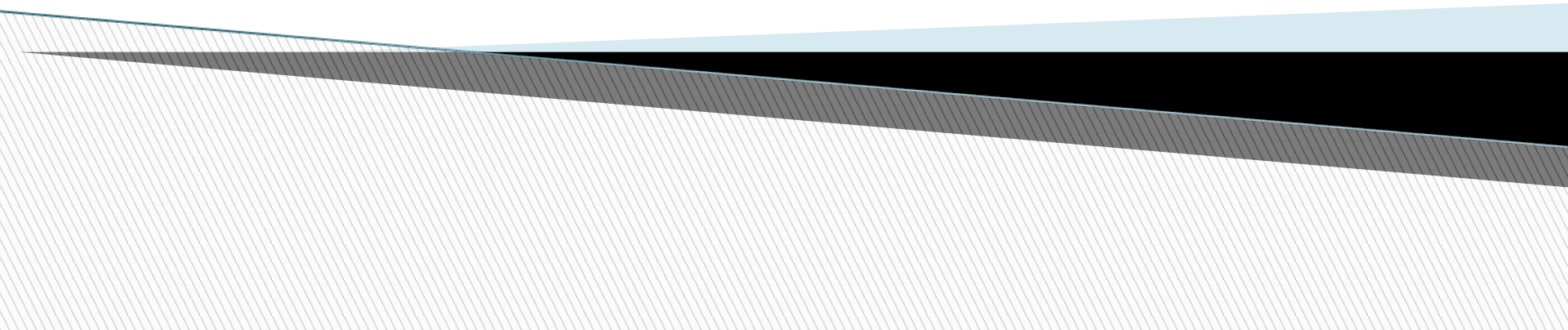


Транспортная задача

Двухиндексные задачи линейного
программирования



Постановка задачи

- В пунктах производства A_1, A_2, \dots, A_m имеется однородный груз в количестве соответственно a_1, a_2, \dots, a_m .
- Этот груз необходимо доставить в пункты назначения B_1, B_2, \dots, B_n в количестве соответственно b_1, b_2, \dots, b_n .
- Стоимость перевозки единицы груза (тариф) из пункта A_i в пункт B_j равна c_{ij} .
- Требуется составить план перевозок, позволяющий вывезти все грузы и имеющий минимальную стоимость.

Транспортная (распределительная) таблица

		B_j					
		B_1	B_2	...	B_j	...	B_n
A_i	B_j	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n
	A_1	a_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...
A_2	a_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2j}	...	x_{2n}
...
A_i	a_i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{in}
...
A_m	a_m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mj}	...	x_{mn}

Предложение

Спрос

Тариф на перевозку

Поставка

Закрытая и открытая ТЗ

В зависимости от соотношения между суммарными запасами груза и суммарными потребностями в нем транспортные задачи могут быть закрытыми и открытыми.

□ Если $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, а называется **закрытой**.

□ Если $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$, **ытой**.

Математическая модель закрытой ТЗ

$$L(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

- При ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j,$$

$$x_{i,j} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

- Оптимальным решением задачи является матрица

$$X_{\text{опт}} = (x_{ij})_{m \times n},$$

Решение закрытой ТЗ

- Транспортная задача как задача линейного программирования может быть решена симплексным методом, однако наличие большого числа переменных и ограничений делает вычисления громоздкими. Поэтому для решения транспортных задач разработан специальный - **распределительный метод**, имеющий те же этапы, что и симплексный метод, а именно:
 - нахождение исходного опорного решения;
 - проверка этого решения на оптимальность;
 - переход от одного опорного решения к другому.

Пример

- На складах A_1, A_2, A_3 имеются запасы продукции в количествах 90, 400, 110 т соответственно. Потребители B_1, B_2, B_3 должны получить эту продукцию в количествах 140, 300, 160 т соответственно. Найти такой вариант прикрепления поставщиков к потребителям, при котором сумма затрат на перевозки была бы минимальной. Расходы по перевозке 1 т продукции заданы матрицей (ден. ед.)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} .$$

Пример

- Проверим, является ли задача закрытой:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 90 + 400 + 110 = 600 \text{ т,}$$

$$\sum_{j=1}^3 b_j = 140 + 300 + 160 = 600 \text{ т,}$$

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^3 b_j,$$

Пример

□ Заполним распределительную таблицу

$a_i \backslash b_j$		1	2	3
		140	300	160
1	90	2	5	2
2	400	4	1	5
3	110	3	6	8

I. Нахождение исходного опорного решения

Рассмотрим один из методов — **метод минимального тарифа**:

- Грузы распределяются **в первую очередь** в те клетки, в которых находится **минимальный тариф** перевозок c_{ij} .
- Далее поставки распределяются в незанятые клетки с наименьшими тарифами с учетом оставшихся запасов у поставщиков и удовлетворения спроса потребителей.
- Процесс распределения продолжают до тех пор, пока все грузы от поставщиков не будут вывезены, а потребители не будут удовлетворены.

