НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

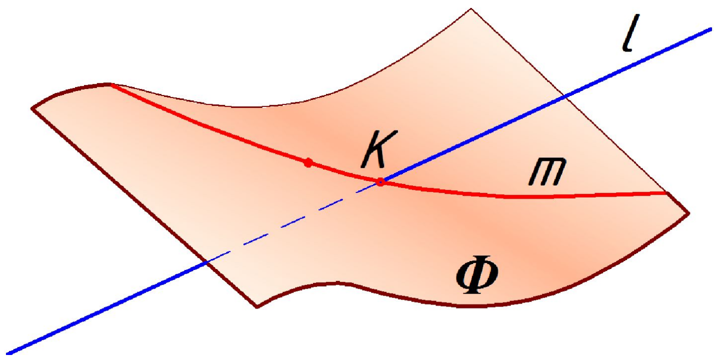
Лекция 3

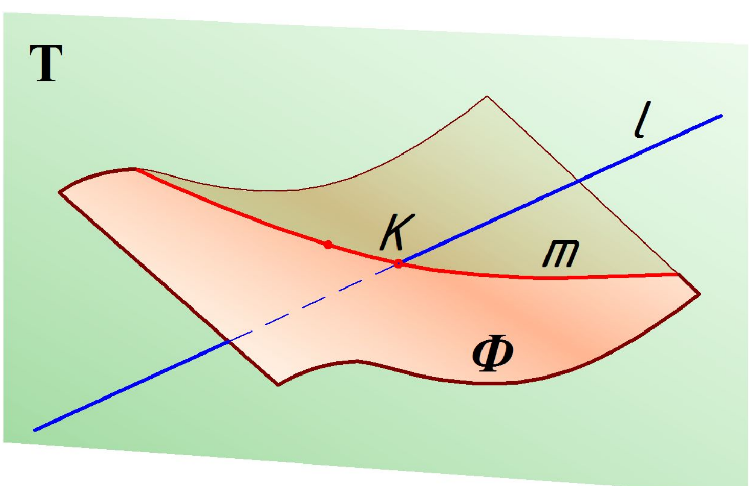
Направление обучения – «Архитектура»

Пересечение прямой линии с поверхностью

Прямая пересекает поверхность, если она пересекает какую-либо линию, принадлежащую этой поверхности

$$l \cap \Phi = \{K^1, K^2, \ldots\}, \quad \{K^1, K^2, \ldots\} = l \cap m \; ; \; m \subset \Phi$$





Линию ***m***, принадлежащую поверхности ***Ф***, следует рассматривать как линию пересечения самой поверхности ***Ф*** с какой-то плоскостью, например, ***Т***, в которую заключена прямая ***l***.

Плоскость ***Т*** может быть какой угодно плоскостью, но ее положение в пространстве следует выбирать так, чтобы проекции линии пересечения ***m*** по возможности имели наиболее простую геометрическую форму – прямой (ломаной) или окружности.

Общий (краткий) алгоритм построения точки пересечения прямой с поверхностью

1. **Прямую l заключаем в плоскость T** $(l \cup T)$
с условием,
что $T \cap \Phi = m$ – **линия на проекциях по возможности наиболее простой геометрической формы.**

Если $T \perp \Pi_к$, то $\Rightarrow m_к \equiv T_к \equiv l_к$

2. **Строим проекции линии** m.

3. **Так как** $(l \subset T) \wedge (m \subset T)$, **то**

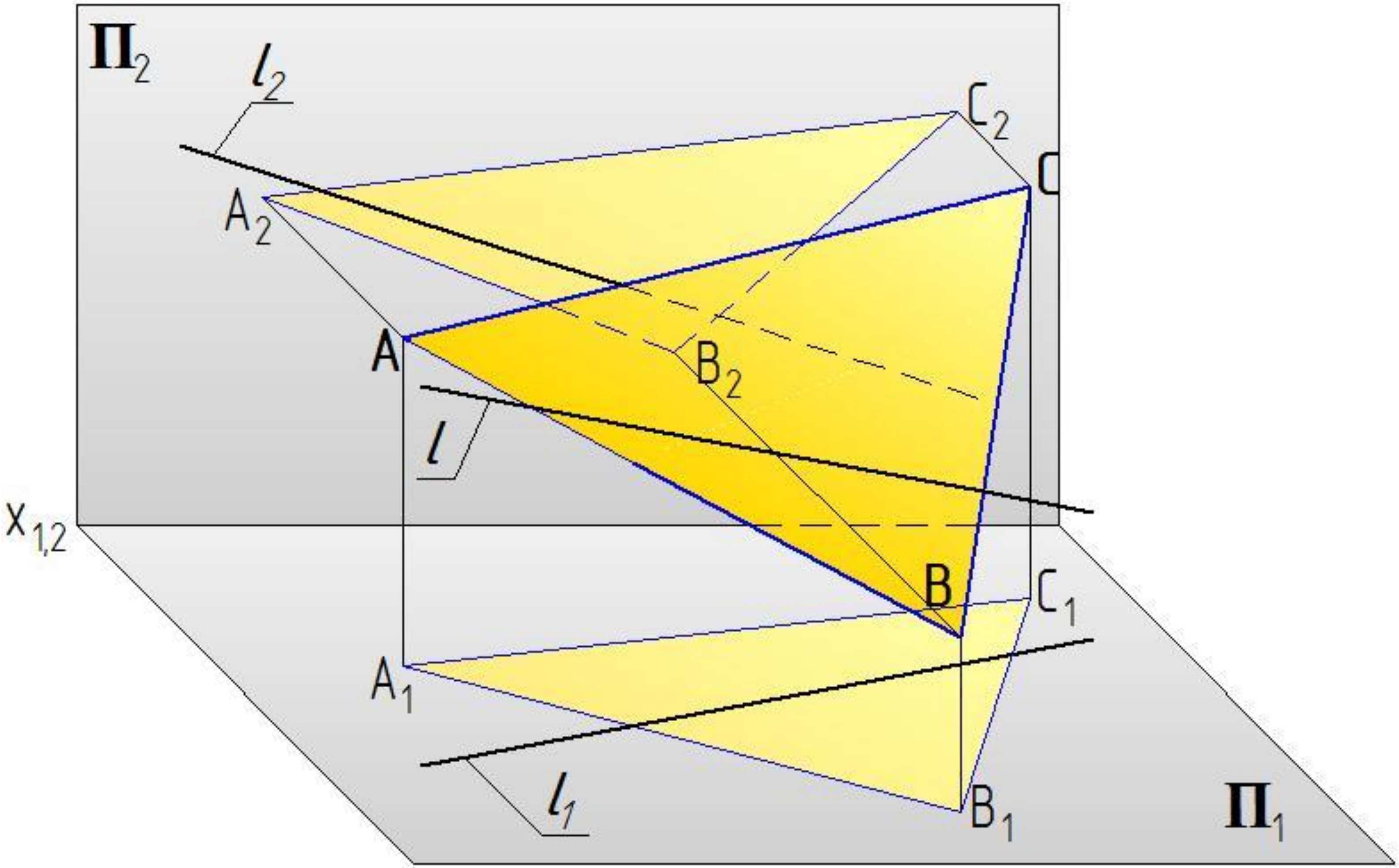
$$l \cap m = \{K^1, K^2, \ldots\}$$

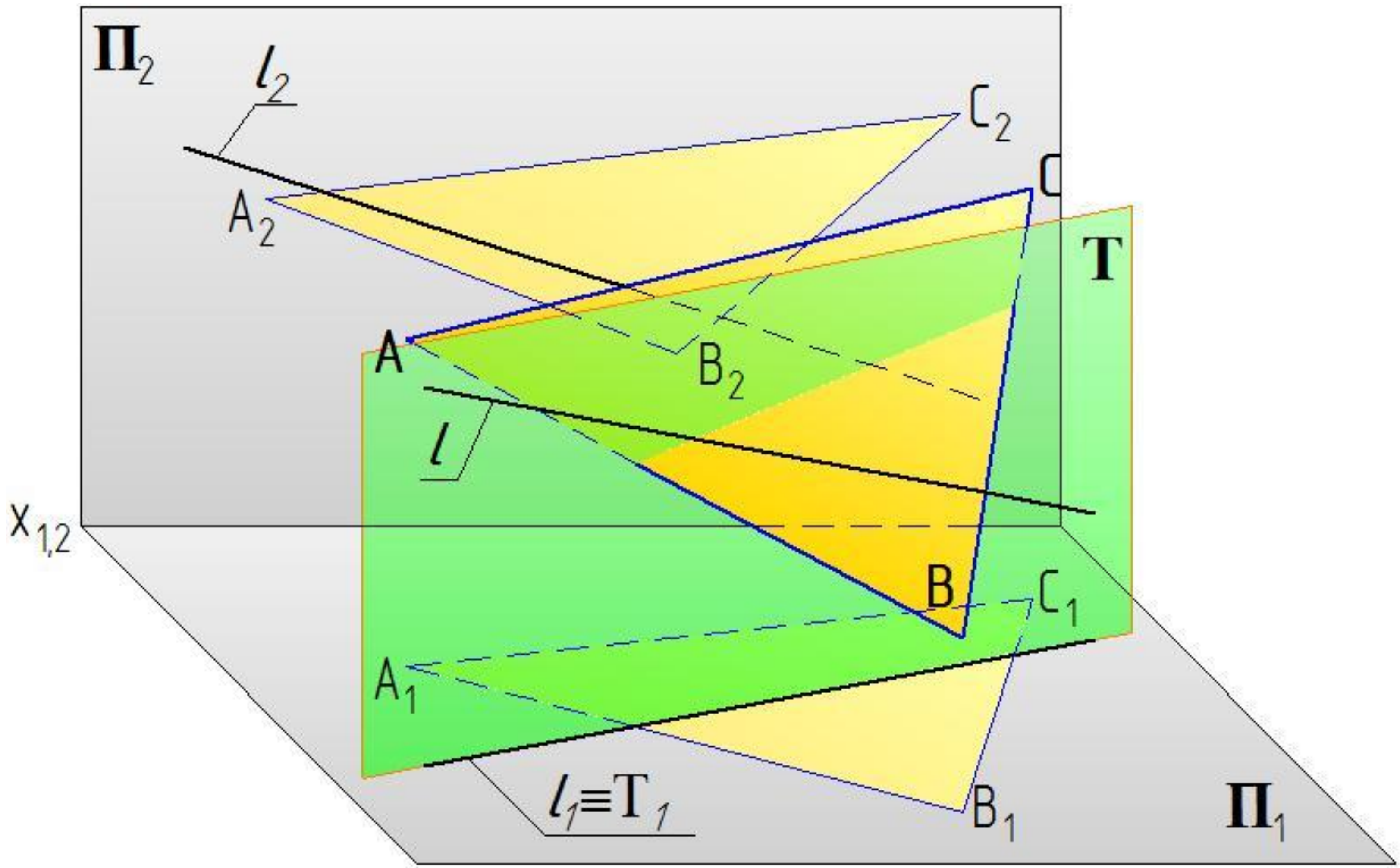
$$\Rightarrow \{K^1, K^2, \ldots\} \subset m; \; m \subset \Phi \Rightarrow \{K^1, K^2, \ldots\} \subset \Phi$$

