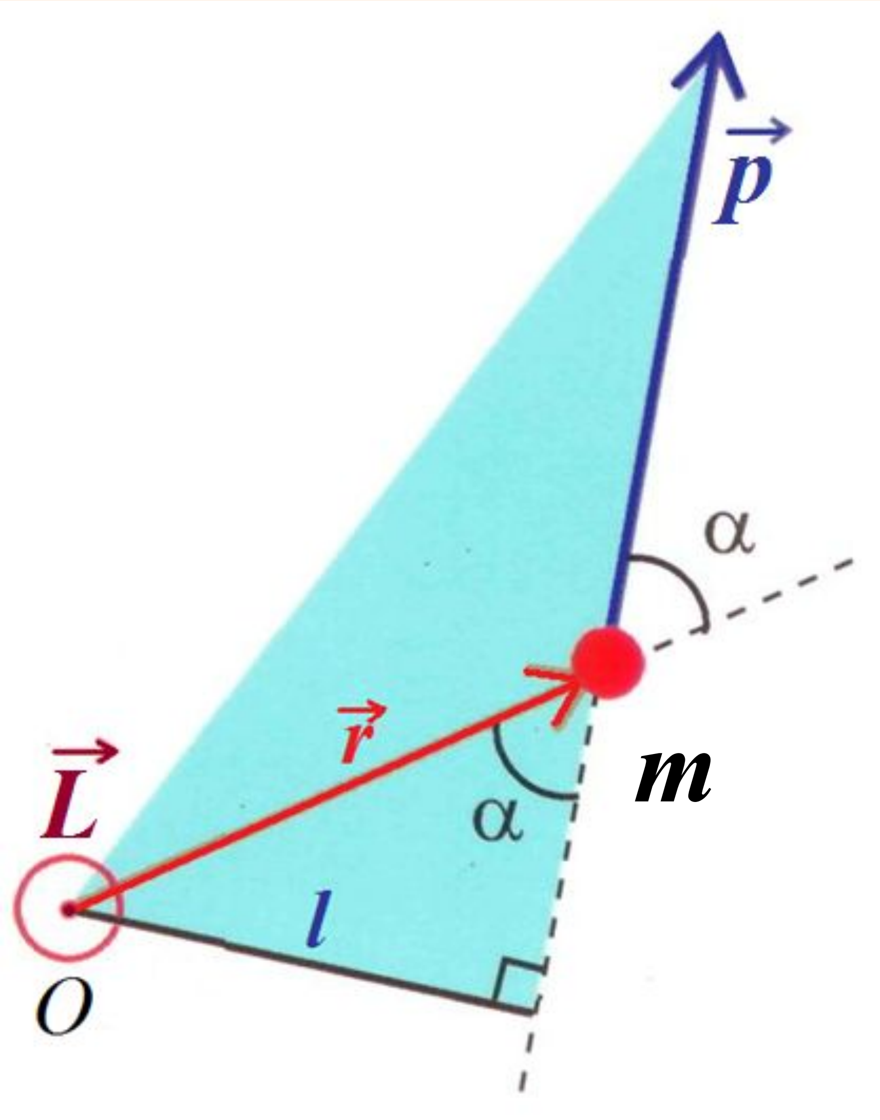
Пара сил - две равные по величине, противоположные по направлению силы, не действующие вдоль одной прямой



$$M = F \cdot \ell$$

l - плечо пары

Момент импульса



Момент импульса МТ относительно точки O:

