ОСНОВЫ ЛОГИКИ
И
ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРА

СОДЕРЖАНИЕ

Занятие № 1

Тема: Формы человеческого мышления. Формальная логика.

ЛОГИКА КАК НАУКА

- ***LOGOS*** **(ГРЕЧ.) - слово, понятие, рассуждение, разум.**
- **Это наука о законах и формах рационального мышления.**
- ***Логика*** **– одна из древнейших наук.**
  Её основателем считается древнегреческий философ ***Аристотель*****, который первым систематизировал формы и правила мышления.**
- ***Мыслить логично*** **– значит мыслить точно и последовательно, не допускать противоречий в своих рассуждениях, уметь вскрывать логические ошибки.**

ФОРМЫ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

- **В логике выделяют следующие формы мышления:**
  - ***понятие;***
  - ***суждение;***
  - ***умозаключение.***

ПОНЯТИЕ

- ***Понятие*** – это форма мышления, в которой отражаются отличительные существенные признаки предметов.
- ***Существенными*** называются такие признаки, каждый из которых, взятый отдельно, ***необходим***, а все вместе ***достаточны***, чтобы с их помощью отличить (выделить) данный предмет (явление) от всех остальных и сделать обобщение, объединив однородные предметы в множество.

ПОНЯТИЕ

- **Понятие имеет две основные логические характеристики:**
  - ***содержание;***
  - ***объем*.**
- ***Содержание понятия*** **– совокупность существенных признаков, отраженных в этом понятии.**
- ***Объем понятия*** **– множество предметов, каждому из которых принадлежат признаки, составляющие содержание понятия.**

ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПОНЯТИЯМИ

- **По отношению друг к другу понятия делятся на *сравнимые и несравнимые.***
- **Далекие друг от друга по своему содержанию понятия, не имеющие общих признаков, называются *несравнимыми* (романс и кирпич).**
- **Понятия назовем сравнимыми, если в содержании этих понятий имеется хотя бы один общий признак (*например*, олень, корова, волк, овца – животные).**

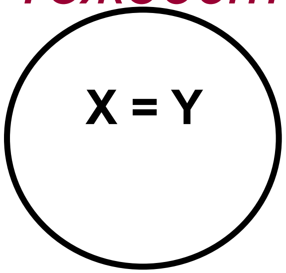
ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПОНЯТИЯМИ

- **Сравнимые понятия делятся по объему на:**
  - ***совместимые;***
  - ***несовместимые*.**
- ***Совместимыми* называются понятия, объёмы которых имеют общие элементы.**
- ***Несовместимыми* называются понятия, объёмы которых не имеют общих элементов.**

Наглядная геометрическая иллюстрация объемов понятий и отношений между ними была предложена Эйлером и носит название *кругов Эйлера.*

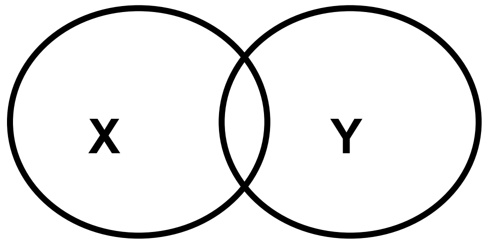
Обозначение сравнимых совместимых понятий

Тождество



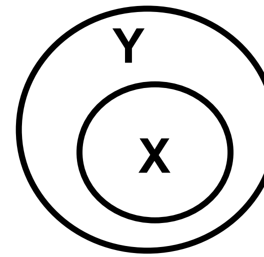
X – Юрий Гагарин
Y – первый космонавт

Пересечение



X – школьник
Y - спортсмен

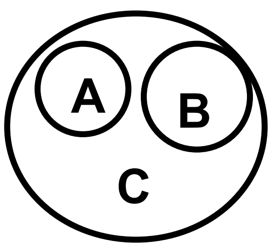
Подчинение



X – лев
Y - хищник

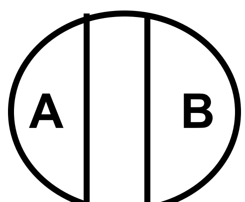
Обозначение сравнимых несовместимых понятий

Соподчинение



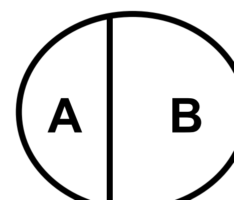
A – береза,
B – ель,
C - дерево

Противоположность



A – большой дом
B – маленький дом

Противоречие



A – большой дом
B – небольшой дом

СУЖДЕНИЕ

- ***Суждение (высказывание, утверждение)*** – это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о предметах, их свойствах или отношениях между ними.
- Примеры суждений:
  - Этот апельсин вкусный.
  - Если прошел дождь, то на улице весна.
  - На Луне живут лунатики, а на Марсе – марсиане.

