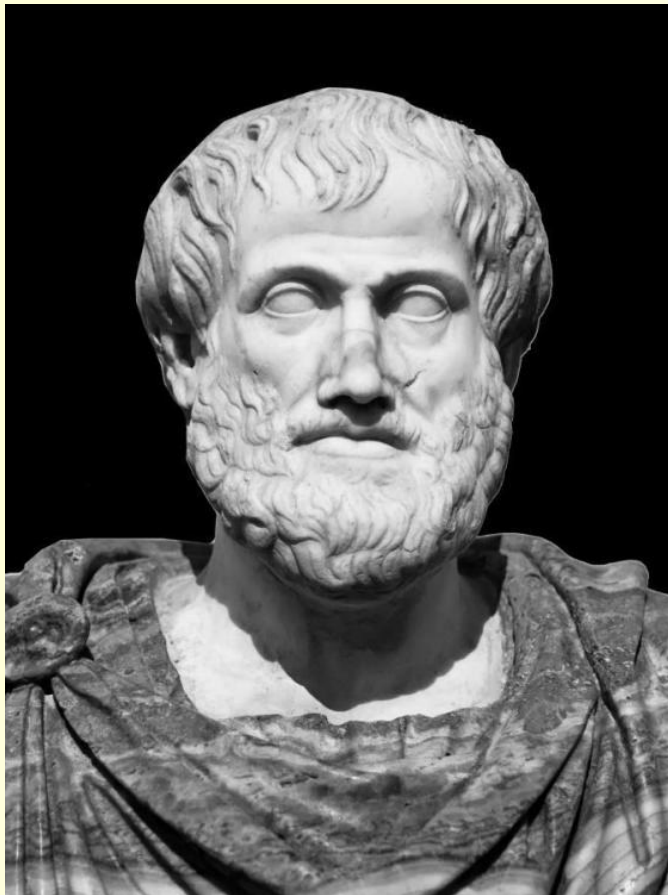


Алгебра высказываний

Урок 1

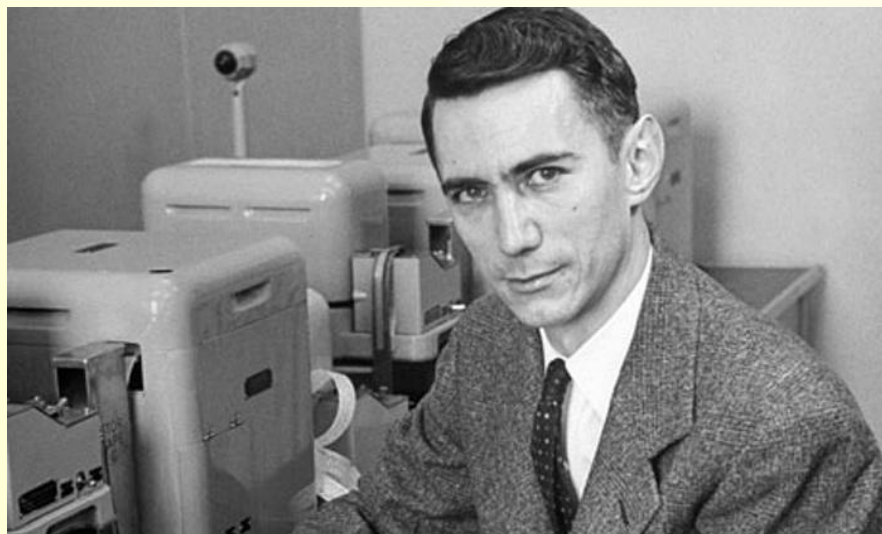
МБОУ СОШ №7 п.Коммаяк
Кировского района
Ставропольского края
Учитель высшей
квалификационной категории
Куликова Татьяна Ивановна



Еще живший в 384 - 322 г.г. до нашей эры древнегреческий ученый и философ Аристотель (Ἀριστοτέλης) пытался найти ответ на вопрос “Как мы рассуждаем”, изучал правила мышления. Он впервые дал систематическое изложение логики, подверг анализу человеческое мышление, его формы – понятие, суждение, умозаключение. Так возникла формальная логика.