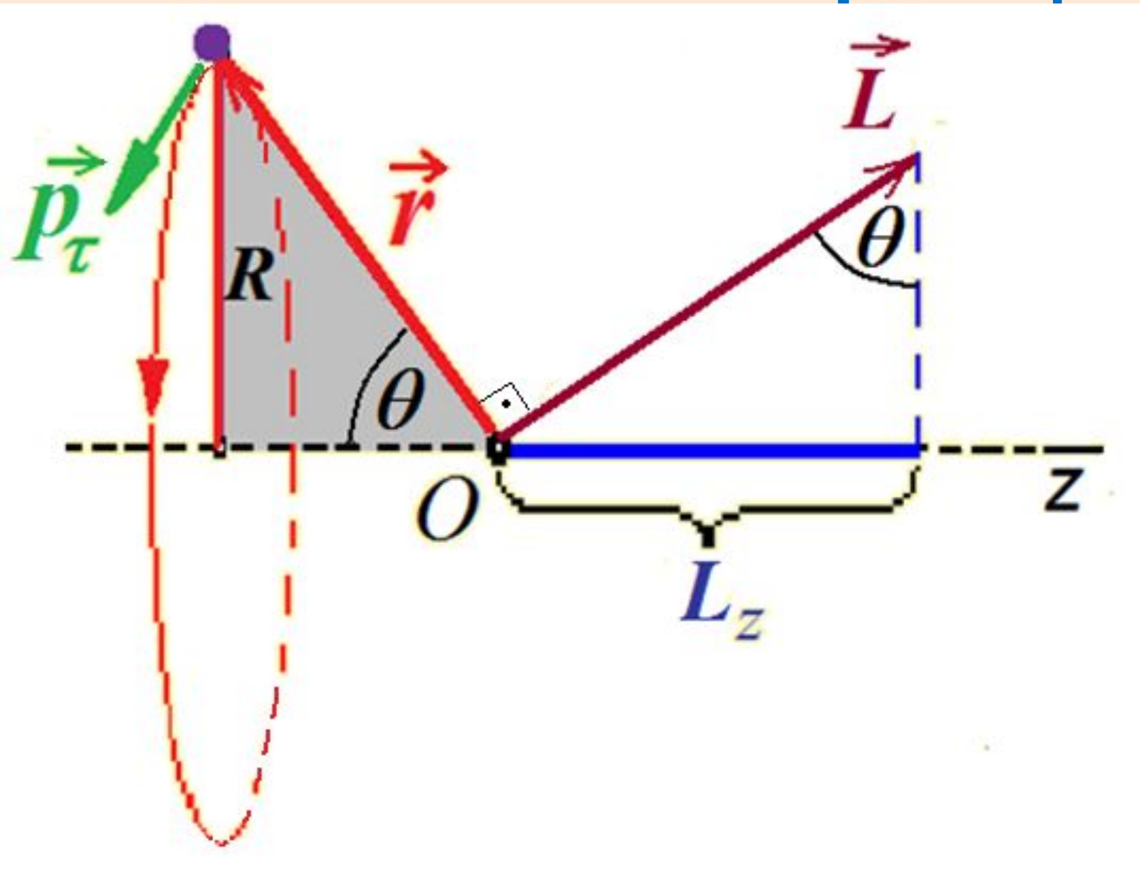
$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