$$\Rightarrow \{K^1, K^2, \ldots\} = l \cap \Phi$$

Пересечение прямой линии с плоскостью

Дано: прямая $\boldsymbol{l}$ и
плоскость $\alpha(\Delta ABC)$.
Определить: взаимное положение прямой $\boldsymbol{l}$ и плоскости α

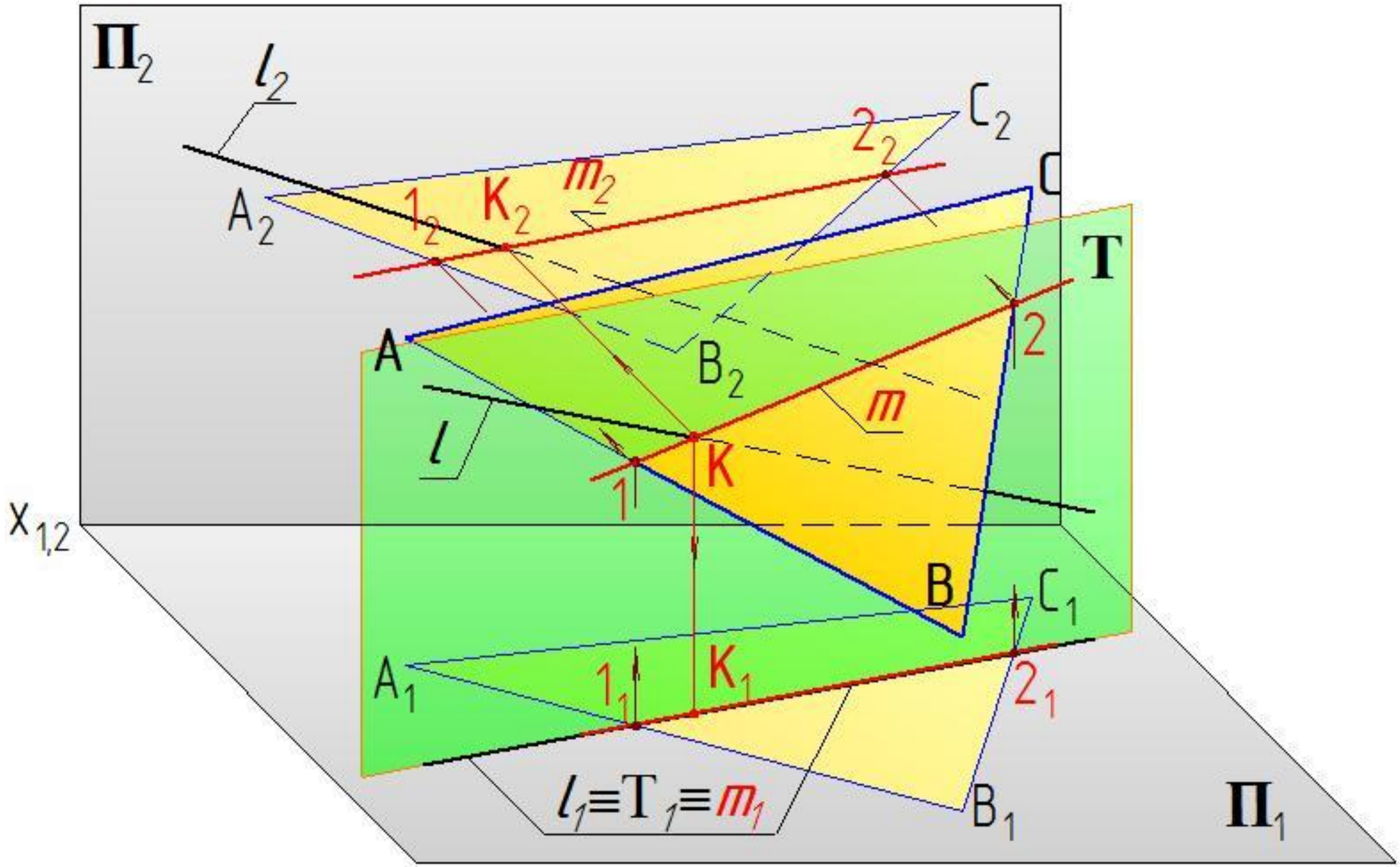




1. Прямую l, заключаем в какую-либо вспомогательную **проецирующую** плоскость.

$l \cup T$; $T \perp \Pi_к$. Тогда $T_к \equiv l_к$

На примере $T \perp \Pi_1 \Rightarrow T_1 \equiv l_1$



2. Строим линию пересечения заданной плоскости α и вспомогательной T.

$$m = \alpha \cap T$$

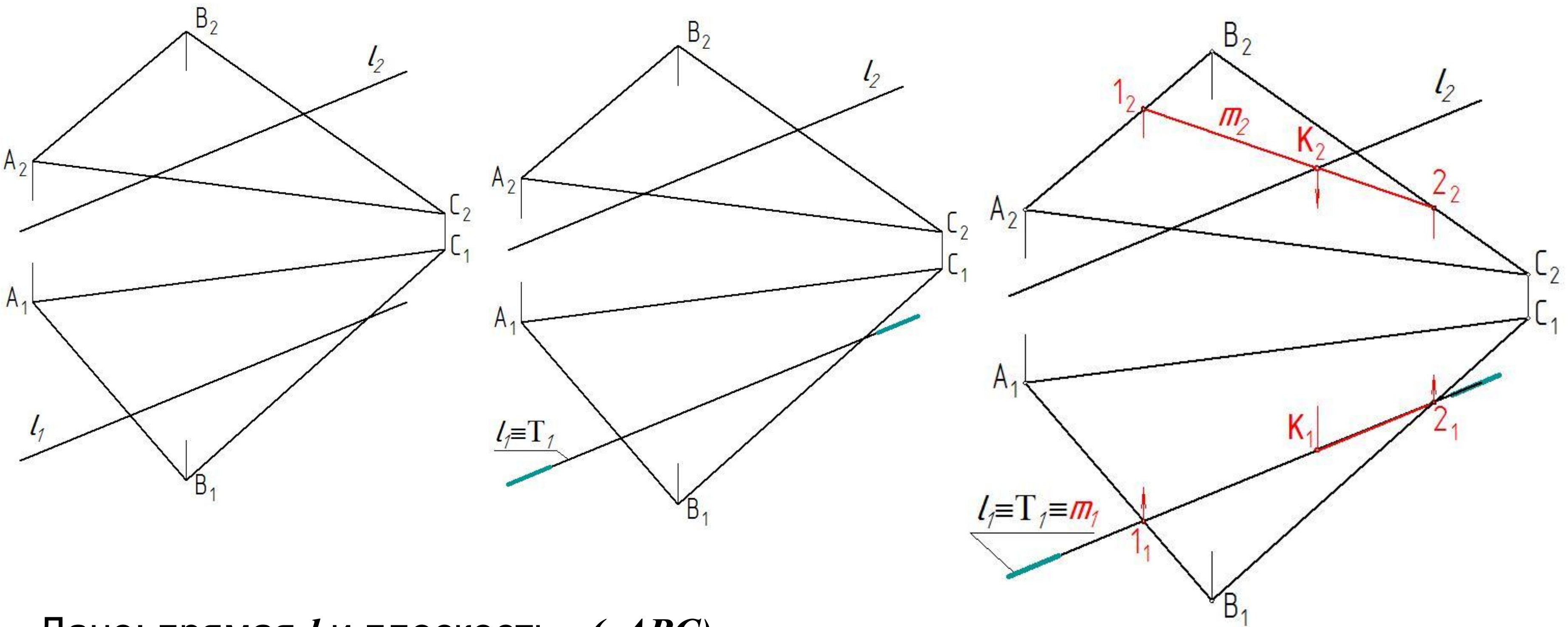
$$m \subset T \Rightarrow m_k \equiv T_k; \quad m \subset \alpha \Rightarrow m\,(1,2)$$

На примере. $m_1 \equiv T_1; \quad m \subset \alpha \Rightarrow m\,(1,2),\ 1 = m \cap AB,\ 2 = m \cap CB$

3. Определяем точку K пересечения прямых l и m, которая является точкой пересечения прямой l с плоскостью α.