Немецкий ученый и философ Готфрид - Вильгельм Лейбниц (Gottfried Wilhelm von Leibniz) (1646-1716) начал развивать идею формализации логики, размышляя о ее переводе "из словесного царства, полного неопределенностей, в царство математики, где отношения между объектами или высказываниями определяются совершенно точно". Лейбниц мечтал создать особый язык для выражения мыслей в чистом виде - *lingua mentalis*, с помощью которого можно было бы математически строго выразить любую мысль. При этом он уделял особое внимание двоичной системе счисления, считая ее основой основ для любого счета.



Claude Elwood Shannon (1916 - 2001).

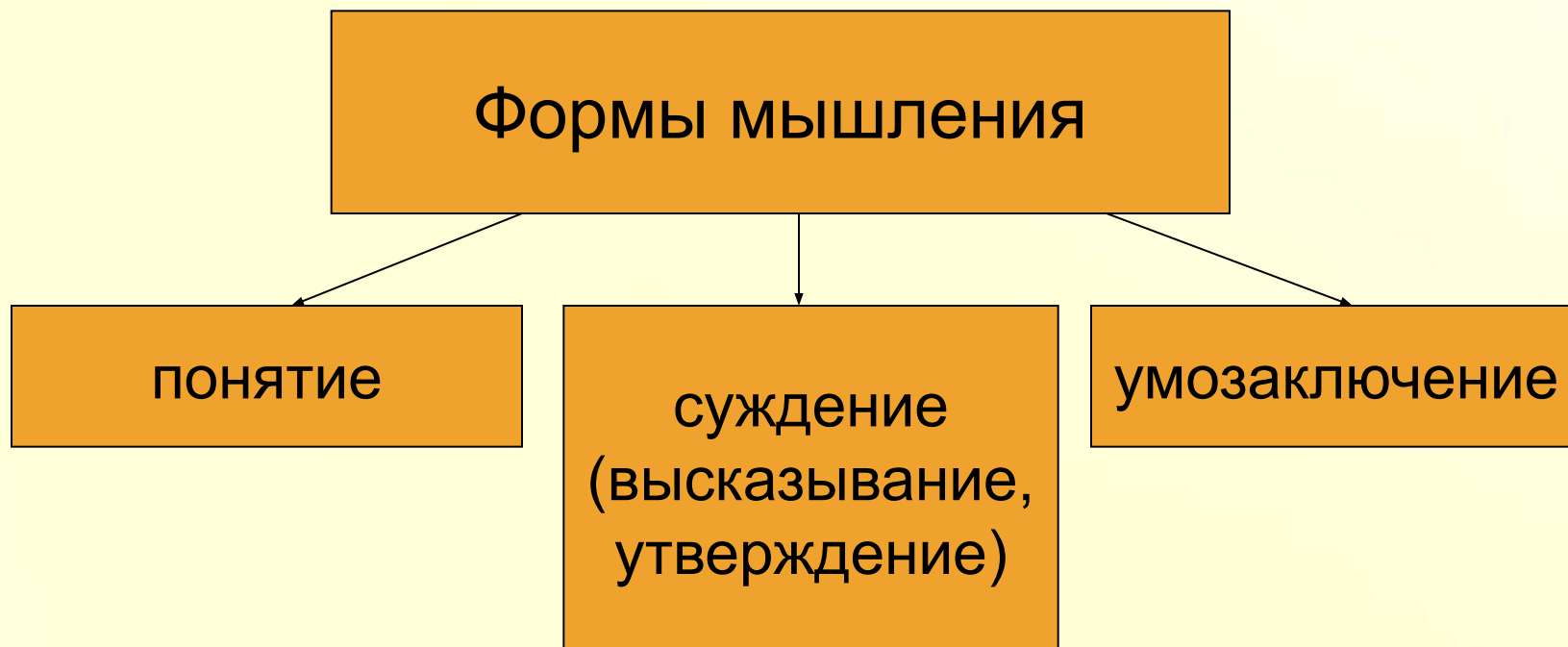
Является основателем теории информации, нашедшей применение в современных высокотехнологических системах связи. Шеннон внес огромный вклад в теорию вероятностных схем, теорию автоматов и теорию систем управления — области наук, входящие в понятие кибернетика.