Вырожденность ТЗ

- При распределении грузов может оказаться, что количество занятых клеток меньше, чем $m+n-1$. В этом случае задача имеет **вырожденное решение**.
- В этом случае недостающее их число заполняется клетками **с нулевыми поставками**, такие клетки называют **условно занятыми**.
- Нулевые поставки помещают в незанятые клетки с учетом наименьшего тарифа таким образом, чтобы в каждой строке и столбце было **не менее чем по одной занятой клетке**.

Пример

- Найдем исходное опорное решение методом наименьшего тарифа:

		b_j			
		1	2	3	
a_i	1	140	300	160	
	2	90	2	5	2
3	400	90	4	1	5
4	110	300	3	6	8
5		50			60

- Число занятых клеток в таблице равно $m+n-1=3+3-1=5$, т.е. условие невырожденности выполнено.

Проверка найденного опорного решения на оптимальность

- Найденное исходное опорное решение проверяется на оптимальность **методом потенциалов**.
- В распределительную таблицу добавляют строку v_j и столбец u_i . Числа u_i и v_j называют **потенциалами**.
- Потенциалы u_i и v_j находят **для занятых клеток** из равенства $u_i + v_j = c_{ij}$.
- Одному из потенциалов дается **произвольное значение**, например $u_1 = 0$, тогда остальные потенциалы определяются однозначно.
- Так, если известен потенциал u_i , то $v_j = c_{ij} - u_i$; если известен потенциал v_j , то $u_i = c_{ij} - v_j$.

Проверка найденного опорного решения на оптимальность

- Обозначим $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$.
- Эту оценку называют **оценкой свободных клеток**.
- Если **все $\Delta_{ij} \leq 0$** , то опорное решение является **оптимальным**.
- Если **хотя бы одна** из оценок $\Delta_{ij} > 0$, то опорное решение **не является оптимальным** и его можно улучшить, перейдя от одного опорного решения к другому.

Пример

- Проверим найденное опорное решение на оптимальность, добавив в таблицу столбец u_i и строку v_j .
- Полагая $u_1=0$, запишем это в последнем столбце таблицы.
- Рассмотрим занятую клетку (1,1), для нее выполняется условие $u_1 + v_1 = 2$, откуда $v_1 = 2$.
- Далее рассматриваем последовательность из занятых клеток таблицы, для которых один из потенциалов известен:
 - Для клетки (3,1): $u_3 + v_1 = 3$, $v_1 = 2$, откуда $u_3 = 1$.
 - Для клетки (3,3): $u_3 + v_3 = 8$, $u_3 = 1$, $v_3 = 7$.
 - Для клетки (2,3): $u_2 + v_3 = 5$, $v_3 = 7$, $u_2 = -2$.
 - Для клетки (2,2): $u_2 + v_2 = 1$, $u_2 = -2$, $v_2 = 3$.
- Найденные значения потенциалов заносим в таблицу.

Пример

		b_j			u_i	
		1	2	3		
a_i			140	300	160	
	1	90	2	5	2	0
		90				
2	400	4	1	5		
			300	100	-2	
3	110	3	6	8		
		50		60	1	
	v_j	2	3	7		

Пример

- Вычисляем оценки свободных клеток:

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 3 - 5 = -2 < 0,$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 7 - 2 = 5 > 0,$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -2 + 2 - 4 = -4 < 0,$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 1 + 3 - 6 = -2 < 0.$$

- Получили оценку $\Delta_{13} = 5 > 0$, следовательно, исходное опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить.

Переход от одного опорного решения к другому

- Переход к другому опорному решению осуществляется **перераспределением грузов**, перемещая их из занятых клеток в свободные:
 1. Для **свободной клетки с $\Delta_{ij} > 0$** строится **замкнутый цикл** (цепь, многоугольник), все остальные вершины которого находятся в занятых клетках; углы прямые.
 2. Около свободной клетки цикла ставится знак (+), затем чередуют знаки (—) и (+).
 3. У вершин со знаком (—) выбирают минимальный груз.
 4. Его прибавляют к грузам, стоящим у вершин со знаком (+), и отнимают от грузов у вершин со знаком (—).
 - В результате перераспределения груза получим новое опорное решение. Это решение проверяем на оптимальность, и т.д. до тех пор, пока не получим оптимальное решение.