СУЖДЕНИЕ

- **Суждение выражается в форме повествовательного предложения.**
- **Суждения бывают:**
  - ***простыми*** **(** ***Наступила весна*****);**
  - ***сложными*** **(** ***Наступила весна, прилетели грачи*****).**
- ***Содержание суждения*** **– это то, о чем в нем идет речь, его смысл.**
- **Всякое суждение по своему содержанию может быть:**
  - **либо** ***истинным*****;**
  - **либо** ***ложным*****.**

СУЖДЕНИЕ

- **Истинность или ложность простых высказываний устанавливается в результате *соглашения* на основании здравого смысла (Например, суждение «Он – хороший шахматист» может быть истинным или ложным, в зависимости от того, кто имеется в виду под местоимением «он»).**
- **Значение истинности сложных суждений *вычисляется*.**
- **И здесь интерес представляет то, что характеризует каждое из суждений и неизменно для каждого из них, а именно *форма*.**
- ***Логическая форма суждения* – это его строение, способ связи его составных частей.**

СУЖДЕНИЕ

- **Форма суждения, в отличие от его содержания, *объективна*, то есть не зависит от тех или иных взглядов того или иного человека.**

СУЖДЕНИЕ

- **Попробуем определить логическую форму следующих суждений:**
  1. ***Все лошади едят овес.***
  2. ***Все реки впадают в море.***
  3. ***Все школьники – отличники.***
  4. ***Все книги имеют страницы.***
  5. ***Все планеты вращаются вокруг звезд.***
  – **Во всех суждениях говорится о разном (у них различное содержание), но они имеют одинаковую логическую форму:**
    Все S есть P.
- **А суждения:**
  1. ***Все медузы не имеют головы.***
  2. ***Люди не боги.***
  – **Имеют другую логическую форму:**
    Все S не есть P.

УМОЗАКЛЮЧЕНИЕ

- ***Умозаключение*** **– форма мышления, посредством которой из одного или нескольких суждений, называемых посылками, мы по определенным правилам вывода получаем суждение-заключение (вывод умозаключения).**
- **Посылками умозаключения могут быть по правилам логики только истинные суждения.**
- **Еще в древности было известно рассуждение, ставшее классическим образцом верного логического умозаключения:**

Все люди смертны. Все S есть P.
Сократ – человек.Некоторые А есть S.

Сократ смертен. ***Некоторые А есть P.***

ПРИМЕРЫ ВЕРНЫХ УМОЗАКЛЮЧЕНИЙ

УМОЗАКЛЮЧЕНИЕ	ФОРМА УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ
Все граждане России имеют право на отдых. *Я – гражданин России.* ——————— *Я имею право на отдых.*	*Все S есть P.* *A есть S.* ——————— *A есть P.*
Если цветы поливают, то они не засохнут. *Цветы засохли.* ——————— *Цветы не поливали.*	*Если S есть P1,* *то S есть P2.* *S есть P2.* ——————— *S не есть P1.*

УМОЗАКЛЮЧЕНИЕ

УМОЗАКЛЮЧЕНИЕ	ИСТИННОСТЬ СУЖДЕНИЙ	ФОРМА УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ
Если что-то есть металл, то оно проводит электрический ток. Алюминий проводит ток. ――――― Алюминий – металл.	*Истина. Истина. ――――― Истина.*	*Если S есть P1, то S есть P2. A есть P2. ――――― A есть P1.*
Если что-то есть металл, то оно проводит электрический ток. Вода проводит ток. ――――― Вода – металл.	*Истина. Истина. ――――― Ложь*	*Если S есть P1, то S есть P2. A есть P2. ――――― A есть P1.*

ПРИМЕРЫ НЕВЕРНЫХ УМОЗАКЛЮЧЕНИЙ

1. Все зебры полосаты
   Это животное полосато.

   Это животное – зебра.

   Все S есть P.
   Некоторый A есть P.

   Некоторый A есть S.

2. Все школьники – отличники.
   Вовочка – школьник.

   Вовочка – отличник.

3. Людей много.
   Сократ – человек.

   Сократов много.

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

- Итак, с точки зрения содержания суждений в процессе мышления формируется истинное или ложное отражение мира.
- А если рассматривать мышление со стороны формы, то имеет значение только его логическая правильность или неправильность.