Решение рассмотренной задачи на эпюре

Пример 1



<u>Дано</u>: прямая l и плоскость $\alpha(\Delta ABC)$.
<u>Определить:</u> точку пересечения прямой l с плоскостью α

1. $l \cup T;\ T \perp \Pi_1 \Rightarrow T_1 \equiv l_1$
2. $m = \alpha \cap T \Rightarrow m \subset T \Rightarrow m_1 \equiv T_1 \equiv l_1;$
   $m \subset \alpha\ (\Delta\ ABC) \Rightarrow m(1,2);\ 1 = m \cap AB;\ 2 = m \cap BC;$
3. $l_2 \cap m_2 = K_2 \Rightarrow l \cap m = K, \Rightarrow K = l \cap \alpha$

Пересечение прямой линии с гранной поверхностью

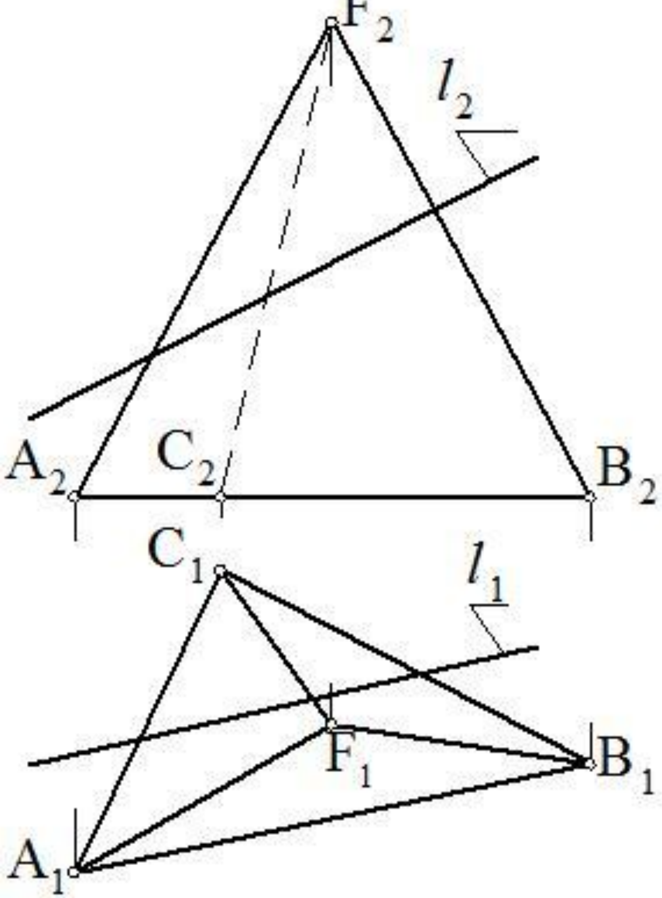
(на примере пирамидальной поверхности)

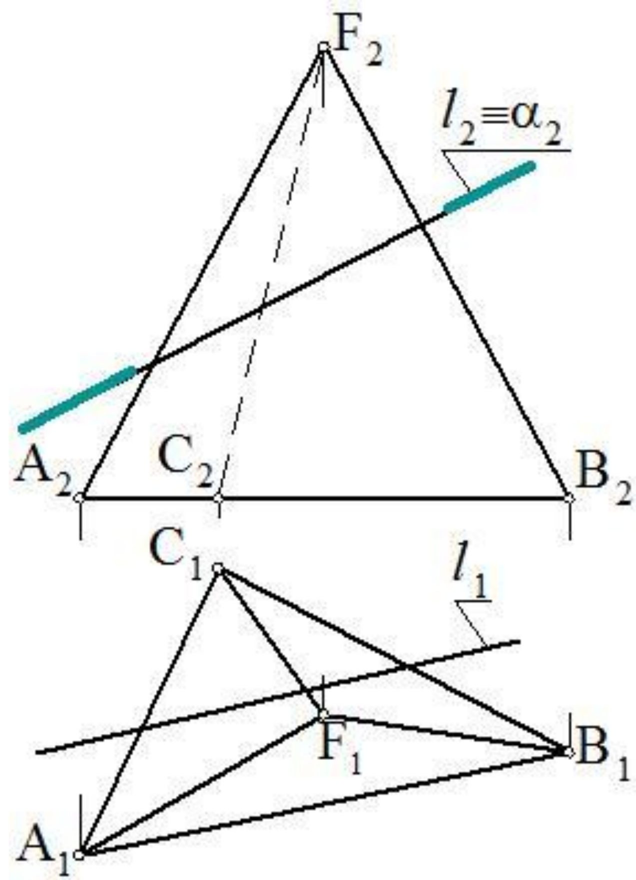
FABC – трехгранная пирамида. Определить точки ***K***[1] и ***K***[2] пересечения прямой ***l*** с поверхностью пирамиды.

Так как при пересечении гранной поверхности плоскостью всегда образуется ломаная линия, то выбор положения вспомогательной плоскости α ($\alpha \perp \Pi_1$ или $\alpha \perp \Pi_2$) *не имеет значения.*

Выбираем фронтально-проецирующую плоскость $\alpha \perp \Pi_2$.

Следовательно $\alpha_2 \equiv l_2$





Строим линию $\boldsymbol{m}$ пересечения плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ с поверхностью пирамиды $\boldsymbol{FABC}$