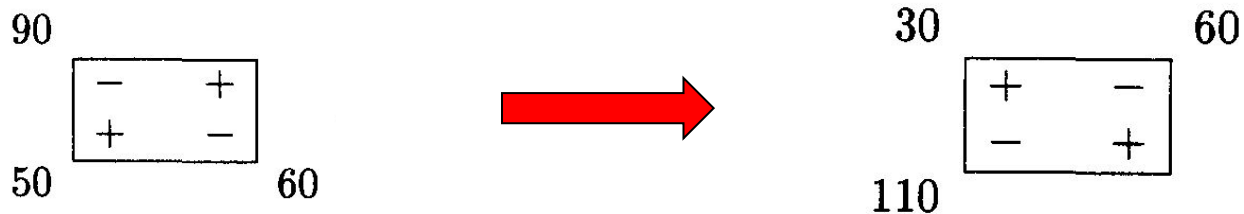
Пример

- Строим цикл для клетки (1,3), имеющей положительную оценку. У вершин цикла ставим знаки (+) и (—)

		b_j			u_i
		1	2	3	
a_i		140	300	160	
	1	90	2	5	2
		90			0
2	400	4	1	5	
			300	100	-2
3	110	3	6	8	
		50		60	1
	v_j	2	3	7	

Пример

- У вершин со знаком (—) выбираем минимальный груз, он равен 60.
- Его прибавляем к грузам, стоящим у положительных вершин, и отнимаем от грузов, стоящих у отрицательных вершин. Получаем новый цикл



и новое опорное решение, которое заносим в новую распределительную таблицу для проверки на оптимальность:

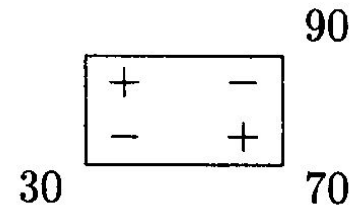
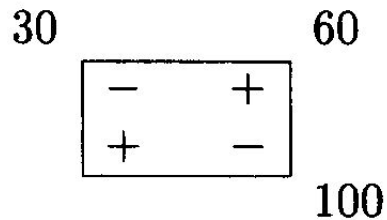
Пример

		b_j			u_i
		1	2	3	
a_i		140	300	160	
x_i		2	5	2	
1	90	30		60	0
2	400	4	1	5	3
3	110	110	3	6	8
v_j		2	-2	2	

$$\Delta_{12} = -7, \quad \Delta_{21} = 1 > 0, \quad \Delta_{32} = -7, \quad \Delta_{33} = -5.$$

Пример

- Построим цикл для клетки с положительной оценкой $\Delta_{21} = 1$:



- Получим новое решение, которое занесем в таблицу. Проверим его на оптимальность.

Пример

		b_j			u_i
		1	2	3	
a_i		140	300	160	
		2	5	2	
1	90			90	0
		4	1	5	
2	400	30	300	70	3
		3	6	8	
3	110	110			2
	v_j	1	-2	2	

$$\Delta_{11} = -1, \quad \Delta_{12} = -1, \quad \Delta_{32} = -6, \quad \Delta_{33} = -4.$$

Пример

- Все оценки свободных клеток отрицательные, следовательно, найденное решение оптимальное.

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Стоимость транспортных расходов равна

$$L(X)_{\min} = 90 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 300 \cdot 1 + 70 \cdot 5 + 110 \cdot 3 = 1280 \text{ усл. ед.}$$

Решение открытой ТЗ

- При **открытой** транспортной задаче сумма запасов не совпадает с суммой потребностей $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$.
- При этом:
- а) если $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, **объем запасов превышает объем потребления**. Для решения задачи **вводят фиктивного потребителя**, потребности которого равны разности запасов и потребностей.
- б) если $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, **объем потребления превышает объем запасов**, часть потребностей останется неудовлетворенной. Для решения задачи **вводим фиктивного поставщика**.

Решение открытой ТЗ

- При введении фиктивного участника открытая транспортная задача становится закрытой и решается по алгоритму решения закрытых ТЗ.
- Фиктивному участнику назначаются **тарифы больше или равны наибольшему** из всех транспортных тарифов (иногда их считают равными нулю).
- В целевой функции фиктивный поставщик или потребитель **не учитывается**.

Альтернативный оптимум в ТЗ

- ▣ **Признак** наличия **альтернативного оптимума** в ТЗ: **равенство нулю** хотя бы одной из **оценок свободных переменных в оптимальном решении** ($X_{\text{опт1}}$).
- ▣ Сделав перераспределение грузов относительно клетки, имеющей $\Delta_{ij} = 0$, получим новое оптимальное решение ($X_{\text{опт2}}$), при этом **значение целевой функции** (транспортных расходов) **не изменится**.
- ▣ Если одна оценка свободных переменных равна нулю, то оптимальное решение находится в виде

$$X_{\text{опт}} = t \cdot X_{\text{опт1}} + (1 - t) \cdot X_{\text{опт2}}, \quad \text{где } 0 \leq t \leq 1$$