ФОРМАЛЬНАЯ ЛОГИКА

- **Античную логику, основанную Аристотелем, принято называть *формальной логикой.***
- **Это название происходит от *основного принципа логики* как науки, который гласит, что *правильность рассуждения (умозаключения) определяется только его логической формой, или структурой, и не зависит от конкретного содержания входящих в него суждений.***

Основной принцип формальной логики предполагает:

- каждое рассуждение, выраженное на некотором языке, имеет содержание и форму;
- содержание и форма различаются и могут быть разделены;
- содержание не оказывает влияния правильность рассуждения (поэтому от него можно отвлечься);
- для оценки правильности рассуждения существенна лишь его форма;

Занятие № 2

Тема: Алгебра высказываний.
Логические операции.
Логические переменные и логические функции.
Сложное высказывание.

РАЗВИТИЕ ЛОГИКИ

- **В своем развитии логика прошла ряд этапов.**
- **Современную логику называют символической или *математической логикой.***
- **У истоков современной логики стоит *Готфрид Вильгельм Лейбниц (XVII век):***
  - **Выдвинул идею представить логическое доказательство как вычисление, подобное вычислению в математике;**
  - **Обосновал необходимость создания универсального логического языка, который, в отличие от естественного языка, мог бы точно и однозначно выражать различные понятия и отношения.**
  - **Разработал своего рода алгебру человеческого мышления, позволяющую получать из уже известных истин новые истины путем точных вычислений.**

РАЗВИТИЕ ЛОГИКИ

- **Подлинный прогресс математической логики был достигнут в середине XIX века, благодаря труду английского логика *Джорджа Буля «Математический анализ логики»:***
  - **он перенес на логику законы и правила алгебраических действий;**
  - **ввел логические операции;**
  - **предложил способ записи высказываний в символической форме.**

РАЗВИТИЕ ЛОГИКИ

- **Вклад в развитие математической логики внесли выдающиеся математики и логики конца XIX и XX веков:**
  - *К. Гедель (Австрия);*
  - *Д. Гильберт (Германия);*
  - *А. Тьюринг (Англия);*
  - *А. Колмогоров;*
  - *П. Новиков;*
  - *А. Марков.*

РАЗВИТИЕ ЛОГИКИ

- **Современная математическая логика представляет собой обширную научную область и находит широкое применение как внутри математики:**
  - ***Исследование оснований математики***
- **Так и вне ее:**
  - ***анализ и синтез автоматических устройств;***
  - ***теоретическая кибернетика, в частности искусственный интеллект.***

ПОНЯТИЕ ОБ АЛГЕБРЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

- ***Алгебра логики (алгебра высказываний) –*** **раздел математической логики, изучающий строение сложных логических высказываний и способы установления их истинности с помощью алгебраических методов.**
- ***Высказывание –*** **повествовательное предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно.**
- **Обозначаются высказывания прописными буквами.**
- **Если высказывание *А истинное*, то будем писать А=1 и говорить *«А истинно».***
- **Если высказывание *А ложное*, то будем писать А=0 и говорить *«А ложно».***

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

- ***ЛОГИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИЯ*** **– это способ построения сложного высказывания из данных высказываний, при котором значение истинности сложного высказывания полностью определяется значением истинности исходных высказываний**.
  - ***Инверсия*** (логическое отрицание)
  - ***Конъюнкция*** (логическое умножение)
  - ***Дизъюнкция*** (логическое сложение)
  - ***Импликация*** (логическое следование)
  - ***Эквивалентность*** (логическое равенство)

ИНВЕРСИЯ (логическое отрицание)
образуется из высказывания с помощью добавления частицы «не» к сказуемому или использование оборота речи «неверно, что …»

Инверсия высказывания истинна, когда высказывание ложно, и ложна, когда высказывание истинно.