$$L = rp\sin\alpha = p\ell$$

Направление определяется также по правилу правого винта

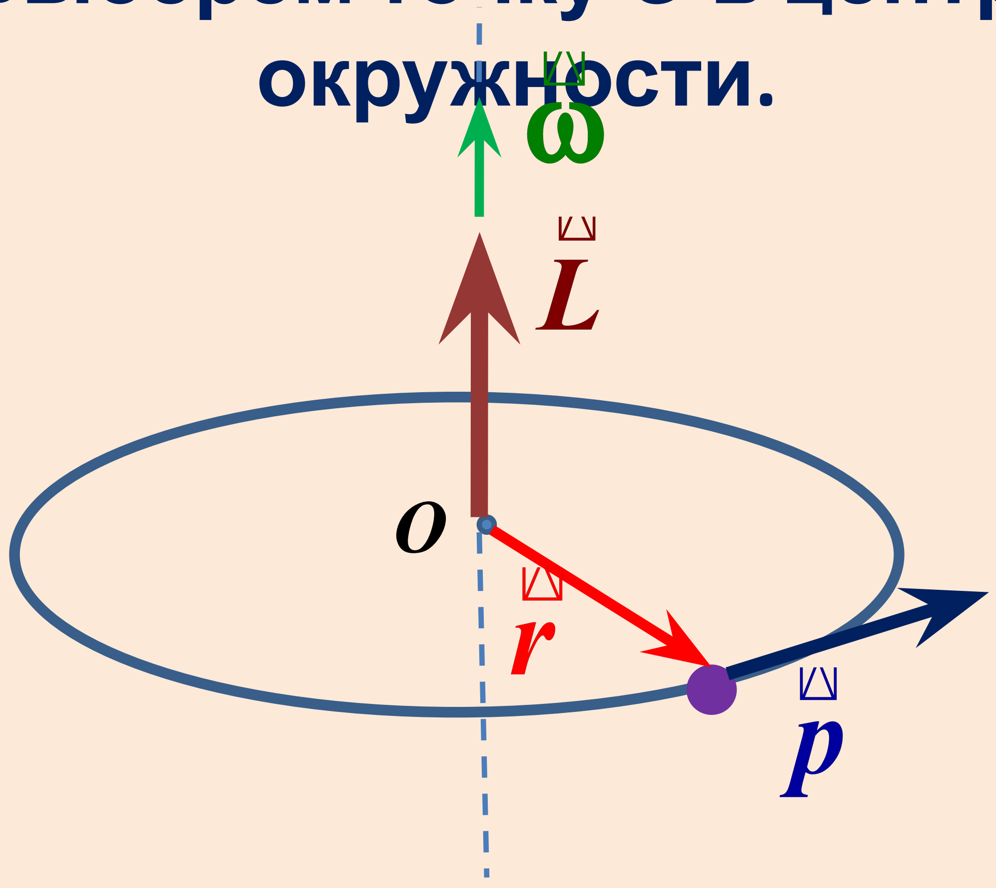
l – плечо

Момент импульса
относительно оси вращения
определяется так же, как и момент силы.
Нужно найти вектор момента импульса относительно произвольной точки оси, затем взять проекцию на эту ось.



$$L_z = p_\tau \cdot R$$

Пусть МТ движется по окружности. Выберем точку *O* в центре окружности.



$$L = p \cdot r = m\mathrm{v}r$$

$$\mathrm{v} = \omega r$$

$$L = \boxed{mr^2} \cdot \omega$$

Моментом инерции МТ называют произведение ее массы на квадрат расстояния до оси вращения.

$$I = mr^2$$

Если МТ движется по окружности радиуса r, то ее момент импульса

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$[\,I\,] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

Момент инерции твердого тела

Момент инерции тела относительно данной оси – это величина, равная сумме произведений элементарных масс на квадраты их расстояний от данной оси.

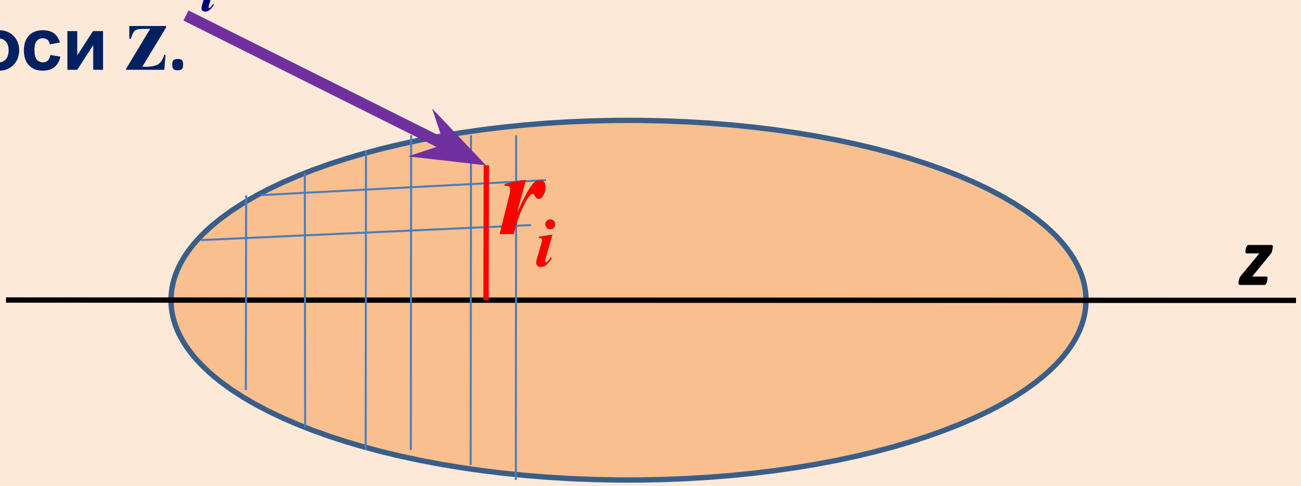
$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

или

$$I = \int_V r^2 \cdot dm$$

Момент импульса твердого тела

Разобьем тело на систему материальных точек массой Δm_i. Найдем момент импульса отн. оси z.



$$L_z = \sum_i L_{z,i}$$

$$L_{z,i} = \Delta m_i \cdot \omega \cdot r_i^2$$

$$L_z = \omega \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2$$

$$L_z = I_z \omega$$

I_z – момент инерции тела отн. оси z.

