АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ЛЕКЦИЯ 8:

ТЕОРЕМА ЭММИ НЁТЕР

1. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Механическая система определена функцией Лагранжа $L(\dot{q},q,t)$
Замена переменных $(t,q)\leftrightarrow(\hat{t},\hat{q})$
Решения $q(t)$ системы уравнений Лагранжа с функцией $L(\dot{q},q,t)$ преобразуются в решения $\hat{q}(\hat{t})$системы уравнений Лагранжа с функцией $\hat{L}(\dot{\hat{q}},\hat{q},\hat{t})$

$$\hat{L}(\hat{t},\hat{q},\dot{\hat{q}})=L(t,q,\dot{q})\left.\frac{dt}{d\hat{t}}\right|_{\hat{t},\hat{q}}$$

$$t\big|_{\hat{t},\hat{q}}=t(\hat{t},\hat{q})$$

$$q_i\big|_{\hat{t},\hat{q}}=q_i(\hat{t},\hat{q})$$

$$\left.\frac{dt}{d\hat{t}}\right|_{\hat{t},\hat{q}}=\frac{\partial t(\hat{t},\hat{q})}{\partial\hat{t}}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial t(\hat{t},\hat{q})}{\partial\hat{q}_k}\dot{\hat{q}}_k$$

$$\left.\frac{dq_i}{dt}\right|_{\hat{t},\hat{q}}=\frac{\dfrac{\partial q_i(\hat{t},\hat{q})}{\partial\hat{t}}+\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial q_i(\hat{t},\hat{q})}{\partial\hat{q}_k}\dot{\hat{q}}_k}{\dfrac{\partial t(\hat{t},\hat{q})}{\partial\hat{t}}+\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial t(\hat{t},\hat{q})}{\partial\hat{q}_k}\dot{\hat{q}}_k}$$

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ СИММЕТРИИ

Преобразование вариационной симметрии в системе с функцией Лагранжа $L(\dot{q},q,t)$ - неособое преобразование $(t,q)\leftrightarrow(\hat{t},\hat{q})$ расширенного координатного пространства, удовлетворяющее условию

Снята шляпа! $\rightarrow$ $$\boxed{L\left(\hat{t},\hat{q},\dot{\hat{q}}\right)=L\left(t,q,\dot{q}\right)\frac{dt}{d\hat{t}}}$$

Снятие шляпы означает, что $\hat{q}(\hat{t})$ является решением **той-же самой** системы, что и $q(t)$

Преобразование симметрии в уравнениях Лагранжа –неособое преобразование $(t,q)\leftrightarrow(\hat{t},\hat{q})$ расширенного координатного пространства, поточечно переводящее каждое решение $q(t)$ в рещение $\hat{q}(\hat{t})$ той же системы.

Преобразование вариационной симметрии есть преобразование симметрии. Есть симметрии отличные от вариационной

3. ДРУГИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИММЕТРИИ

Дивергентные симметрии: такие, для которых выполняется условие

$$L\left(\hat t,\hat q,\dot{\hat q}\right)+\frac{df(\hat t,\hat q)}{d\hat t}=L\left(t,q,\dot q\right)\frac{dt}{d\hat t}$$

Добавление к лагранжиану полной производной от функции, зависящей от обобщенных координат и времени не изменяет систему уравнений Лагранжа $\Leftrightarrow$ принцип Гамильтона для L и $L+df/dt$ записывается одинаково

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(L+\frac{df(t,q)}{dt}\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}L\,dt+\underbrace{f(\hat t_1,\hat q_1)-f(\hat t_0,\hat q_0)}_{\text{число}}$$

Конформные симметрии: такие, для которых выполняется условие

$$L\left(\hat t,\hat q,\dot{\hat q}\right)=C\cdot L\left(t,q,\dot q\right)\frac{dt}{d\hat t},\quad C=\mathrm{const}$$