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Обозначение: $\overline{A}$, НЕ А, NOT A, ¬ A

ПРИМЕР ИНВЕРСИИ

- **A = у меня есть автомобиль**
- **$\overline{A}$ = у меня нет автомобиля**

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

ДИЗЪЮНКЦИЯ (логическое сложение) **образуется соединением двух высказываний в одно с помощью союза «или»**

Дизъюнкция двух высказываний ложна тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны, и истинна, когда хотя бы одно высказывание истинно.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

***Обозначение*: A ИЛИ B, A OR B, A I B, A v B, A ∪ B**

ПРИМЕР ДИЗЪЮНКЦИИ

- A = На стоянке стоит «Мерседес»
- B = На стоянке стоят «Жигули»

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

КОНЪЮНКЦИЯ(логическое умножение) **образуется соединением двух высказываний в одно с помощью союза «и».**

Конъюнкция двух высказываний истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны, и ложна, когда хотя бы одно высказывание ложно.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

***Обозначение*: A И B, A · B, A AND B, A & B, A ∧B**

ПРИМЕР КОНЪЮНКЦИИ

- **А = На стоянке стоит «Мерседес»**
- **В = На стоянке стоят «Жигули»**

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ИМПЛИКАЦИЯ (логическое следование) **образуется соединением двух высказываний в одно с помощью оборота речи «если …, то …»**

Импликация двух высказываний ложна тогда и только тогда, когда из истинного высказывания следует ложное.

A	B	A→B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Обозначение: **A□B, A ⇨ B**

ПРИМЕР ИМПЛИКАЦИИ

- A = На улице дождь
- B = Асфальт мокрый

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (логическое равенство)
образуется соединением двух высказываний в одно при помощи оборота речи « … тогда и только тогда, когда …»

Эквивалентность двух высказываний истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны или ложны.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

***Обозначение*: A ~ B, A ⇔ B, A □ B, A Ξ B**

ПРИМЕР ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

- **A = Число делится на 3 без остатка**
- **B = Сумма цифр числа делится нацело на 3**

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ЛОГИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

- **Буквы, обозначающие высказывания (А, В, …), можно рассматривать как *имена логических переменных*, так как ими можно заменить любые высказывания (с любым содержанием), то есть построенные нами таблицы истинности, задающие логические операции, верны для любых высказываний.**
- **Говоря раньше о логических операциях над высказываниями, мы фактически рассмотрели *основные логические операции над двумя логическими переменными.***

ЛОГИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

- **В алгебре логики из логических переменных, логических констант и знаков логических операций составляются *логические выражения* (подобно тому как в алгебре чисел формируются арифметические выражения).**
- **Выражения алгебры логики также называют *формулами*.**
- **Логические переменные принимают два значения:**
  - ***1 – « истина »;***
  - ***0 – « ложь ».***

ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

- **Любое составное высказывание можно рассматривать как *логическую функцию* $F(X_1, X_2,\ldots, X_n)$.**
- ***Аргументами функции* являются переменные X_1, X_2, …, X_n – простые высказывания.**
- **Как и аргументы сама функция также может принимать только два различных значения:**
  - ***1 – « истина »;***
  - ***0 – « ложь ».***

ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

- **Нами были рассмотрены логические функции двух аргументов:**
  - **Логическое умножение;**
    F(A,B) = A & B
  - **Логическое сложение;**
    F(A,B) = A v B
  - **Логическое отрицание;**
    F(A,B) = $\overline{A}$
  - **Логическое следование (импликация);**
    F(A,B) = A□B
  - **Логическое равенство (эквивалентность)**
    F(A,B) = A ~ B
- **Всего же логических функций двух переменных существует N = 2^4 = 16, так как каждая логическая функция от двух переменных имеет 4 возможных набора значений аргументов.**

СВОДНАЯ ТАБЛИЦА ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Значение функции F(X,Y)				Название функции	Обозначение функции
X=0, Y=0	X=0, Y=1	X=1, Y=0	X=1, Y=1		
0	0	0	0	Константа 0	$F = 0$
0	0	0	1	Конъюнкция	$F = X \& Y$
0	0	1	0	Отрицание импликации	$F = \overline{(X \square Y)}$
0	0	1	1	Переменная X	$F = X$
0	1	0	0	Отрицание импликации	$F = \overline{(Y \square X)}$
0	1	0	1	Переменная Y	$F = Y$
0	1	1	0	Отрицание эквивалентности	$F = \overline{(X \leftrightarrow Y)}$
0	1	1	1	Дизъюнкция	$F = X \vee Y$

СВОДНАЯ ТАБЛИЦА ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Значение функции F(X,Y)				Название функции	Обозначение функции
X=0, Y=0	X=0, Y=1	X=1, Y=0	X=1, Y=1		
1	0	0	0	Отрицание дизъюнкции	$F = \overline{(X \vee Y)}$
1	0	0	1	Эквивалентность	F = X □ Y
1	0	1	0	Отрицание Y	$F = \overline{Y}$
1	0	1	1	Импликация YX	F = Y□X
1	1	0	0	Отрицание X	$F = \overline{X}$
1	1	0	1	Импликация XY	F = X□Y
1	1	1	0	Отрицание конъюнкции	$F = \overline{(X \& Y)}$
1	1	1	1	Константа 1	F = 1

СЛОЖНОЕ ВЫСКАЗАВАНИЕ

- **Высказывания бывают простые и сложные.**
- ***Простым*** **называется высказывание, которое не содержит в себе других высказываний.**
- **Примеры простых высказываний:**

  1. Идет дождь;

  2. Нам живется весело.