$m = \alpha \cap FABC$

$\alpha_2 \equiv l_2 \equiv m_2$

$m\{1,2,3\}$

$\alpha \cap FA = 1;$

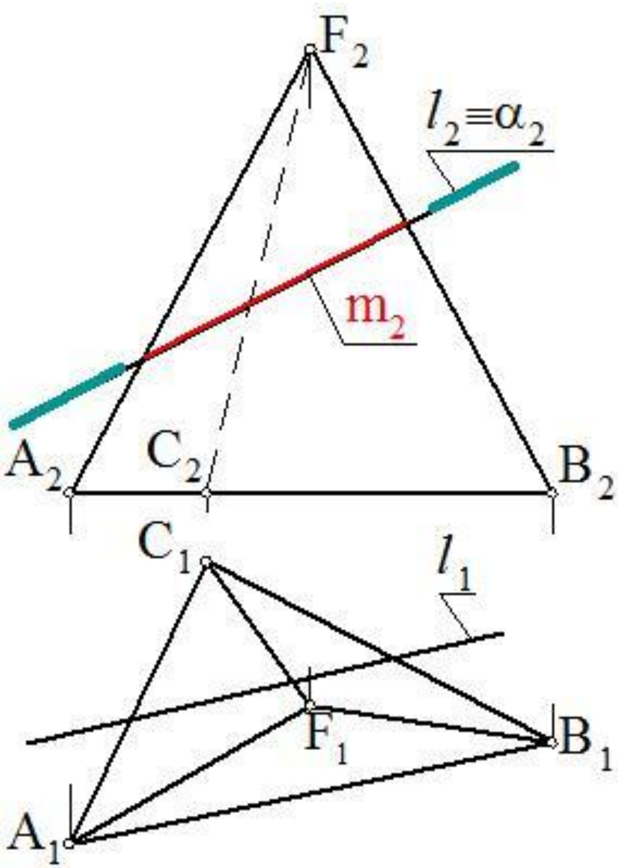
$\alpha \cap FB = 3;$

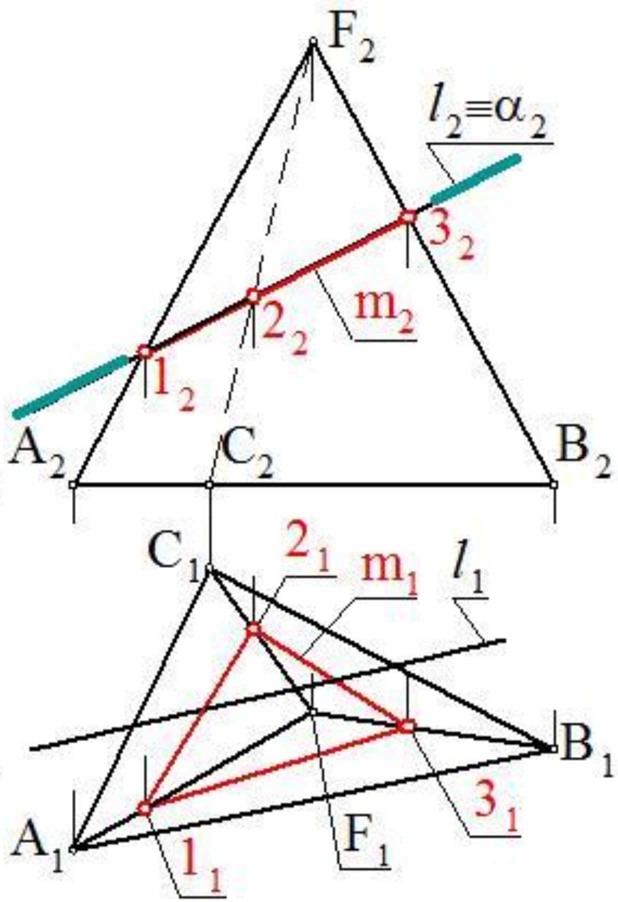
$\alpha \cap FC = 2$

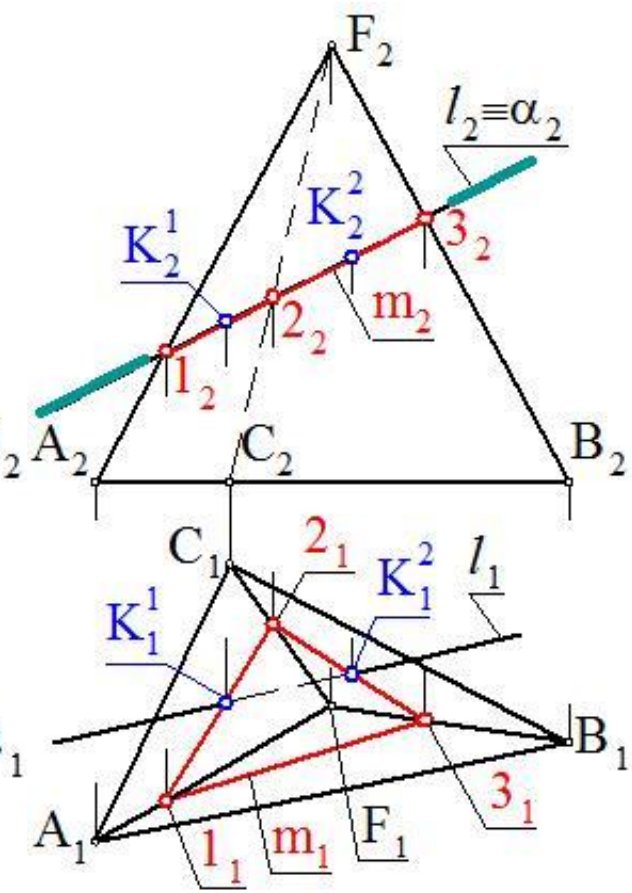
Определяем точки K^1 и K^2 пересечения линии $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{l}$

$m_1 \cap l_1 = \{K^1{}_1, K^2{}_1\}$

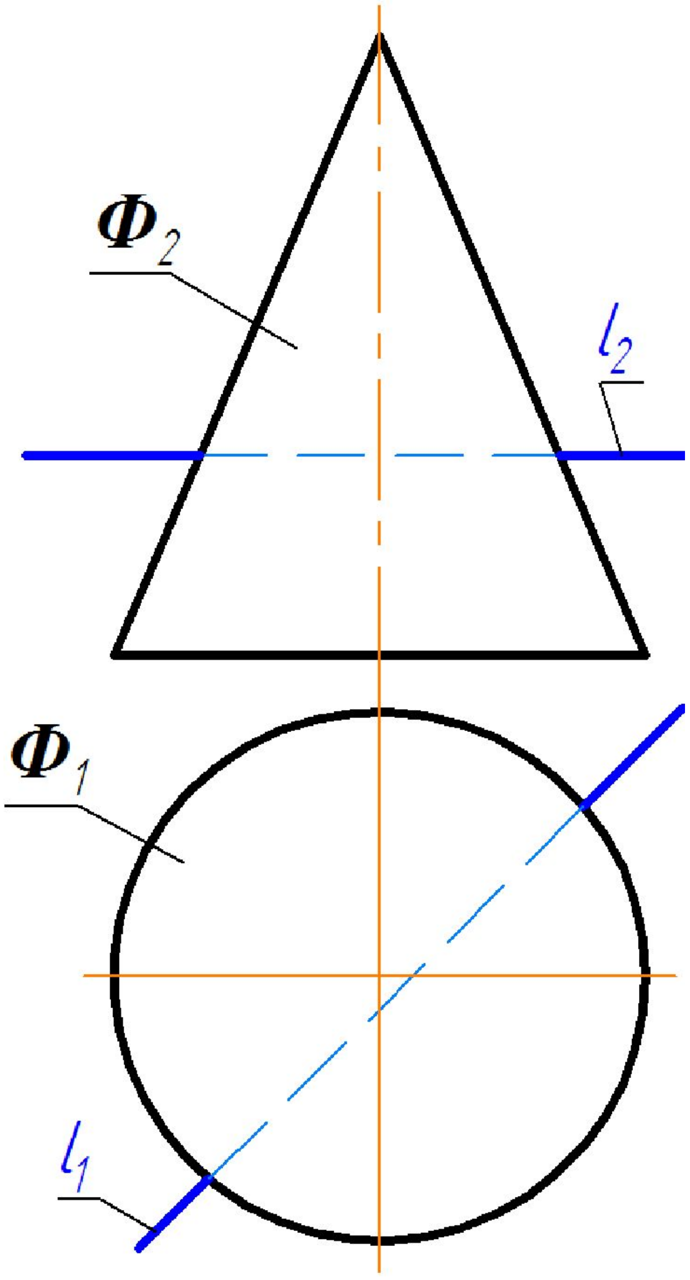
Определяем видимость прямой $\boldsymbol{l}$







Пересечение прямой линии с конической поверхностью

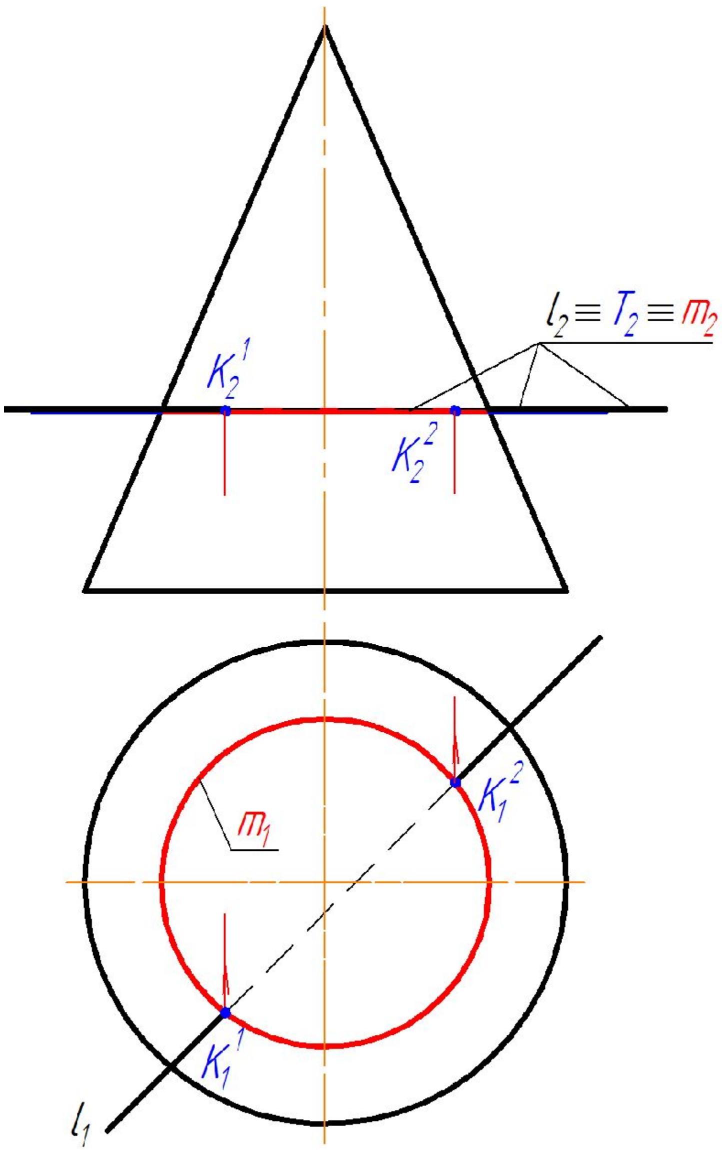


Задана прямая круговая коническая поверхность $\boldsymbol{\Phi}$ и прямая $\boldsymbol{l}$. Определить точки $\boldsymbol{K^1}$ и $\boldsymbol{K^2}$ пересечения прямой $\boldsymbol{l}$ с конической поверхностью $\boldsymbol{\Phi}$.

Так как коническая поверхность является прямой круговой с вертикальной осью вращения, то все параллели этой поверхности являются горизонталями.

Заданная прямая также является горизонталью.

Следовательно, если прямую $\boldsymbol{l}$ заключить в горизонтальную плоскость уровня, например, $\boldsymbol{T}$, то линией пересечения плоскости $\boldsymbol{T}$ с поверхностью $\boldsymbol{\Phi}$ будет одна из параллелей поверхности $\boldsymbol{\Phi}$.



