

Задачи теории расписаний

Теория расписаний

– это раздел исследования операций, в котором строятся и анализируются математические модели календарного планирования (т.е. упорядочивания во времени) различных целенаправленных действий с учетом целевой функции и различных ограничений.

Модели теории расписаний позволяют найти:

Наиболее дешевый
порядок выполнения
работы

Наиболее быстрый
порядок выполнения
работы

Задача о шлюзах
Задача о станках
Задача о

КОММИВОЯЖЕРЕ



Через шлюз последовательно должны пройти N судов.
Известно время прохождения каждого судна – t_i и ущерб от 1 часа простоя в очереди – в денежных единицах. (i -порядковый номер судна в очереди)

Обозначения:

T_1 – время шлюзования 1-ого судна

T_2 – время шлюзования 2-ого судна

U_2 – стоимость 1 часа простоя в ожидании своей очереди 2-ого судна

$U_4 = t_1 + t_2 + t_3$ – время простоя 4-ого судна

$U_4 \cdot (t_1 + t_2 + t_3)$ – материальный ущерб от простоя 4-ого судна





Показатель экономической эффективности работы шлюза связан с суммарным ущербом от простоя судов в ожидании своей очереди

Пример:

К шлюзу одновременно подошли 4 судна, т.е. суммарный ущерб от простоя в очереди (S):

$$S = U_2 \cdot t_1 + U_3 \cdot (t_1 + t_2) + U_4 \cdot (t_1 + t_2 + t_3)$$

$$S = \sum_{i=2}^N U_i \cdot \sum_{j=1}^{i-1} T_j$$

Задача состоит в том, чтобы определить такой порядок пропуска судов через шлюз, при котором величина S будет минимальной.

Математический анализ:

S_{min} достигается в том случае, если судна пропускаются в порядке убывания величины $\frac{U_i}{T_i}$

Если $T_1 = T_2$, $U_1 \neq U_2$, то пропускается вперед судно с более дорогим простоем

Если $U_1 = U_2$, $T_1 \neq T_2$, то пропускается вперед судно с более быстрым шлюзованием

Критерий убывания величины $\frac{U_i}{T_i} \equiv$ Критерию возрастания величины $\frac{T_i}{U_i}$

Решение в электронных таблицах

Задача.

Пять судов выстроились в очередь к шлюзу в порядке их прибытия

№ судна	1	2	3	4	5
Время шлюзования (усл. время)	45	36	28	24	72
Ущерб от простоя(у. е.)	5	12	7	4	3

Общий ущерб от

простоя:

$$S = \sum_{i=2} U_i \cdot \sum_{j=1}^{i-1} T_j = U_2 \cdot t_1 + U_3 \cdot (t_1 + t_2) + U_4 \cdot (t_1 + t_2 + t_3) + U_5 \cdot (t_1 + t_2 + t_3 + t_4)$$

$$S = 1942 \text{ усл. ден. ед. } (\neq \min)$$

С помощью MS Excel найти оптимальный порядок шлюзования судов, обеспечивающий минимальный ущерб от простоя

Задача о двух станках

Постановка задачи:

Имеются два обрабатывающих станка (токарный и шлифовальный). Требуется изготовить детали, каждая из которых сначала обрабатывается на первом станке, а затем на втором.

Время обработки i -й детали на j -м станке известно и равно t_{ij} . Необходимо выбрать такой порядок обработки (расписание работы станков), чтобы полное время $T_{\text{общ}'}$ затраченное на изготовление всех деталей, было минимальным.

Расчет полного времени обработки на двух станках

Требуется изготовить 5 деталей, обрабатывая каждую поочередно на двух станках.