Буль (Boole) Джордж (1815 — 1864) английский математик и логик. Не имея специального математического образования, в 1849 стал профессором математики в Куинс-колледже в Корке (Ирландия), где преподавал до конца жизни. Д. Буля почти в равной мере интересовали логика, математический анализ, теория вероятностей, этика Б. Спинозы, философские работы Аристотеля и Цицерона.

Алгебра в широком смысле этого слова — наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться над различными математическими объектами (алгебра переменных и функций, алгебра векторов, алгебра множеств и т.д.).

Логика – это наука о формах и способах мышления



Понятие - это форма мышления, которая выделяет существенные признаки предмета или класса предметов, отличающие его от других.

Понятие выражается одним или несколькими словами.

Понятие имеет две стороны: содержание и объем.

Например: треугольник, компьютер, персональный компьютер, стол, дом и т.п.

Суждения - это форма мышления, в которой утверждается или отрицается связь между предметом и его признаком, отношения между предметами или факт существования предмета и которая может быть либо истинной, либо ложной. Языковой формой выражения суждения является повествовательное предложение. Вопросительные и побудительные предложения суждениями не являются.

Суждения рассматриваются не с точки зрения их смысла и содержания, а только с точки зрения их истинности или ложности. Истинным будет суждение, в котором связь понятий правильно отражает свойства и отношения реальных объектов. "Дважды два равно четырем" - истинное суждение, а вот "Процессор предназначен для печати" - ложное. Суждения могут быть простыми и сложными. "Весна наступила, и грачи прилетели" - сложное суждение, состоящее из двух простых.

КАКИЕ ИЗ ПРЕДЛОЖЕНИЙ ЯВЛЯЮТСЯ ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ? ОПРЕДЕЛИТЕ ИХ ИСТИННОСТЬ

1. Число 6 – чётное.

Да

2. Посмотрите на доску.

Нет

3. Все роботы являются
машинами.

Да

КАКИЕ ИЗ ПРЕДЛОЖЕНИЙ ЯВЛЯЮТСЯ ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ? ОПРЕДЕЛИТЕ ИХ ИСТИННОСТЬ

4. У каждой лошади есть хвост.

Да

5. Внимание!

Нет

6. Кто отсутствует?

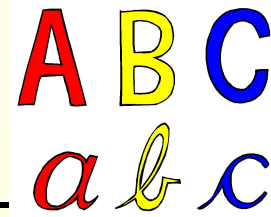
Нет

Умозаключение

Пример 1: заключение на основании двух посылок:

Посылка: все буквы - знаки.

Посылка: «А» - это буква.



Заключение: буква «А» - это знак.

Пример 2: заключение на основании трех посылок:

Посылка: Буква – это часть слова.

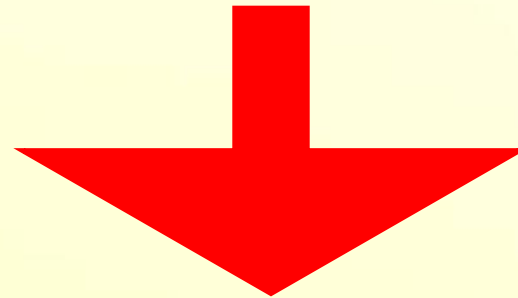
Посылка: Слово – часть предложения.

Посылка: Предложение – часть текста.

Заключение: буква «А» - это текста.

Умозаключение на основании одной посылки

«Все квадраты – геометрические
фигуры»



«Некоторые
геометрические фигуры
- квадраты»

Объектами алгебры логики являются высказывания.

Алгебру логики интересует только один факт — истинно или ложно данное высказывание, что дает возможность определять истинность или ложность составных высказываний алгебраическими методами.

Простые высказывания в алгебре логики обозначаются заглавными латинскими буквами:

$A = \{\text{Аристотель — основоположник логики}\};$

$B = \{\text{На яблонях растут бананы}\}.$

Истинному высказыванию ставится в соответствие 1, ложному — 0.

Таким образом, $A=1, B=0$.

Составные высказывания на естественном языке образуются с помощью союзов, которые в алгебре высказываний заменяются на логические операции.

Логические операции задаются таблицами истинности и могут быть проиллюстрированы с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Логическая операция КОНЪЮНКЦИЯ (логическое умножение)

- в естественном языке соответствует союзу **И**;
- в алгебре высказываний обозначение **&**;
- в языках программирования обозначение **And**.