Совмещаем $m_2 \equiv l_2 \equiv T_2$

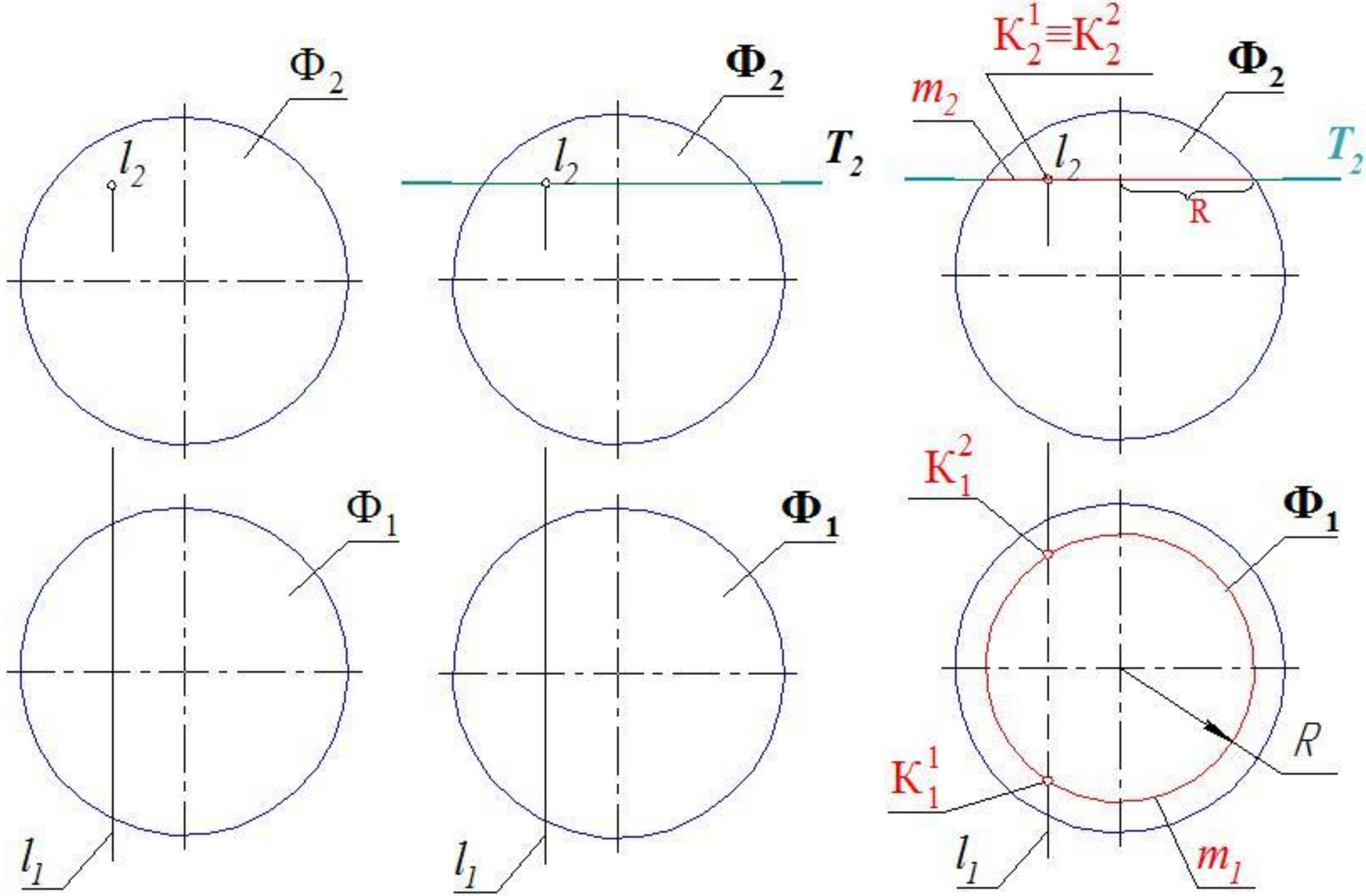
Строим горизонтальную проекцию линии ***m***. ***m_1-окружность***

На горизонтальной проекции определяем точки ***K^1*** и ***K^2*** пересечения прямой ***l*** и линии ***m***.

Строим фронтальные проекции точек ***K^1*** и ***K^2***.

Определяем видимость участков прямой ***l***.

Пересечение прямой со сферой



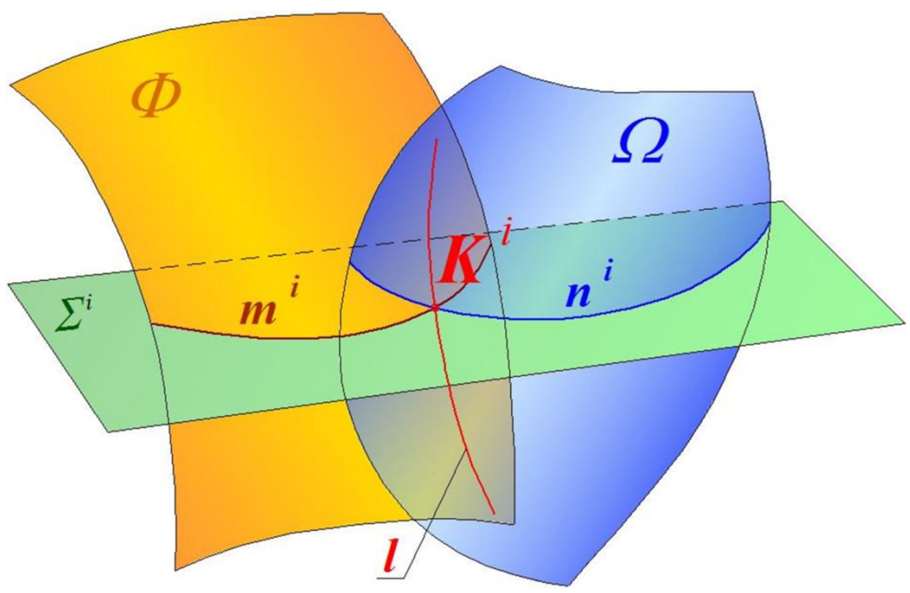
Взаимное пересечение поверхностей

Метод вспомогательных секущих плоскостей

Линией пересечения двух поверхностей, в общем случае, является ***пространственная кривая линия***.

Линия пересечения может быть представлена как множество точек.

Каждая точка множества рассматривается как точка пересечения двух линий, получаемых от пересечения заданных поверхностей вспомогательными секущими плоскостями.



$$\Phi \cap \Omega = l$$

$$l\{K^1, K^2, K^3, \dots K^i\}$$

$$K^i = m^i \cap n^i$$

$$m^i = \Phi \cap \Sigma^i$$

$$n^i = \Omega \cap \Sigma^i$$

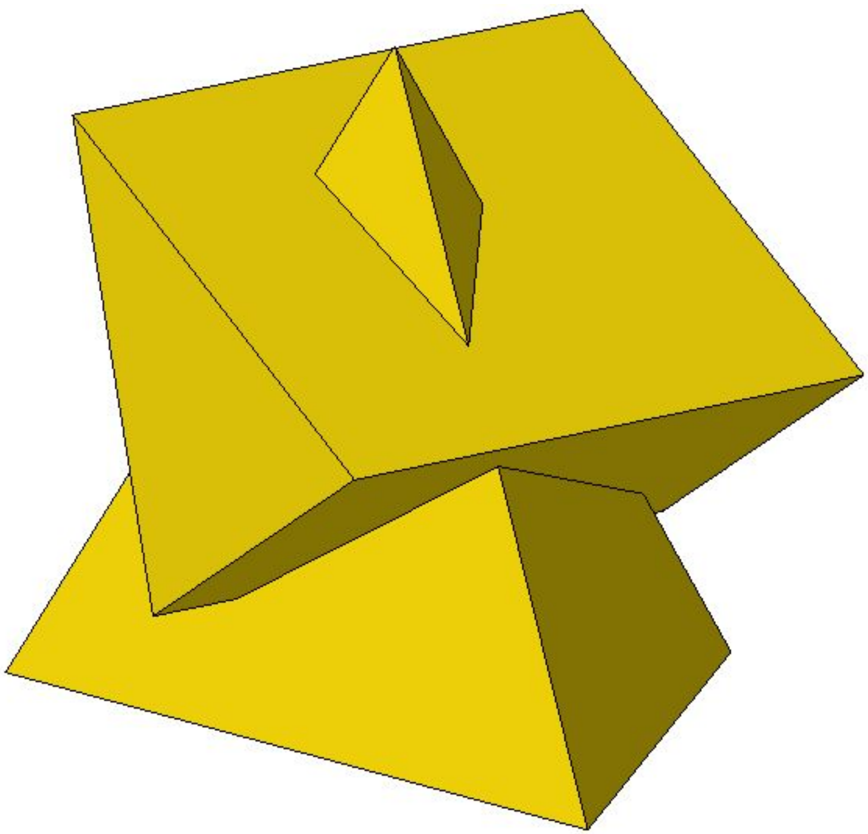
Σ^{i} – вспомогательная секущая плоскость-посредник

Обязательные требования, предъявляемые к секущим плоскостям:

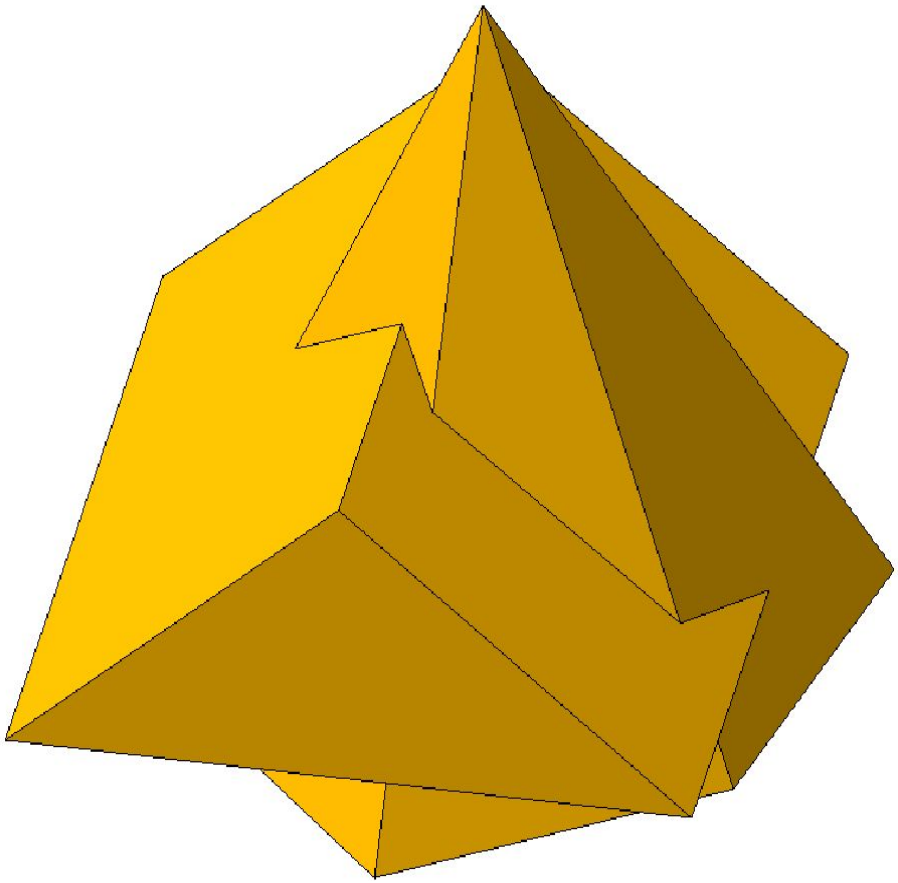
- каждая из секущих плоскостей должна пересекать обе заданные поверхности;
- линии, получаемые в результате пересечения должны пересекаться между собой и иметь, по возможности, наиболее простую геометрическую форму.