СЛОЖНОЕ ВЫСКАЗАВАНИЕ

- **Если несколько простых высказываний объединены в одно с помощью логических операций, то такое высказывание называется *сложным.***
- **<u>Примеры сложных высказываний:</u>**

  1. **Сложное высказывание:**
     Е = Идет дождь, а у меня нет зонта
     Составляющие простые высказывания:
     - ✔ ***А = Идет дождь;***
     - ✔ ***В = У меня есть зонт.***

     Форма сложного высказывания:
     $E = A \& \overline{B}$

СЛОЖНОЕ ВЫСКАЗАВАНИЕ

- **Примеры сложных высказываний:**

2. Сложное высказывание:

   E = Когда живется весело, то и работа спорится.

   Составляющие простые высказывания:

   - ✔ *A = Живется весело;*
   - ✔ *B = Работа спорится.*

   Форма сложного высказывания:

   E = A □ B

СЛОЖНОЕ ВЫСКАЗАВАНИЕ

- **<u>Примеры сложных высказываний:</u>**

3. Сложное высказывание:

E = Идет налево – песнь заводит, направо – сказку говорит.

Составляющие простые высказывания:

- ✔ ***A = Идет налево;***
- ✔ ***B = Идет направо;***
- ✔ ***C = Песнь заводит;***
- ✔ ***D = Сказку говорит.***

Форма сложного высказывания:

$$E = (A \wedge C) \vee (B \wedge D)$$

СЛОЖНОЕ ВЫСКАЗАВАНИЕ

- **<u>Примеры сложных высказываний:</u>**

4. Сложное высказывание:

Е = Ваш приезд не является ни необходимым ни желательным.

Составляющие простые высказывания:

- ✔ ***А = Ваш приезд необходим;***
- ✔ ***В = Ваш приезд желателен.***

Форма сложного высказывания:

$$E = \overline{A} \, \& \, \overline{B}$$

СЛОЖНОЕ ВЫСКАЗАВАНИЕ

- **<u>По форме высказывания и выраженным на естественном языке составляющим его простым высказываниям получить фразу на естественном языке:</u>**

1. **Форма сложного высказывания:**

$$E = (\overline{A} \,\&\, \overline{B}) \ \square \ (\overline{C} \,\&\, D)$$

Составляющие простые высказывания:

- ***A = Человек с детства давал нервам властвовать над собой;***
- ***B = Человек в юности давал нервам властвовать над собой;***
- ***C = Нервы привыкнут раздражаться;***
- ***D = Нервы будут послушны.***

Сложное высказывание:

E = Если человек с детства и юности своей не давал нервам властвовать над собой, то они не привыкнут раздражаться и будут ему послушны.

СЛОЖНОЕ ВЫСКАЗАВАНИЕ

- **<u>По форме высказывания и выраженным на естественном языке составляющим его простым высказываниям получить фразу на естественном языке:</u>**

1. **Форма сложного высказывания:**

$$E = (B \,\&\, \overline{C}) \rightarrow \overline{A}$$

Составляющие простые высказывания:

- ✔ ***A = Некто является врачом;***
- ✔ ***B = Больной говорил с врачом;***
- ✔ ***C = Больному стало легче.***

Сложное высказывание:

E = Если больному после разговора с врачом не становится легче, то это не врач.

СЛОЖНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ

- **Если сложное высказывание истинно при всех значениях входящих в него переменных, то такое высказывание называется тождественно истинным или *тавтологией – обозначается константой 1.***
- ***Математическая запись: $A \vee \overline{A}$***
- **Примеры:**
  - **Демократ – это человек, исповедующий демократические убеждения.**
  - **Все законы математики, физики и других наук являются тавтологиями.**

СЛОЖНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ

- **Если сложное высказывание ложно при всех значениях входящих в него переменных, то такое высказывание называется *тождественно ложным – обозначается константой 0.***
- ***Математическая запись: $A \& \overline{A}$***
- **Примеры:**
  - **Сегодня среда, а это – второй день недели.**
  - **Компьютер включен, и компьютер не включен.**

СЛОЖНОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ

- **Если значения сложных высказываний совпадают на всех возможных наборах значений входящих в него переменных, то такие высказывания *называются равносильными, или тождественными, или эквивалентными.***
- ***Математическая запись: X = Y***
- **Примеры:**
  - **X = Не может быть, что Матроскин выиграл приз и отказался от него: $X = \overline{A \& B}$**
  - **Y = Или Матроскин не отказался от приза, или не выиграл его: $Y = \overline{A} \vee \overline{B}$**

Занятие № 3

Тема: Логические законы и правила преобразования логических выражений.