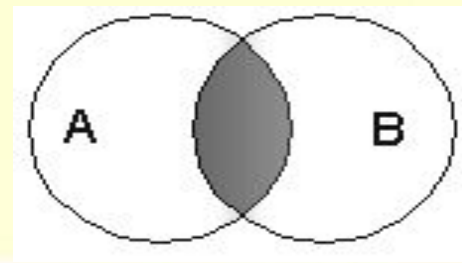
Конъюнкция – это логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

Таблица истинности

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

В АЛГЕБРЕ МНОЖЕСТВ КОНЪЮНКЦИИ СООТВЕТСТВУЕТ ОПЕРАЦИЯ *ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МНОЖЕСТВ*, Т.Е. МНОЖЕСТВУ ПОЛУЧИВШЕМУСЯ В РЕЗУЛЬТАТЕ УМНОЖЕНИЯ МНОЖЕСТВ *A* И *B* СООТВЕТСТВУЕТ МНОЖЕСТВО, СОСТОЯЩЕЕ ИЗ ЭЛЕМЕНТОВ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ОДНОВРЕМЕННО ДВУМ МНОЖЕСТВАМ.

Диаграмма Эйлера-Венна



Логическая операция ДИЗЪЮНКЦИЯ (логическое сложение)

- в естественном языке соответствует союзу **ИЛИ**;
- в алгебре высказываний обозначение **V**;
- в языках программирования обозначение **Or**.

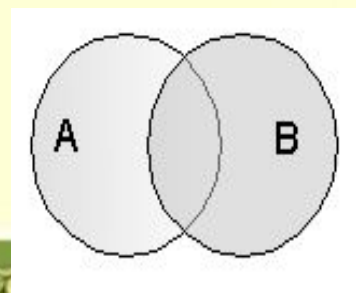
Дизъюнкция — это логическая операция, которая каждому двум простым высказываниям ставит в соответствие составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны и истинным, когда хотя бы одно из двух образующих его высказываний истинно.

Таблица истинности

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

В АЛГЕБРЕ МНОЖЕСТВ ДИЗЬЮНКЦИИ СООТВЕТСТВУЕТ ОПЕРАЦИЯ ОБЪЕДИНЕНИЯ МНОЖЕСТВ, Т.Е. МНОЖЕСТВУ ПОЛУЧИВШЕМУСЯ В РЕЗУЛЬТАТЕ СЛОЖЕНИЯ МНОЖЕСТВ A И B СООТВЕТСТВУЕТ МНОЖЕСТВО, СОСТОЯЩЕЕ ИЗ ЭЛЕМЕНТОВ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ЛИБО МНОЖЕСТВУ A , ЛИБО МНОЖЕСТВУ B .

Диаграмма Эйлера-Венна



Логическая операция ИНВЕРСИЯ (отрицание)

- в естественном языке соответствует словам **неверно, что...** и частице **не**;
- в алгебре высказываний обозначение $\bar{A}$;
- в языках программирования обозначение **Not**.

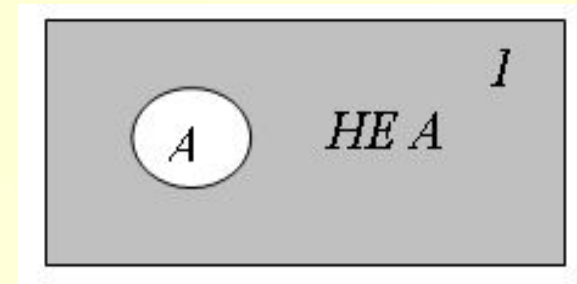
Отрицание – это логическая операция, которая каждому простому высказыванию ставит в соответствие составное высказывание, заключающееся в том, что исходное высказывание отрицается.

Таблица истинности

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

В АЛГЕБРЕ МНОЖЕСТВ ЛОГИЧЕСКОМУ ОТРИЦАНИЮ СООТВЕТСТВУЕТ ОПЕРАЦИЯ *ДОПОЛНЕНИЯ ДО УНИВЕРСАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА*, Т.Е. МНОЖЕСТВУ ПОЛУЧИВШЕМУСЯ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОТРИЦАНИЯ МНОЖЕСТВА A СООТВЕТСТВУЕТ МНОЖЕСТВО , ДОПОЛНЯЮЩЕЕ ЕГО ДО УНИВЕРСАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА.