№ детали	Время вытачивания	Время шлифовки
1	3	6
2	7	2
3	4	7
4	5	3
5	7	4

№ детали	Время окончания вытачивания детали	Время окончания шлифовки детали	Время простоя 2-го станка
1	3	$3+6=9$	3
2	$3+7=10$	$10+2=12$	1
3	$10+4=14$	$14+7=21$	2
4	$14+5=19$	$21+3=24$	0
5	$19+7=26$	$26+4=30$	2
	Итого:	30	8

Алгоритм решения задачи

Алгоритм Джонсона: расставить очередность обработки деталей так, чтобы минимизировать время простоя 2-го станка:

1. Среди всех времен t_{ij} выбрать минимальное значение (если их несколько - взять любое).
2. Если это время обработки на 1-м станке, то переместить запись в начало списка, иначе – в конец списка.
3. Исключить эту деталь из рассмотрения и повторить действия 1 и 2 с оставшимися деталями.
4. После m шагов будет получен оптимальный порядок обработки деталей.

№ детали	1-й станок	2-й станок
1	3	6
2	7	2
3	4	7
4	5	3
5	7	4

№ детали	1-й станок	2-й станок
1	3	6
3	4	7
4	5	3
5	7	4
2	7	2

№ детали	1-й станок	2-й станок
1	3	6
2	4	7
4	5	3
5	7	4
2	7	2

Шаг 1

Шаг 2

№ детали	1-й станок	2-й станок
1	3	6
3	4	7
5	7	4
4	5	3
2	7	2

№ детали	1-й станок	2-й станок
1	3	6
3	4	7
5	7	4
4	5	3
2	7	2

№ детали	1-й станок	2-й станок
1	3	6
3	4	7
5	7	4
4	5	3
2	7	2

Шаг 3

Шаг 4

Шаг 5

Результат работы алгоритма Джонсона:

№ детали	Время окончания вытачивания детали	Время окончания шлифовки детали	Время простоя 2-го станка
1	3	$3+6=9$	3
3	$3+4=7$	$9+7=16$	0
5	$7+7=14$	$16+4=20$	0
4	$14+5=19$	$20+3=23$	0
2	$19+7=26$	$26+2=28$	3
	Итого:	28	6

Задание: реализовать алгоритм Джонсона в среде программирования Паскаль (учебник, стр. 259)

Задача коммивояжера

В 1859 г. У. Гамильтон придумал игру «Кругосветное путешествие», состоящую в отыскании такого пути, проходящего через все вершины (города, пункты назначения) графа, чтобы посетить каждую вершину однократно и возвратиться в исходную. Пути, обладающие таким свойством, называются **гамильтоновыми циклами**.

На плоскости (в пространстве) расположены N городов, заданы расстояния между каждой парой городов.

Требуется

найти маршрут минимальной длины с посещением каждого города ровно один раз и с возвращением в исходную точку.

В задаче коммивояжера целевой функцией, которую надо минимизировать, является стоимость обхода

Постановка задачи

КОММИВОЯЖЕРА

Задача коммивояжера была поставлена в 1934 году. Ее сущность заключается в поиске оптимального маршрута движения при необходимости посетить все запланированные объекты с наименьшими финансовыми и временными издержками. Как правило, речь идет о простом перемещении по заданным точкам, либо с перевозкой груза небольшого формата на транспортном средстве.

Задача коммивояжера является одной из знаменитых задач теории комбинаторики и пользуется популярностью благодаря тому, что к ней сводится большое количество практических задач.

Среди современных практических приложений задачи можно выделить: доставку продуктов в магазин со склада, работу почтальона по разноске корреспонденции, мониторинг объектов (нефтяные вышки, базовые станции сотовых операторов), изготовление отверстий на специализированном станке.

Сотруднику компании ООО «Новые технологии» Петрову Н.И. необходимо обновить программный продукт автоматизированного учета в пяти организациях: А, Б, В, Г и Д. Он решил начать свой обход с организации «А», так как она находится на первом этаже дома, в котором проживает Петров. Сотруднику необходимо, спланировать свой маршрут таким образом, чтобы к концу рабочего дня обойти все организации в определенном порядке и выполнив свою работу, вернуться домой (в пункт «А»). В каком порядке Петрову следует обходить организации, чтобы его замкнутый тур был кратчайшим? Расстояния между каждой парой организаций заданы следующей квадратной матрицей (5x5):

∞	7	2	9	7
5	∞	3	9	1
4	8	∞	5	3
5	6	4	∞	7
7	6	3	7	∞