Пересечение двух поверхностей может быть полным или неполным (частичным).

Полное пересечение



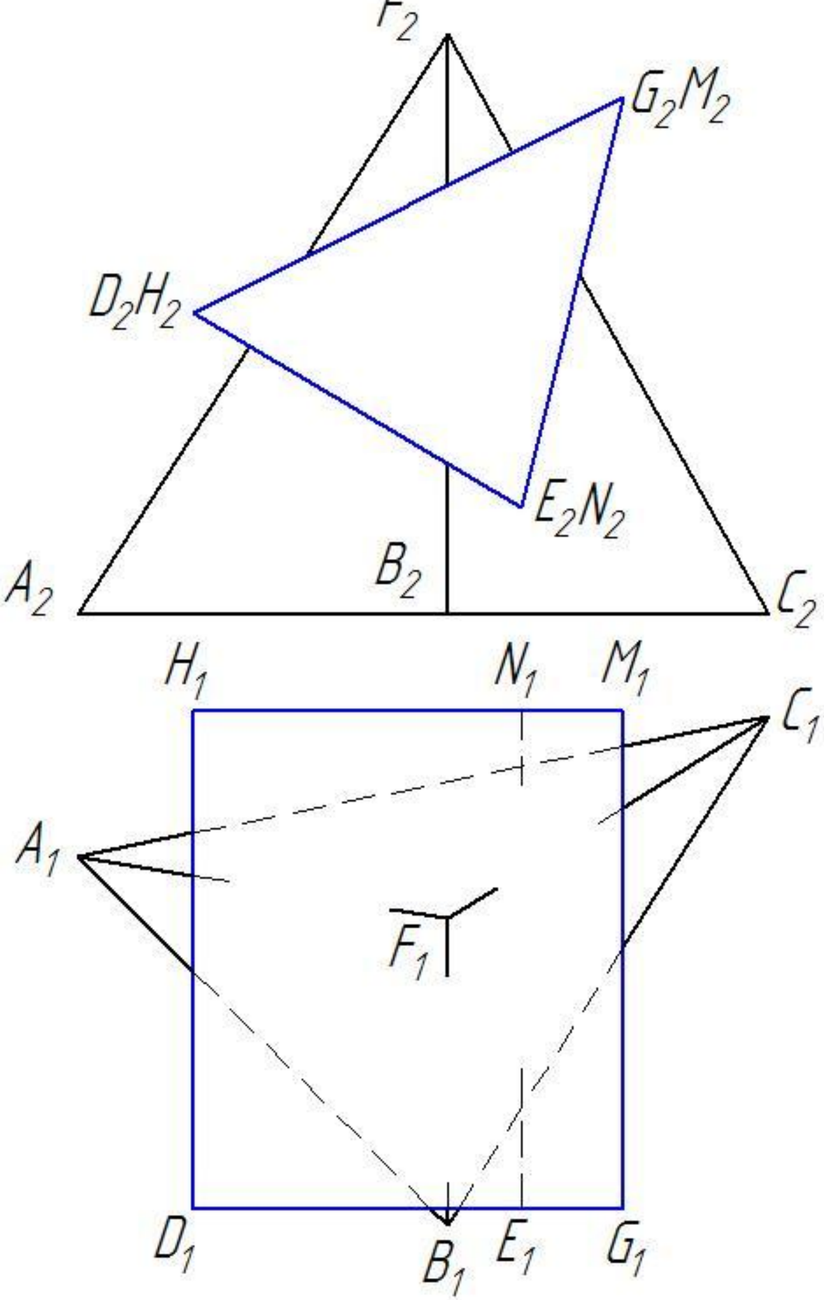
Неполное пересечение

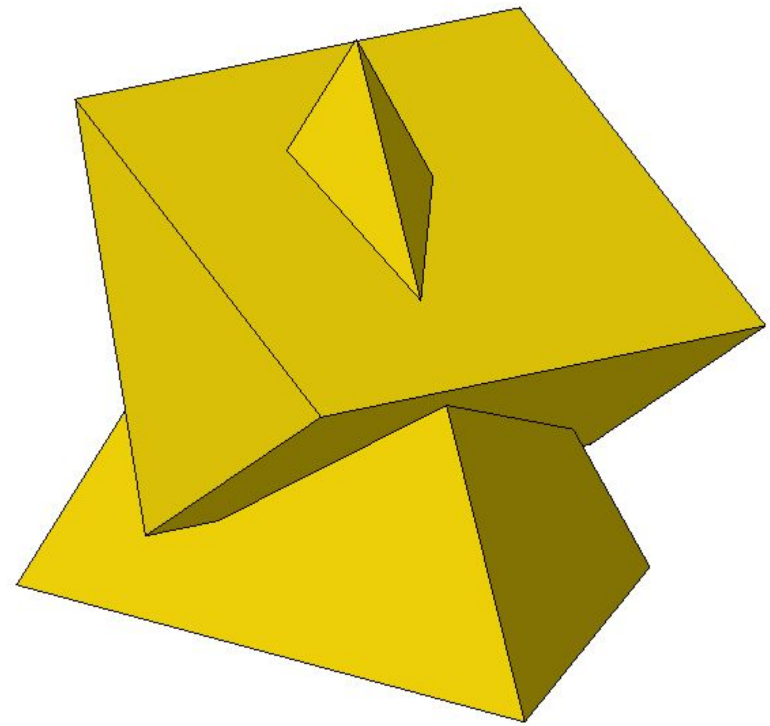


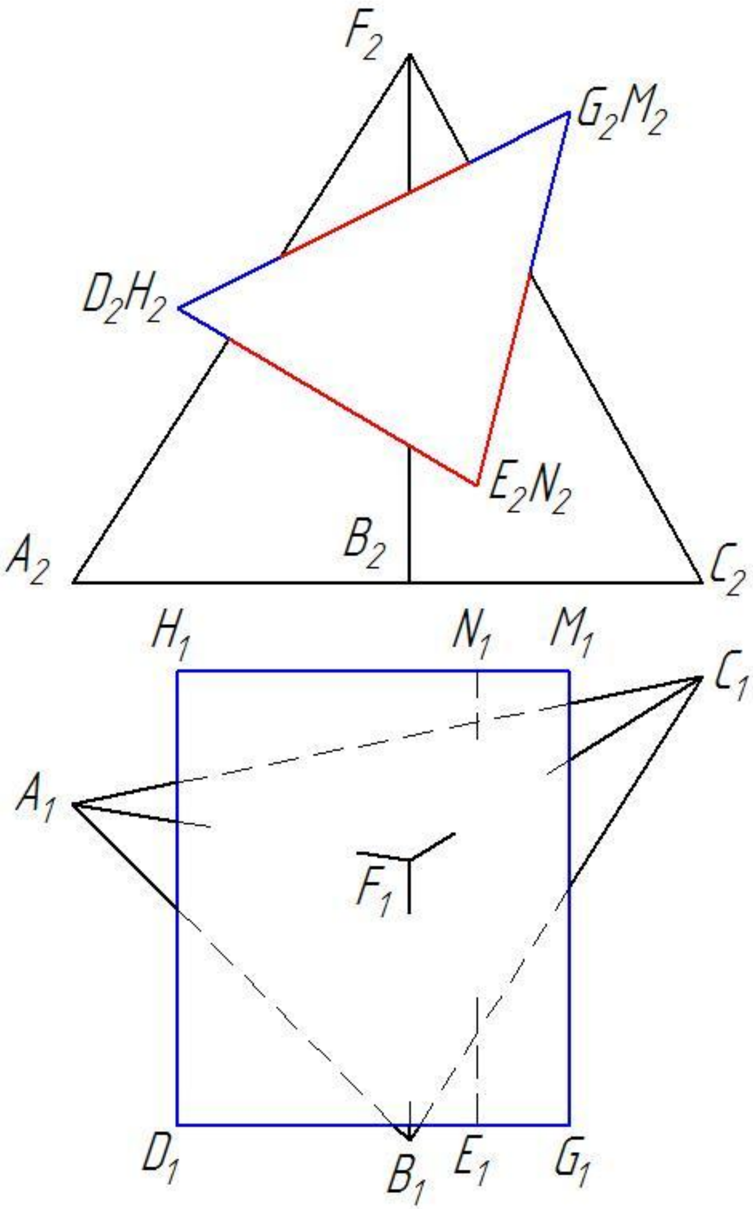
Взаимное пересечение двух гранных поверхностей