Следствие однородности системы уравнений Лагранжа

4. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ ЭММИ НЁТЕР

Пусть материальная система описывается лагранжианом L и пусть существует однопараметрическое семейство преобразований вариационной симметрии

$$\hat{t} = \hat{t}\left(t, q; \alpha\right), \quad \hat{q} = \hat{q}\left(t, q; \alpha\right)$$

тождественных при $\alpha = 0$

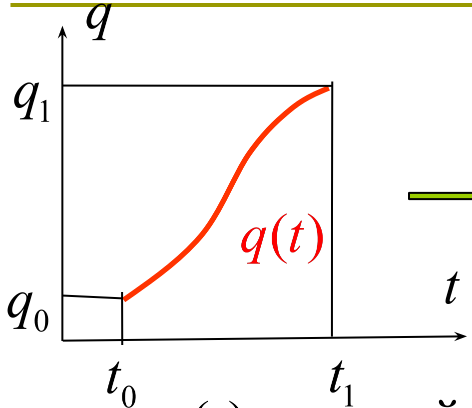
$$\hat{t}\left(t, q; 0\right) = t, \quad \hat{q}\left(t, q; 0\right) = q$$

Тогда у системы есть первый интеграл

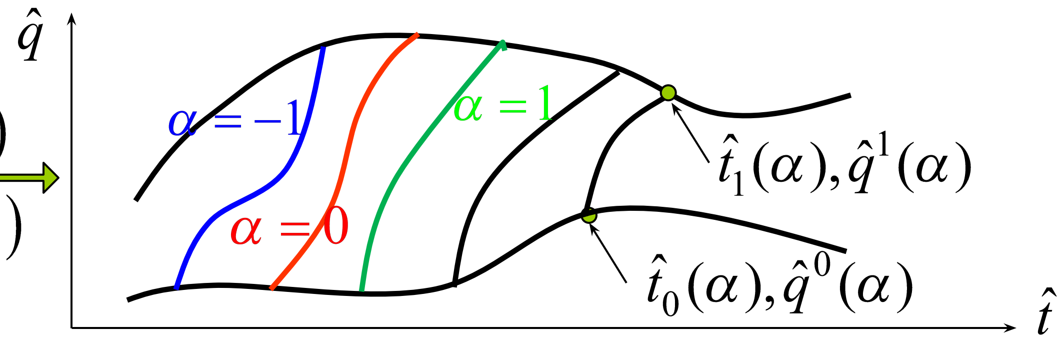
$$\Phi(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{\partial \hat{q}_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} - H\left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H\left(t, q, p\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L\left(t, q, \dot{q}\right)$$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ЭММИ НЁТЕР



$$\hat t = \hat t\left(t, q; \alpha\right) \qquad \hat q = \hat q\left(t, q; \alpha\right)$$



$q(t)$ - прямой путь

$$\hat t = \hat t(t, q(t), \alpha), \quad \hat q = \hat q(t, q(t), \alpha)$$

<u>число</u>

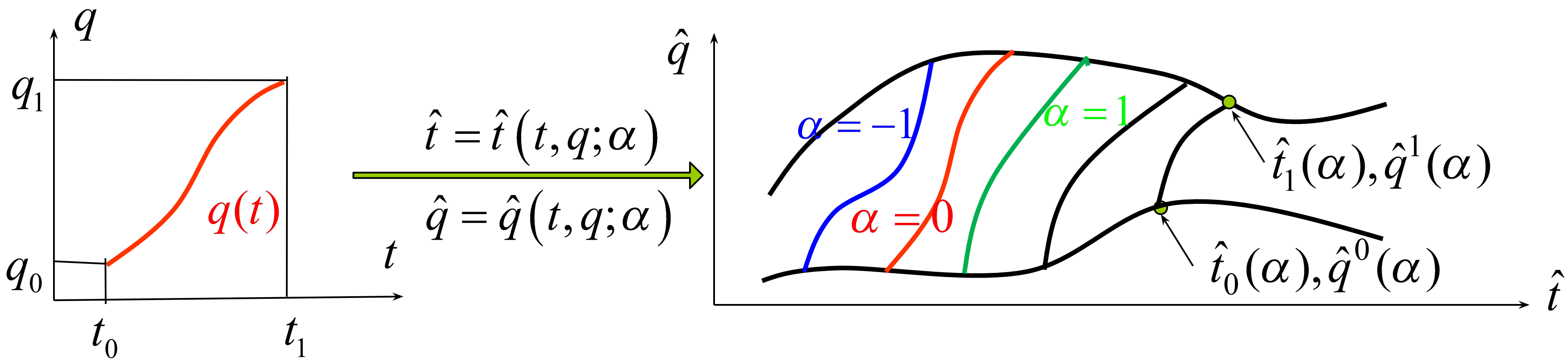
$$W = \int_{t_0}^{t_1} L\left(t, q, \dot q\right) dt = \int_{\hat t_0}^{\hat t_1} L\left(t, q, \dot q\right)\Big|_{\hat t, \hat q} \frac{dt}{d\hat t} d\hat t = \int_{\hat t_0}^{\hat t_1} L\left(\hat t, \hat q, \dot{\hat q}\right) d\hat t \Rightarrow \delta W = \frac{dW}{d\alpha} d\alpha = 0$$