Упрощение логических выражений.

ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

1. ***Закон тождества***.
   Всякое высказывание тождественно самому себе:
   $A = A$
2. ***Закон непротиворечия.***
   Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Если высказывание A истинно, то его отрицание $\overline{A}$ должно быть ложным. Тогда их произведение всегда будет ложным:
   $A \& \overline{A} = 0$

ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

3. ***Закон исключения третьего.*** Высказывание может быть либо истинным, либо ложным, третьего не дано. Это означает, что результат логического сложения высказывания и его отрицания всегда принимает значение «истина»:

   A v A = 1_

ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

4. Закон двойного отрицания.

Если дважды отрицать некоторое высказывание, то в результате мы получим исходное высказывание:

$$A = \overline{\overline{A}}$$

5. Законы де Моргана.

1. Отрицание дизъюнкции есть конъюнкция отрицаний:

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \;\&\; \overline{B}$$

2. Отрицание конъюнкции есть дизъюнкция отрицаний:

$$\overline{A \;\&\; B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

6. ***Закон коммутативности.*** Можно менять местами логические переменные при операциях логического умножения и логического сложения:
   - ***Логическое умножение***
     A & B = B & A
   - ***Логическое сложение***
     A v B = B v A

ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

7. *Закон ассоциативности.*

Если в логическом выражении используются только операции логического сложения или только операция логического умножения, то можно скобками пренебрегать или произвольно их расставлять:

- ***Логическое умножение***
  (A & B) & C = A & (B & C)
- ***Логическое сложение***
  (A v B) v C = A v (B v C)

ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

8. Закон дистрибутивности.

В алгебре высказываний за скобки можно выносить как общие множители, так и общие слагаемые:

- ***Дистрибутивность умножения относительно сложения***
  (A & B) v (A & C) = A & (B v C)
- ***Дистрибутивность сложения относительно умножения***
  (A v B) & (A v C) = A v (B & C)

ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

9. Законы поглощения.

1. A v (A & B) = A
2. A & (A v B) = A

0. Законы идемпотентности.

1. *Отсутствие коэффициентов*
   A v A = A
2. *Отсутствие степеней*
   A & A = A

ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

1. Замена операции импликации

$A \square B = \overline{A} \vee B$

2. Замена операции эквивалентности.

1. $A \leftrightarrow B = (A \& B) \vee (\overline{A} \& \overline{B})$
2. $A \leftrightarrow B = (A \vee \overline{B}) \& (\overline{A} \vee B)$

СВОЙСТВА КОНСТАНТ

1. $\overline{0} = 1$
2. $\overline{1} = 0$
3. $F \vee 0 = F$
4. $1 \vee F = 1$
5. $F \,\&\, 0 = 0$
6. $F \,\&\, 1 = F$

F – любая логическая функция или переменная

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ЗАКОНОВ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

1. ***Правило свертки:***
   1. $A \vee \overline{A} \,\&\, B = A \vee B$
   2. $\overline{A} \vee A \,\&\, B = \overline{A} \vee B$
2. ***Правило расширения:***

   $A \,\&\, B \vee \overline{A} \,\&\, C \vee B \,\&\, C = A \,\&\, B \vee \overline{A} \,\&\, C$

УПРОЩЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. Требуется упростить: $A \& B \vee A \& \overline{B}$

По *закону дистрибутивности* вынесем А за скобки:

$$A \& B \vee A \& \overline{B} = A \& (B \vee \overline{B}) = A \& 1 = A$$

УПРОЩЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

2. Требуется упростить: $(A \lor B) \& (A \lor \overline{B})$

Способ 1. **Применим *закон дистрибутивности:***

$$(A \lor B) \& (A \lor \overline{B}) = A \lor (B \& \overline{B}) =$$
$$= A \lor 0 = A$$

Способ 2. **Перемножим скобки как в алгебре чисел на основании того же *закона дистрибутивности:***

$$(A \lor B) \& (A \lor \overline{B}) = A \& A \lor A \& \overline{B} \lor B \& A \lor B \& \overline{B} = A \lor A \& (\overline{B} \lor B) \lor 0 = A \lor A \& 1 =$$
$$= A \lor A = A$$

УПРОЩЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

3. Требуется упростить: $X \vee \overline{X} \,\&\, Y$

На первый взгляд формулу нельзя упростить, так как в ней ничего нельзя вынести за скобки.