Пример

- На трех складах имеется мука в количестве 60, 130 и 90 т, которая должна быть в течение месяца доставлена четырем хлебозаводам в количестве: 30, 80, 60, 110 т соответственно.
- Составить оптимальный план перевозок, имеющий минимальные транспортные расходы, если стоимость доставки 1 т муки на хлебозаводы задана матрицей

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 15 & 4 \\ 9 & 15 & 2 & 3 \\ 6 & 12 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

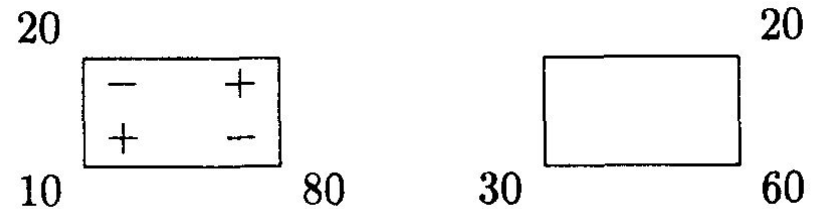
Пример

□ Решение (кратко).

		b_j				u_i		
		1	2	3	4			
a_i		30	80	60	110			
1	60	20	6	8	15	4	0	
2	130	9	15	2	60	70	3	-1
3	90	10	6	12	7	10		0
v_j		6	12	3	4			

$$\Delta_{12} = 4, \quad \Delta_{13} = -12, \quad \Delta_{21} = -4,$$

$$\Delta_{22} = -4, \quad \Delta_{33} = -4, \quad \Delta_{34} = -6.$$



Пример

- Решение (кратко).

		b_j				u_i
		1	2	3	4	
$a_i \backslash$		30	80	60	110	
1	60	6	8	15	4	0
2	130	9	15	2	3	-1
3	90	6	12	7	10	4
v_j		2	8	3	4	

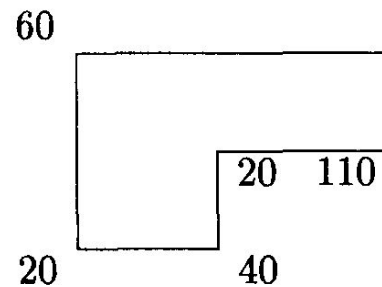
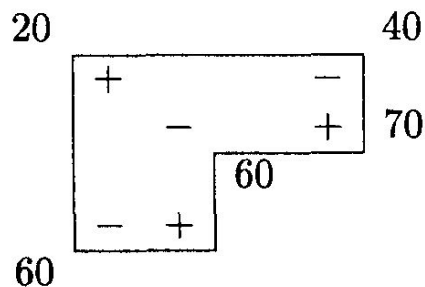
$$\Delta_{11} = -4, \quad \Delta_{13} = -12, \quad \Delta_{21} = -8,$$
$$\Delta_{22} = -8, \quad \Delta_{33} = 0, \quad \Delta_{34} = -2.$$

Пример

- Так как $\Delta_{33} = 0$, то задача имеет альтернативный оптимум и одно из решений равно

$$X_{\text{опт1}} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 60 & 70 \\ 30 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Произведем перераспределение грузов относительно клетки (3,3):



Пример

- Теперь $\Delta_{14} = 0$, получили еще одно решение:

$$X_{\text{опт2}} = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 110 \\ 30 & 20 & 40 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Данная задача имеет два оптимальных решения $X_{\text{опт1}}$ и $X_{\text{опт2}}$, общее решение находится по формуле

$$X_{\text{опт}} = tX_{\text{опт1}} + (1 - t)X_{\text{опт2}},$$

- где $0 \leq t \leq 1$.

Пример

- Найдем элементы матрицы общего решения:

$$x_{11} = 0,$$

$$x_{12} = 20t + (1 - t)60 = 60 - 40t,$$

$$x_{13} = 0,$$

$$x_{14} = 40t + (1 - t)0 = 40t,$$

$$x_{21} = 0,$$

$$x_{22} = 0,$$

$$x_{23} = 60t + (1 - t)20 = 20 + 40t, \quad x_{24} = 70t + (1 - t)110 = 110 - 40t,$$

$$x_{31} = 30t + (1 - t)30 = 30,$$

$$x_{32} = 60t + (1 - t)20 = 20 + 40t,$$

$$x_{33} = 0t + (1 - t)40 = 40 - 40t, \quad x_{34} = 0.$$

- Итак,
$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 60 - 40t & 0 & 40t \\ 0 & 0 & 20 + 40t & 110 - 40t \\ 30 & 20 + 40t & 40 - 40t & 0 \end{pmatrix}.$$

- Стоимость транспортных расходов составит
$$L(X_{\text{опт}}) = 1550 \text{ усл. ед.}$$