Вычисляем $\delta W = \left[\sum_{i=1}^{n} \hat p_i \delta \hat q_i - \hat H \delta \hat t\right]\Bigg|_0^1 - \left[\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \cancel{\left(\frac{d}{d\hat t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\hat q}_i} - \frac{\partial L}{\partial \hat q_i}\right)} \delta \hat q_i d\hat t\right]$ при $\alpha = 0$

$$\left(\hat p\Big|_1\right)_{\alpha=0} = p(t_1), \quad \left(\hat H\Big|_1\right)_{\alpha=0} = H(t_1, q(t_1), p(t_1))$$

$$\left\{\delta \hat t\Big|_1\right\}_{\alpha=0} = \left[\frac{\partial \hat t(t_1, q(t_1), \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} d\alpha \qquad \left\{\delta \hat q_i\Big|_1\right\}_{\alpha=0} = \left[\frac{\partial \hat q_i(t_1, q(t_1), \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} d\alpha$$

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ЭММИ НЁТЕР



$$\left[\sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{\partial \hat{q}_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} - H\left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\right]_{t=t_0} = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{\partial \hat{q}_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} - H\left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\right]_{t=t_1}$$

Прямой путь и точки t_0, t_1 были выбраны произвольно

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{\partial \hat{q}_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} - H\left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \text{const}}$$

7. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Обобщенно консервативная система $\quad L = L(\dot{q}, q)$

Однопараметрическое семейство преобразований

$$\boxed{\hat{q}_i = q_i, \quad \hat{t} = t + \alpha}$$

Условие вариационной симметрии

$$\boxed{L(\dot{q}, q)\,dt = L\left(\dot{\hat{q}}, \hat{q}\right)d\hat{t}} \longleftarrow \quad \frac{d\hat{t}}{dt} = 1, \quad \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}} = \frac{dq}{dt}$$

$$\Phi(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{\partial \hat{q}_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} - H\left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = -H$$

$$\boxed{H = \mathrm{const}}$$

Закон сохранения энергии – следствие инвариантности лагранжиана системы относительно сдвига по времени

8. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА ДЛЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

Система с циклической координатой q_1 $\qquad L = L(t, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$

Однопараметрическое семейство преобразований

$$\boxed{\hat{t} = t, \quad \hat{q}_1 = q_1 + \alpha, \quad \hat{q}_i = q_i \quad (i = 2, \ldots, n)}$$

Условие вариационной симметрии

$$\boxed{L(q, \dot{q})\, dt = L(\hat{q}, \dot{\hat{q}})\, d\hat{t}} \longleftarrow \frac{d\hat{q}_1}{d\hat{t}} = \frac{dq}{dt}$$

$$\Phi(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{\partial \hat{q}_i}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} - H \left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = p_1$$

$$\boxed{p_1 = \text{const}}$$

Закон сохранения импульса для циклической координаты – следствие инвариантности лагранжиана системы относительно сдвига по этой координате

9. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Замкнутая система *n* материальных точек. Потенциальная энергия взаимодействия точек зависит только от расстояния между ними.

$$\Pi = \Pi(r_{ik}), \quad r_{ik}^2 = \left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k\right|^2 = \left(x_i - x_k\right)^2 + \left(y_i - y_k\right)^2 + \left(z_i - z_k\right)^2$$

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)^2 - \Pi\left(r_{ik}\right)$$

Однопараметрическое семейство преобразований

$$\hat{t} = t, \quad \hat{x}_i = x_i + \alpha, \quad \hat{y}_i = y_i, \qquad \hat{z}_i = z_i$$

$$\frac{d\hat{x}_i}{d\hat{t}} = \frac{dx_i}{dt},$$

$$(\hat{x}_i - \hat{x}_k) = (x_i - x_k)$$

Условие вариационной симметрии

$$\boxed{L\left(q, \dot{q}\right) dt = L\left(\hat{q}, \dot{\hat{q}}\right) d\hat{t}}$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n}\left[p_{x,i}\left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} + p_{y,i}\left(\frac{\partial \hat{y}_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} + p_{z,i}\left(\frac{\partial \hat{z}_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\right] - H\left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^{n} p_{x,i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i$$

$$\boxed{Q_x = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i = \text{const}}$$

Закон сохранения количества движения– следствие инвариантности лагранжиана системы относительно сдвига по пространственной координате

10. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Замкнутая система n материальных точек. $$L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2\right)^2-\Pi\left(r_{ik}\right)$$

Однопараметрическое семейство преобразований

$$\boxed{\hat{t}=t,\quad \hat{x}_i=x_i\cos\alpha+y_i\sin\alpha,\quad \hat{y}_i=-x_i\sin\alpha+y_i\cos\alpha,\qquad \hat{z}_i=z_i}\qquad \hat{r}_{ik}^2=r_{ik}^2$$

$$\left(\frac{d\hat{x}_i}{d\hat{t}}\right)^2+\left(\frac{d\hat{y}_i}{d\hat{t}}\right)^2=\left(\frac{dx_i}{dt}\cos\alpha+\frac{dy_i}{dt}\sin\alpha\right)^2+\left(-\frac{dx_i}{dt}\sin\alpha+\frac{dy_i}{dt}\cos\alpha\right)^2=\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2$$

Условие вариационной симметрии выполнено

$$\Phi=\sum_{i=1}^{n}\left[p_{x,i}\left.\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}+p_{y,i}\left.\frac{\partial\hat{y}_i}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}+p_{z,i}\left.\frac{\partial\hat{z}_i}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\right]-H\left.\frac{\partial\hat{t}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=\sum_{i=1}^{n}\left(p_{x,i}y_i-p_{y,i}x_i\right)$$

$$\boxed{K_z=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\dot{x}_i y_i-\dot{y}_i x_i\right)=\text{const}}$$

Закон сохранения кинетического момента– следствие инвариантности лагранжиана системы относительно поворотов.

11. ПРИМЕР В.Ф. ЖУРАВЛЕВА

Свободная материальная точка $$L = \frac{1}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2$$

Семейство преобразований $\boxed{\hat{t} = te^{A\alpha}, \quad \hat{q} = qe^{B\alpha}}$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\right)^2 \frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\left(qe^{B\alpha}\right)}{d\left(te^{A\alpha}\right)}\right)^2 \left(\frac{dte^{A\alpha}}{dt}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 e^{\alpha(2B-A)}$$

Условие вариационной симметрии выполнено при $A = 2B$

$$\Phi(q,p,t) = p\left(\frac{\partial\hat{q}}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0} - H\left(\frac{\partial\hat{t}}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0} = Bpq - \frac{1}{2}p^2 At = B\left(pq - p^2 t\right) = B\left(\dot{q}q - \dot{q}^2 t\right)$$

$$\boxed{\dot{q}\left(q - \dot{q}t\right) = \mathrm{const}}$$