Диаграмма Эйлера-Венна



Логическая операция ИМПЛИКАЦИЯ (логическое следование)

- в естественном языке соответствует обороту **если ..., то ...;**
- обозначение $\rightarrow$.

Импликация – это логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда условие (1-ое высказывание) истинно, а следствие (2-ое высказывание) ложно.

Таблица истинности

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Логическая операция ЭКВИВАЛЕНЦИЯ (равнозначность)

- в естественном языке соответствует оборотам речи **тогда и только тогда; в том и только в том случае;**
- обозначение $\leftrightarrow$, $\sim$.

Эквиваленция – это логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.

Таблица истинности

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логические операции имеют следующий приоритет:

- действия в скобках;
- инверсия (отрицание);
- $\&$;
- $\vee$;
- $\rightarrow$;
- $\leftrightarrow$.

Алгебра высказываний

Урок 2

Повторение по теме «Дизъюнкция, конъюнкция, отрицание»

1. Найдите значения логических выражений:

- а) $(1 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$;
- б) $((1 \vee 0) \vee 1) \vee 1$;
- в) $(0 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$;
- г) $(0 \& 1) \& 1$;
- е) $((1 \vee 0) \& (1 \& 1)) \& (0 \vee 1)$;
- ж) $((1 \& 0) \vee (1 \& 0)) \vee 1$;
- з) $((1 \& 1) \vee 0) \& (0 \vee 1)$;
- и) $((0 \& 0) \vee 0) \& (1 \vee 1)$.

2. Даны два простых высказывания:

$A = \{2 \cdot 2 = 4\}$, $B = \{2 \cdot 2 = 5\}$.

Какие из высказываний истинны:

- а) A ; б) B ; в) $A \& B$; г) $A \vee B$; д) $\neg A$; е) $A \wedge B$; ж) $A \wedge \neg B$?

3. Даны простые высказывания:

$A = \{\text{Принтер — устройство ввода информации}\}$,

$B = \{\text{Процессор — устройство обработки информации}\}$,

$C = \{\text{Монитор — устройство хранения информации}\}$,

$D = \{\text{Клавиатура — устройство ввода информации}\}$.

Определите истинность высказывания: $(A \& B) \& (C \vee D)$.

Повторение по теме

«Импликация и эквивалентность»

1. Даны истинные высказывания: A = «на улице идет снег» и B = «нужно надеть шапку».

Составьте высказывания: а) $A \Rightarrow B$, б) $B \Rightarrow A$, которые будут принимать ложные значения.

2. Даны истинные высказывания A = «Карлсон хочет варенье» и B = «Карлсон летает на свежем воздухе». Составьте истинные высказывания вида $A \Leftrightarrow B$.

3. Даны простые высказывания:

A = {Принтер — устройство ввода информации},

B = {Процессор — устройство обработки информации},

C = {Монитор — устройство хранения информации},

D = {Клавиатура — устройство ввода информации}.

Определите истинность составных высказываний:

а) $(A \vee B) \Leftrightarrow (C \& D)$; б) $A \leftrightarrow B$.

4. Даны простые высказывания:

A = { $5 > 3$ }, B = { $2 = 3$ } и C = { $4 < 2$ }.

Определите истинность составных высказываний

а) $(A \vee B) \& C \Rightarrow (A \& C) \vee (B \& C)$;

б) $(A \& B) \vee C \leftrightarrow (A \vee C) \& (A \& B)$.

ЛОГИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

Сложные высказывания можно записывать в виде формул. Для этого простые логические высказывания нужно обозначить как логические переменные буквами и связать их с помощью знаков логических операций. Такие формулы называются *логическими выражениями*. Например:

$$(A \vee B) \& (\bar{A} \vee \bar{B})$$
$$\overline{(A \vee B \& C)}$$

Чтобы определить значение логического выражения необходимо подставить значения логических переменных в выражение и выполнить логические операции. Операции в логическом выражении выполняются слева направо с учетом скобок в следующем порядке:

1. инверсия;
2. конъюнкция;
3. дизъюнкция;
4. импликация и эквивалентность.

Для изменения указанного порядка выполнения логических операций используются круглые скобки.