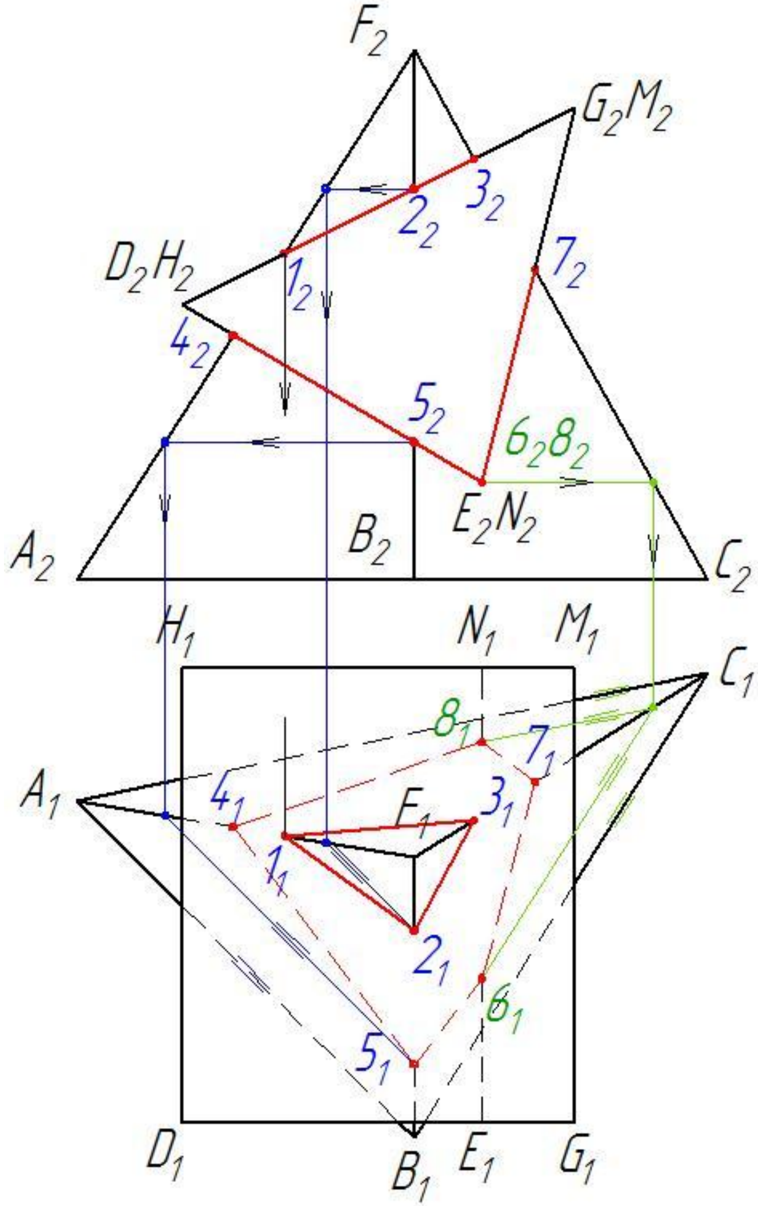
Линией пересечения двух гранных поверхностей является <u>ломаная прямая</u> линия, точками излома которой являются точки пересечения ребер одной гранной поверхности с гранями другой.

Вся задача на построение линии пересечения двух гранных поверхностей сводится к много-кратному решению задачи на определение точки пересечения прямой с плоскостью.


F2
G2M2
D2H2
E2N2
A2
B2
C2
H1
N1
M1
C1
A1
F1
D1
B1
E1
G1




F_2
G_2M_2
D_2H_2
E_2N_2
A_2
B_2
C_2
H_1
N_1
M_1
C_1
A_1
F_1
D_1
B_1
E_1
G_1

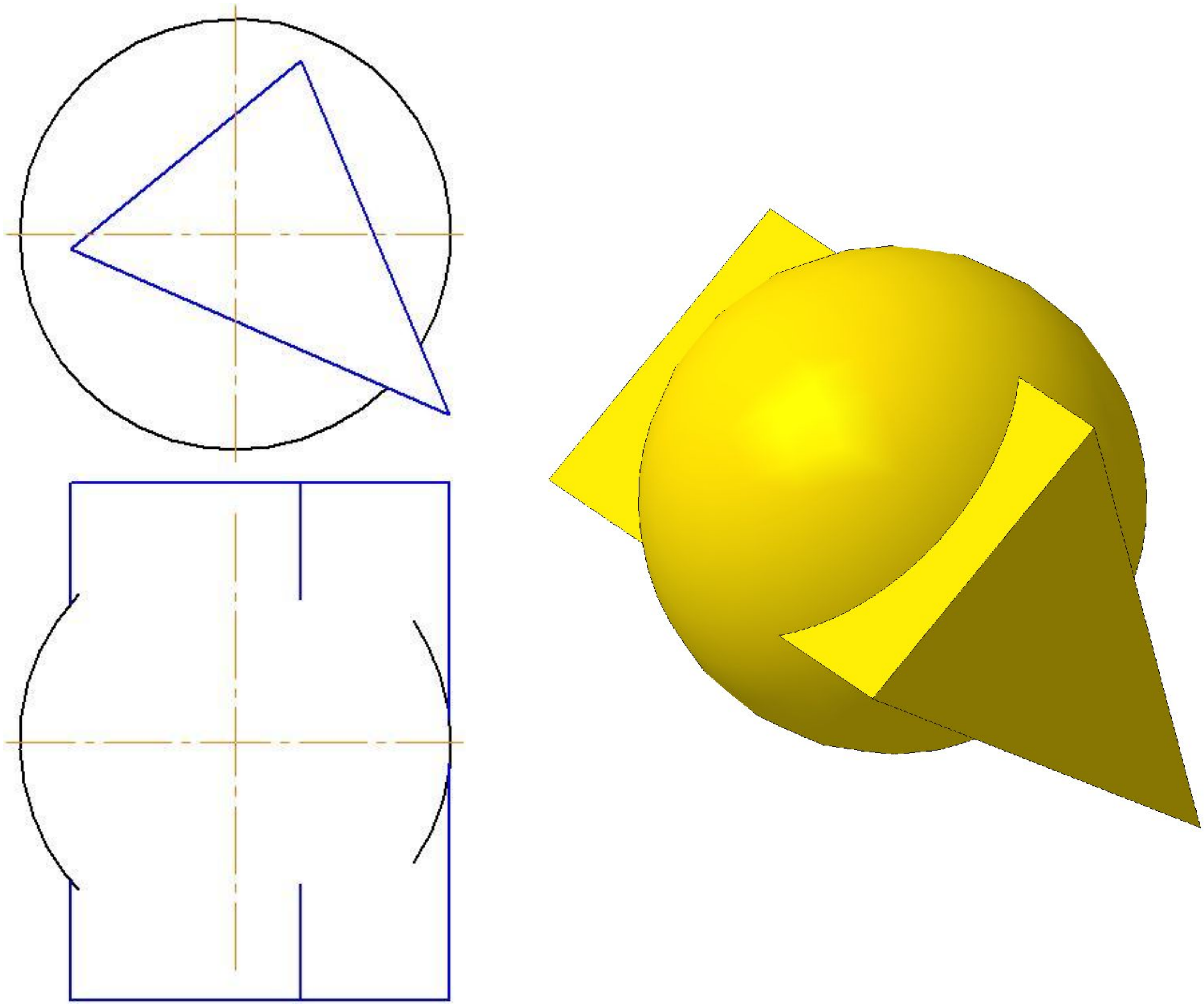

F_2
G_2M_2
3_2
2_2
D_2H_2
1_2
7_2
4_2
5_2
6_28_2
E_2N_2
A_2
B_2
C_2
H_1
N_1
M_1
C_1
8_1
7_1
A_1
4_1
F_1
3_1
1_1
2_1
6_1
5_1
D_1
B_1
E_1
G_1

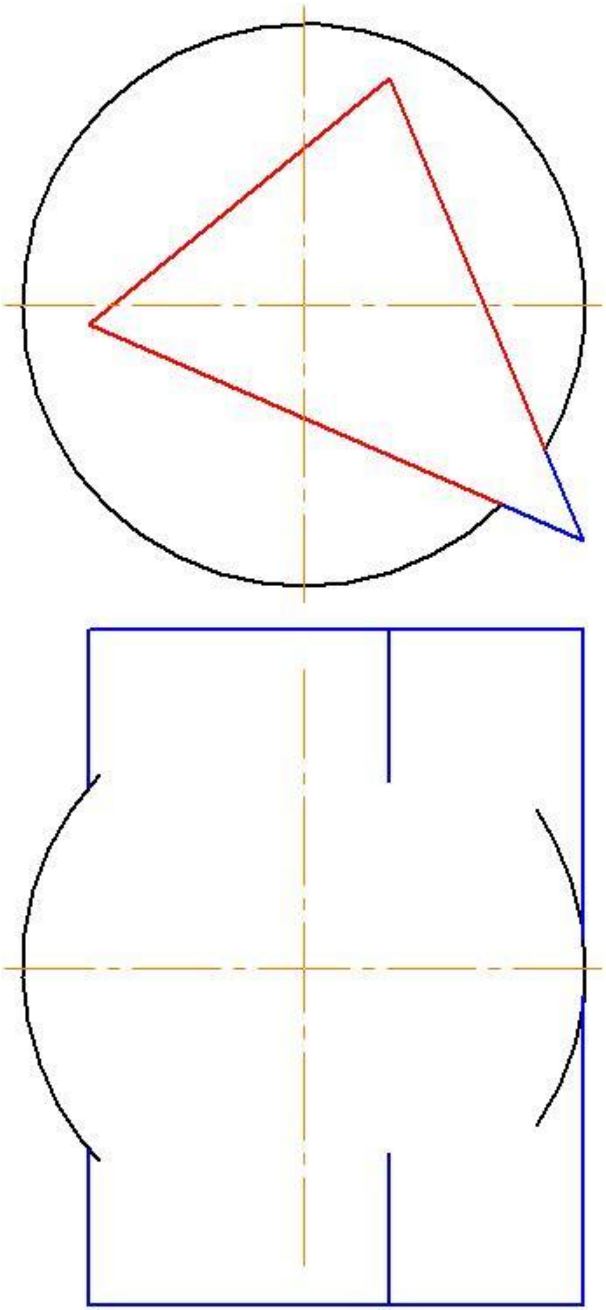
Взаимное пересечение гранной поверхности с кривой поверхностью