Но можно поступить следующим образом:

- **Сделаем так, чтобы у переменной X появился Y:**
  - **Представим: $X = X \,\&\, 1$;**
  - ***Закон исключенного третьего: $1 = \overline{Y} \vee Y$;***
- **Раскроем скобки:**

$$X \vee \overline{X} \,\&\, Y = X \,\&\, 1 \vee \overline{X} \,\&\, Y = X \,\&\, (Y \vee \overline{Y}) \vee \overline{X} \,\&\, Y =$$

$$X \,\&\, Y \vee X \,\&\, \overline{Y} \vee \overline{X} \,\&\, Y$$

УПРОЩЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Далее хотелось бы сгруппировать слагаемые, но для этого одного слагаемого нам не хватает:

- **По *закону идемпотентности* добавим уже имеющиеся в нем слагаемые:**

$$X \& Y \vee X \& \overline{Y} \vee \overline{X} \& Y =$$
$$X \& Y \vee X \& \overline{Y} \vee \overline{X} \& Y \vee X \& Y =$$
$$(X \& Y \vee X \& \overline{Y}) \vee (\overline{X} \& Y \vee X \& Y) =$$
$$X \& (Y \vee \overline{Y}) \vee Y \& (\overline{X} \vee X) =$$
$$X \& 1 \vee Y = X \vee Y$$

УПРОЩЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

4. Требуется упростить: $A \& C \vee B \& \overline{C} \vee A \& B$

Один из возможных вариантов упрощения состоит в том, чтобы добавить к последнему слагаемому переменную С. Это делается стандартным способом: умножить $A \& B$ на 1, а 1 расписать как $C \vee \overline{C}$.

$$A \& C \vee B \& \overline{C} \vee A \& B = A \& C \vee B \& \overline{C} \vee A \& B \& 1 =$$

$$= A \& C \vee B \& \overline{C} \vee A \& B \& (C \vee \overline{C}) =$$

$$= A \& C \vee B \& \overline{C} \vee A \& B \& C \vee A \& B \& \overline{C} =$$

$$= A \& C \vee A \& B \& C \vee B \& \overline{C} \vee A \& B \& \overline{C} =$$

$$= A \& C \& (1 \vee B) \vee B \& \overline{C} \& (1 \vee A) =$$

$$= A \& C \vee B \& \overline{C}$$ ***(правило расширения)***

УПРОЩЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

5. Требуется упростить: $\overline{\overline{X} \vee \overline{Y}}$

Применим закон де Моргана:

$$\overline{\overline{X} \vee \overline{Y}} = \overline{\overline{X}} \,\&\, \overline{\overline{Y}} = X \,\&\, Y$$

УПРОЩЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

5. Упростить логическую функцию, заданную выражением:

$$F = (X_1 \lor X_2 \lor X_3\overline{\overline{X_1}}) \,\&\, (\overline{\overline{X_1X_2} \lor \overline{X_3}})$$

Применим закон отрицания:

$$F = (X_1 \lor X_2 \lor \overline{\overline{X_3}} \lor \overline{X_1}) \,\&\, (\overline{\overline{X_1X_2}} \,\&\, \overline{\overline{X_3}}) =$$

$$= \underbrace{(X_1 \lor X_2 \lor X_3 \lor \overline{X_1})}_{=1} \,\&\, (X_1X_2X_3) = X_1X_2X_3$$

Так как $X_1 \lor \overline{X_1} = 1$

$1 \lor F = 1$

УПРОЩЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

7. Упростить логическую функцию:

$$F = (\overline{X_1X_2} \vee \overline{\overline{X_1}\,\overline{X_3}} \vee X_2\overline{X_3}) \,\&\, \overline{(\overline{X_1}X_2 \vee \overline{X_1}X_3)}$$