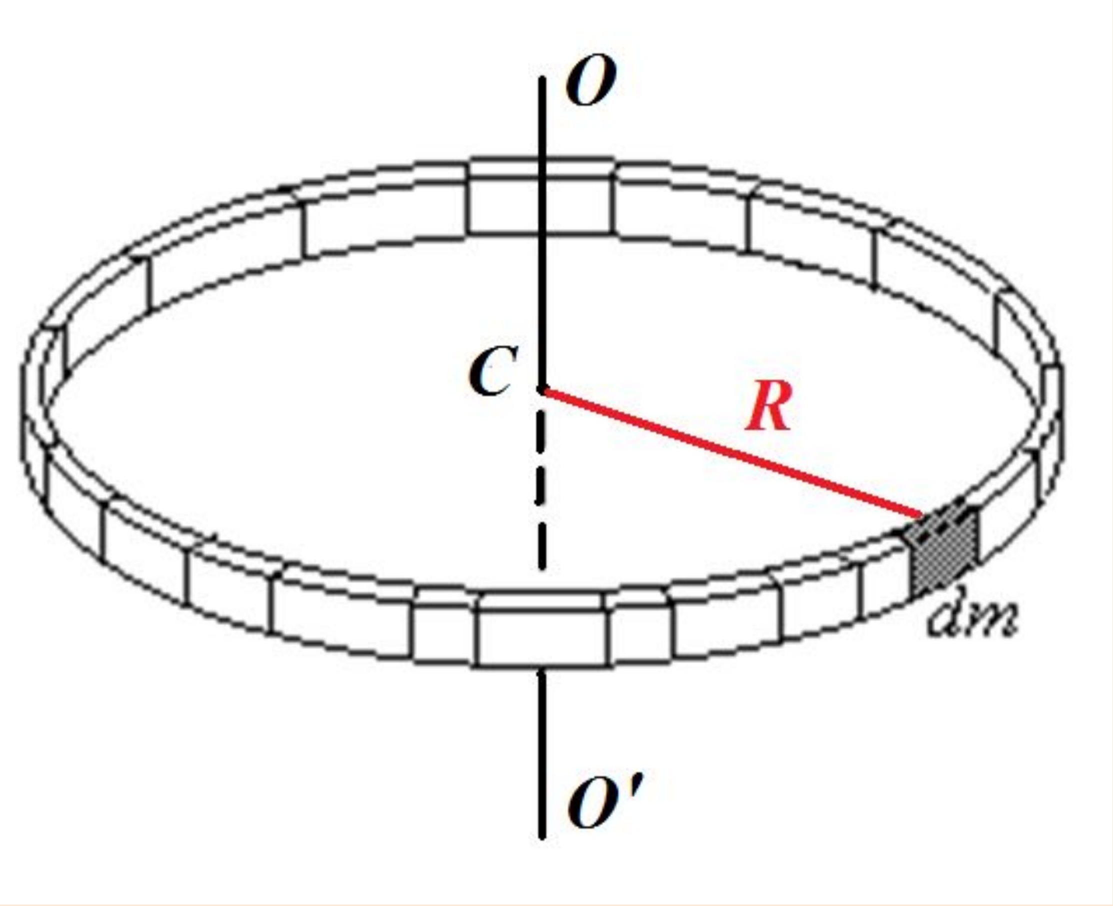
Для однородного симметричного тела, вращающегося вокруг оси симметрии, справедливо векторное равенство:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

I – момент инерции тела относительно оси симметрии

Момент инерции тела определяется его размерами, формой, распределением и величиной массы, а также положением оси вращения.

Момент инерции кольца



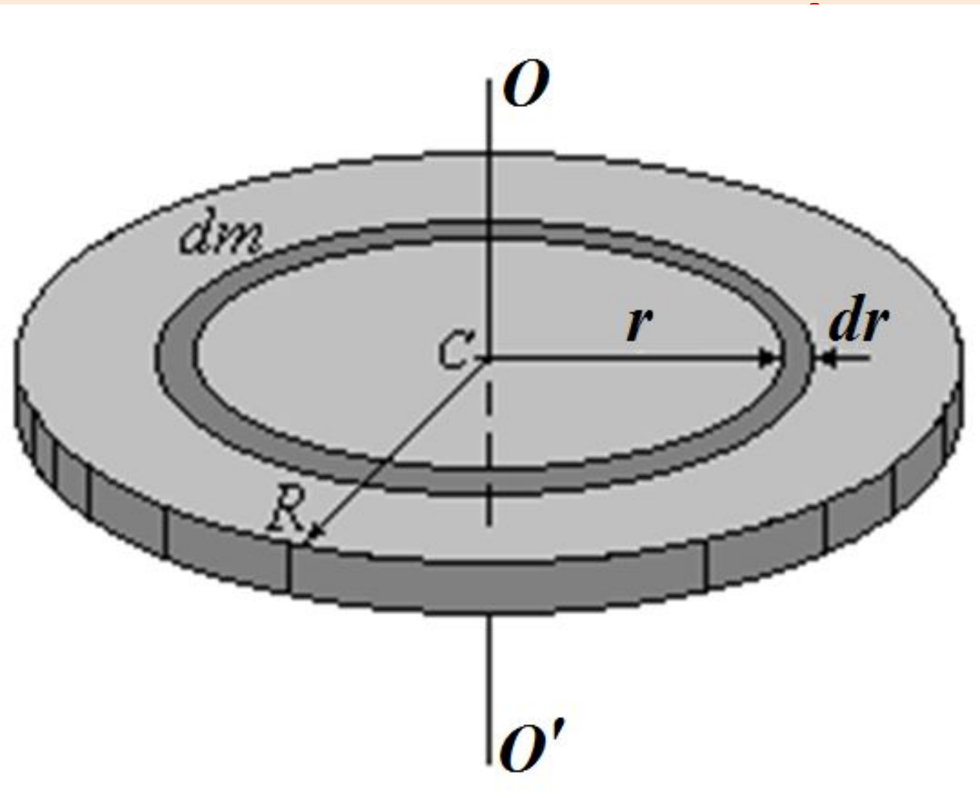
$$I = \int\limits_{\text{по кольцу}} r^2 \cdot dm$$