Таблицы истинности

Для каждого составного высказывания (логического выражения) можно построить *таблицу истинности*, которая определяет истинность или ложность логического выражения при всех возможных комбинациях исходных значений простых высказываний (логических переменных).

При построении таблиц истинности целесообразно руководствоваться определенной последовательностью действий:

- 1) записать выражение и определить порядок выполнения операций
- 2) определить количество строк в таблице истинности. Оно равно количеству возможных комбинаций значений логических переменных, входящих в логическое выражение (определяется по формуле $Q=2^n$, где n - количество входных переменных)
- 3) определить количество столбцов в таблице истинности (= количество логических переменных + количество логических операций)
- 4) построить таблицу истинности, обозначить столбцы (имена переменных и обозначения логических операций в порядке их выполнения) и внести в таблицу возможные наборы значений исходных логических переменных.
- 5) заполнить таблицу истинности, выполняя базовые логические операции в необходимой последовательности и в соответствии с их таблицами истинности

Теперь мы можем определить значение логической функции для любого набора значений логических переменных.

Например, построим таблицу истинности для логической функции:

$$F(A, B, C) = \bar{A} \& (B \vee C)$$

Количество входных переменных в заданном выражении равно трем (A, B, C). Значит, количество входных наборов, а значит и строк $Q = 2^3 = 8$. Количество столбцов равно 6 (3 переменные + 3 операции). Столбцы таблицы истинности соответствуют значениям исходных выражений A, B, C , промежуточных результатов и $(B \vee C)$, а также искомого окончательного значения сложного арифметического выражения

$$\bar{A} \& (B \vee C)$$

$$F(A, B, C) = \bar{A} \& (B \vee C)$$

A	B	C	$\bar{A}$	$B \vee C$	$\bar{A} \& (B \vee C)$

$$F(A, B, C) = \bar{A} \& (B \vee C)$$

A	B	C	$\bar{A}$	B $\vee$ C	$\bar{A} \& (B \vee C)$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

A	B	C	$\bar{A}$	$B \vee C$	$\bar{A} \& (B \vee C)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

Задание. Постройте таблицу истинности для данного логического выражения:

$$(A \vee B) \& (\bar{A} \vee B)$$

ТОЖДЕСТВЕННАЯ ИСТИНА

$$x \cdot y \vee \overline{x \vee y} \vee x$$

Переменные		Промежуточные логические формулы					Формула
$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x}$	$\overline{x \cdot y}$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x \vee y}$	$x \cdot y \vee \overline{x \vee y}$	$\overline{x \cdot y \vee \overline{x \vee y} \vee x}$
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

При всех наборах значений переменных x и y формула принимает значение 1, то есть является тождественно истинной.

ТОЖДЕСТВЕННАЯ ЛОЖЬ

$$\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \overline{y})$$

Переменные		Промежуточные логические формулы				Формула
$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{y}$	$x \cdot \overline{y}$	$\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \overline{y})$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0

При всех наборах значений переменных x и y формула принимает значение 0, то есть является тождественно ложной.

ВЫПОЛНИМАЯ ФОРМУЛА

$$\overline{\overline{x \vee \overline{y}} \vee \overline{x} \cdot z}$$

Переменные			Промежуточные логические формулы					Формула
$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{z}$	$\overline{y}$	$x \vee \overline{y}$	$\overline{\overline{x \vee \overline{y}}}$	$\overline{x}$	$\overline{x} \cdot z$	$\overline{\overline{x \vee \overline{y}} \vee \overline{x} \cdot z}$
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0

Формула в некоторых случаях принимает значение 1, а в некоторых — 0, то есть является выполнимой.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

1. Выучить определения, знать обозначения.

2. Даны высказывания:

$A = \{\text{На улице светит солнце}\},$

$B = \{\text{На улице дождь}\},$

$C = \{\text{На улице пасмурная погода}\},$

$D = \{\text{На улице идет снег}\}.$

Составьте два сложных высказывания, одно из которых в любой ситуации всегда будет ложным, а другое истинным.

2. Построить таблицу истинности следующих выражений:

$$F = A \vee B \& \bar{A}$$

$$M = \overline{C \vee D} \& \bar{D}$$

$$A = (S \& F) \Rightarrow \overline{(S \vee F)}$$

$$P = A \& B \vee \bar{C}$$