Применим закон отрицания:

$$F = (\overline{X_1} \vee \overline{X_2} \vee X_1 \vee X_3 \vee X_2\overline{X_3}) \,\&\, (\overline{\overline{X_1}X_2} \,\&\, \overline{\overline{X_1}X_3}) =$$

$$(\overline{X_1} \vee \overline{X_2} \vee X_1 \vee X_3 \vee X_2\overline{X_3}) \,\&\, (X_1 \vee \overline{X_2}) \,\&\, (X_1 \vee \overline{X_3}) =$$

$$\overline{X_1} \vee X_1 = 1$$

Раскрываем скобки

$$= \underbrace{(1 \vee \overline{X_2} \vee X_3 \vee X_2\overline{X_3})}_{F} \,\&\, (\underbrace{X_1X_1}_{X1} \vee X_1\overline{X_2} \vee X_1\overline{X_3} \vee \overline{X_2}\,\overline{X_3}) =$$

$$= \underbrace{(1 \vee F)}_{1} \,\&\, (X_1 \,\&\, \underbrace{(1 \vee \overline{X_2})}_{1} \vee X_1\overline{X_3} \vee \overline{X_2}\,\overline{X_3}) =$$

$$= X_1 \,\&\, (1 \vee \overline{X_3}) \vee \overline{X_2}\,\overline{X_3} = X_1 \vee \overline{X_2}\,\overline{X_3}$$

САМОСТОЯТЕЛЬНО

$$F_1 = (X_1\overline{X_2} \vee X_1\overline{X_3} \vee \overline{X_2\overline{X_3}}) \,\&\, \overline{(\overline{X_1}X_2 \vee X_1X_3)}$$

$$F_2 = (\overline{X_1X_2} \vee \overline{X_1}\,\overline{X_3} \vee X_2\overline{X_3}) \,\&\, (\overline{X_1}X_2 \vee \overline{\overline{X_1}X_3})$$

$$F_3 = (X_1X_2 \vee \overline{X_1}\,\overline{X_3} \vee \overline{X_2\overline{X_3}}) \,\&\, \overline{(\overline{X_1}\,\overline{X_2} \vee \overline{X_1}X_3)}$$

$$F_4 = (\overline{X_1\overline{X_2}} \vee \overline{X_1\overline{X_3}} \vee X_2\overline{X_3}) \,\&\, (X_1\overline{X_2} \vee X_1\overline{X_3})$$

$$F_5 = \overline{(X_1X_2 \vee \overline{X_1}\,\overline{X_3} \vee X_2\overline{X_3})} \,\&\, (\overline{X_1}X_2 \vee \overline{X_1}X_3)$$

$$F_6 = (X_1X_2 \vee \overline{\overline{X_1}X_3 \vee X_2\overline{X_3}}) \,\&\, (\overline{\overline{X_1}X_2} \vee \overline{X_1}X_3)$$

Занятие № 4

Тема: Формы логических функций.
Правила записи по таблицам истинности.
Тождественность логических функций.

ФОРМЫ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

- **Одна и та же логическая функция может быть записана различными эквивалентными изображениями:**

$$F(x_1,x_2,x_3) = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2 \vee x_1 x_2$$

$$F(x_1,x_2,x_3) = \overline{x}_1 \vee x_1 x_2$$

$$F(x_1,x_2,x_3) = x_1 \,\&\, \overline{(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)}$$

ФОРМЫ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

- **Для исключения неоднозначности записи логические функции представляются в *унифицированных формах:***
  1. ***Дизъюнктивной;***
  2. ***Конъюнктивной.***
- **В них используются элементарные дизъюнкции и конъюнкции.**
- ***Элементарной называется конъюнкция*, в которую входят только переменные и их отрицания:**
  $x_1 x_2$; $x_1 \overline{x}_2$; $\overline{x}_1 \overline{x}_2$; $x_1 x_2 \overline{x}_3$; $\overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$ **и т. д.**
- ***Элементарной называется дизъюнкция*, представляющая собой логическую сумму переменных и их отрицаний:**
  $x_1 \vee \overline{x}_2$; $x_1 \vee x_2$; $x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3$ **и т.д.**

ФОРМЫ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

- ***Дизъюнктивная нормальная форма ДНФ*** **– это форма, в которой логическая функция представлена в виде дизъюнкции элементарных конъюнкций.**
  $F = x_1x_2 \vee x_1\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3$
- ***Конъюнктивная нормальная форма КНФ*** **– это форма, в которой логическая функция представлена в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций.**
  $F = (x_1 \vee \overline{x_2}) \& (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})$

ФОРМЫ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ФОРМЫ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ФОРМЫ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ФОРМЫ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