$$r = R = const.$$

$$I = R^2 \int\limits_{\text{по кольцу}} dm$$

$$I_C = mR^2$$

Момент инерции сплошного цилиндра
ка)



Разобьем цилиндр на отдельные полые концентрические цилиндры бесконечно малой ширины dr и радиусом r.

$$dI = r^2 dm$$

dm — масса элементарного цилиндра

$$dm = \rho\, dV = \rho\, dS \cdot h$$

$$dS = 2\pi r \cdot dr$$

$$dm = 2\pi\rho h \cdot r dr$$

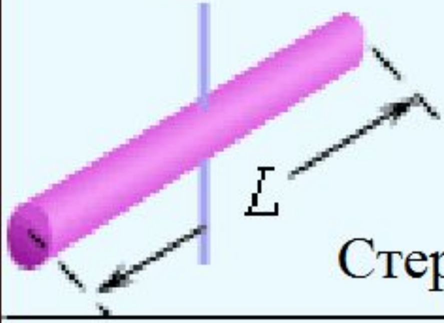
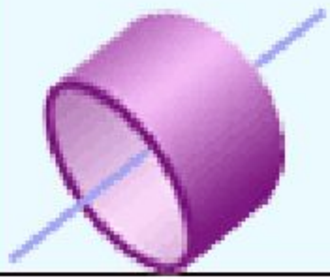
$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 h}$$

$$I = \int_0^R r^2\,dm = \int_0^R 2\pi\rho h\, r^3\,dr$$

$$I = 2\pi\rho h \int_0^R r^3\,dr = 2\pi\rho h \cdot \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = \frac{\pi\rho h R^4}{2}$$

$$I_C = \frac{1}{2} m R^2$$

Моменты инерции I_C некоторых однородных твердых тел

$I_C = \frac{1}{12}ML^2$  Стержень	$I_C = \frac{2}{5}MR^2$  Шар	$I_C = \frac{2}{3}MR^2$  Сферическая оболочка
$I_C = MR^2$  Обруч	$I_C = \frac{1}{2}MR^2$  Диск	$I_C = \frac{1}{4}MR^2$  Диск

Теорема Штейнера

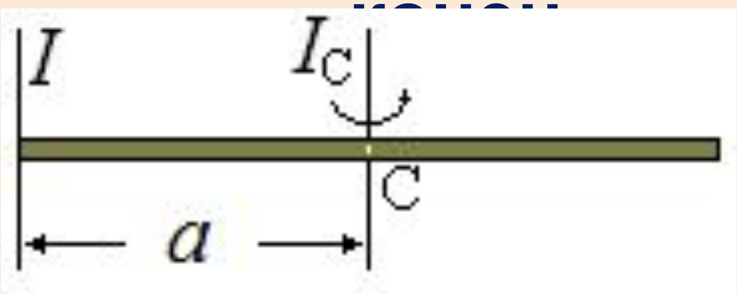
Момент инерции относительно произвольной оси вращения равен сумме момента инерции тела относительно параллельной оси вращения, проходящей через центр инерции тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

$$I = I_C + ma^2$$

Применение теоремы Штейнера

Для стержня $$I_C = \frac{1}{12} m\ell^2$$

Найдем момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец



$$a = \frac{\ell}{2}$$

$$I = I_C + ma^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{4ml^2}{12} = \frac{ml^2}{3}$$

$$I = \frac{1}{3} m\ell^2$$