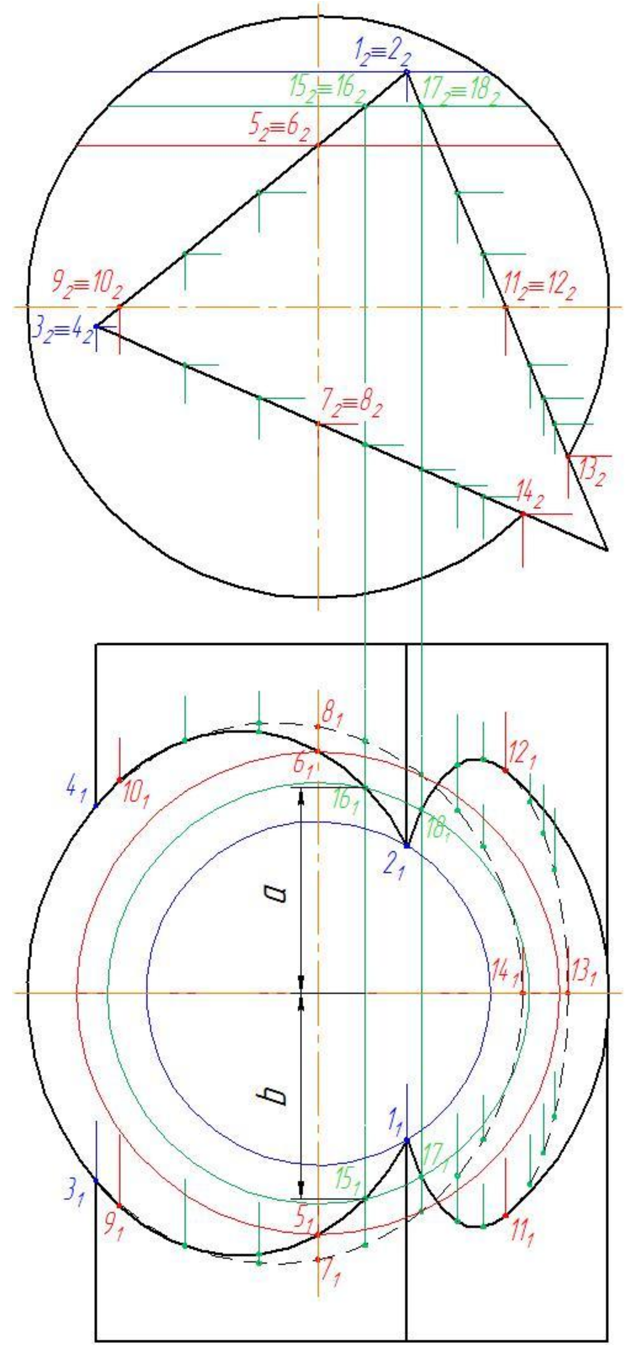
Линия пересечения гранной поверхности с кривой поверхностью представляет собой ломаную кривую линию, точками излома которой являются точки пересечения ребер гранной поверхности с кривой поверхностью, а линиями, соединяющими эти точки – плоские кривые, получаемые при пересечении граней гранной поверхности (отсеков плоскостей) с кривой поверхностью.

Т.е. задача на построение линии пересечения гранной поверхности с кривой поверхностью сводится к многократному решению двух задач:

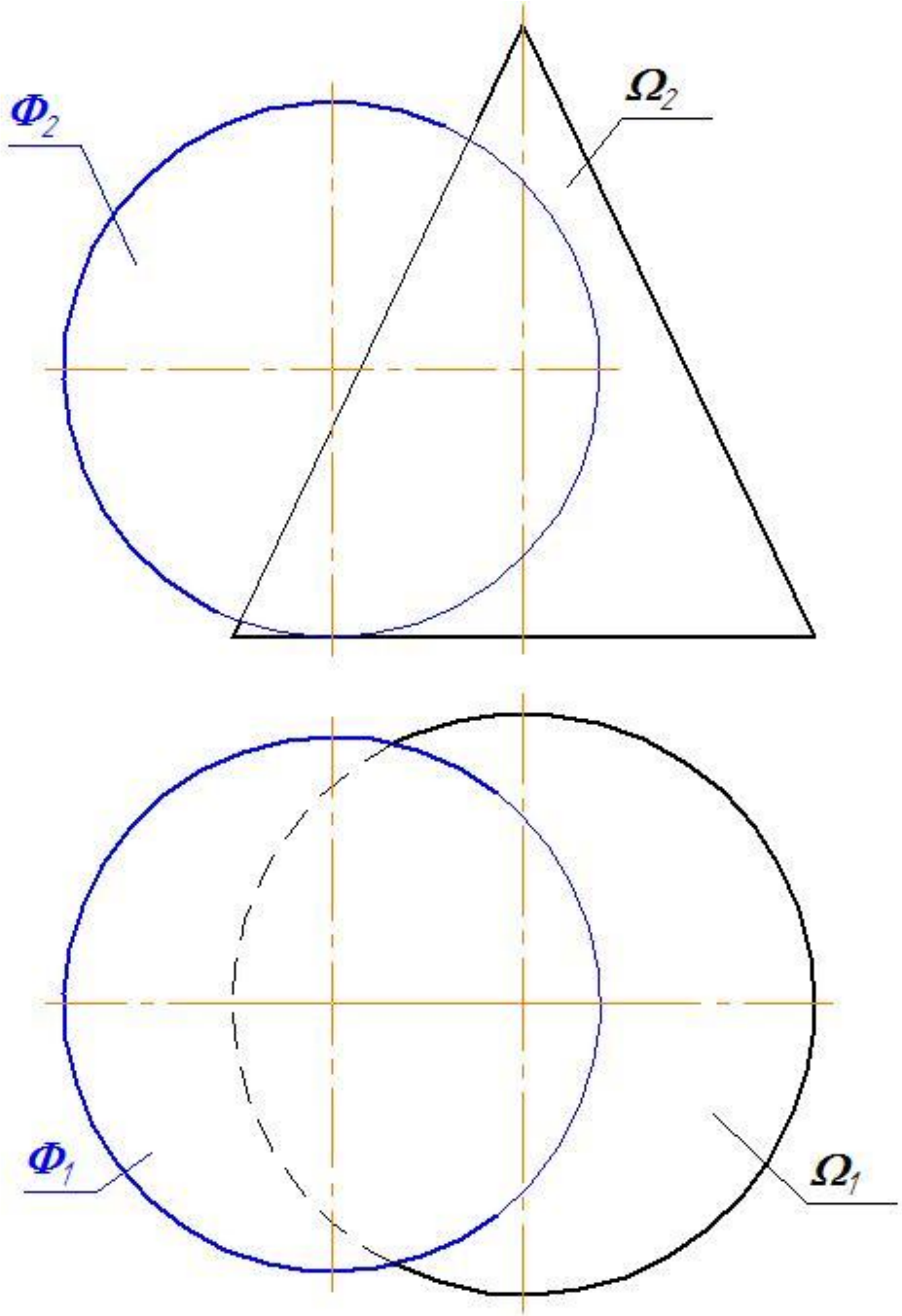
- определение точек пересечения прямой линии с кривой поверхностью;
- построение линии пересечения кривой поверхности плоскостью.



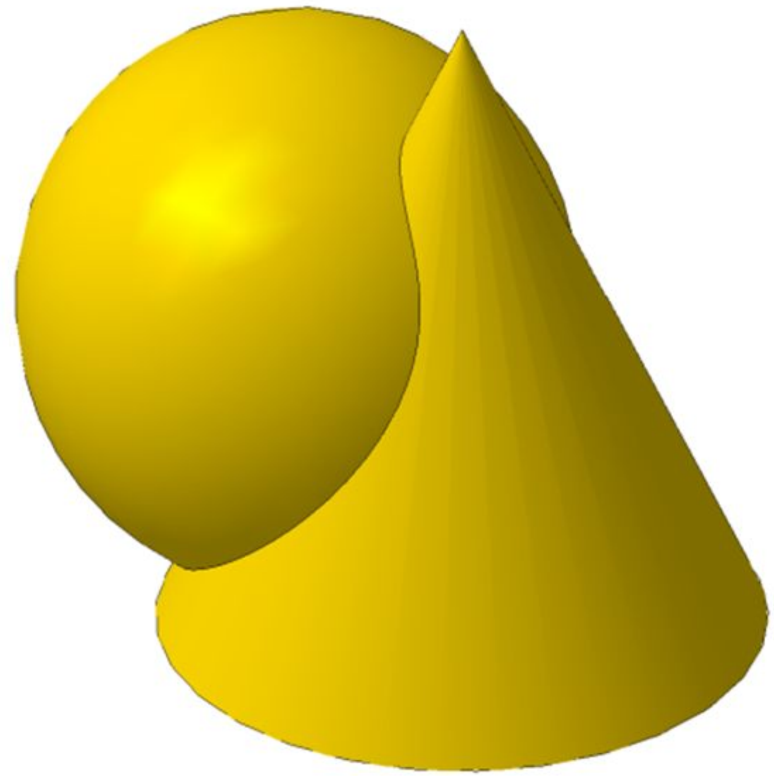


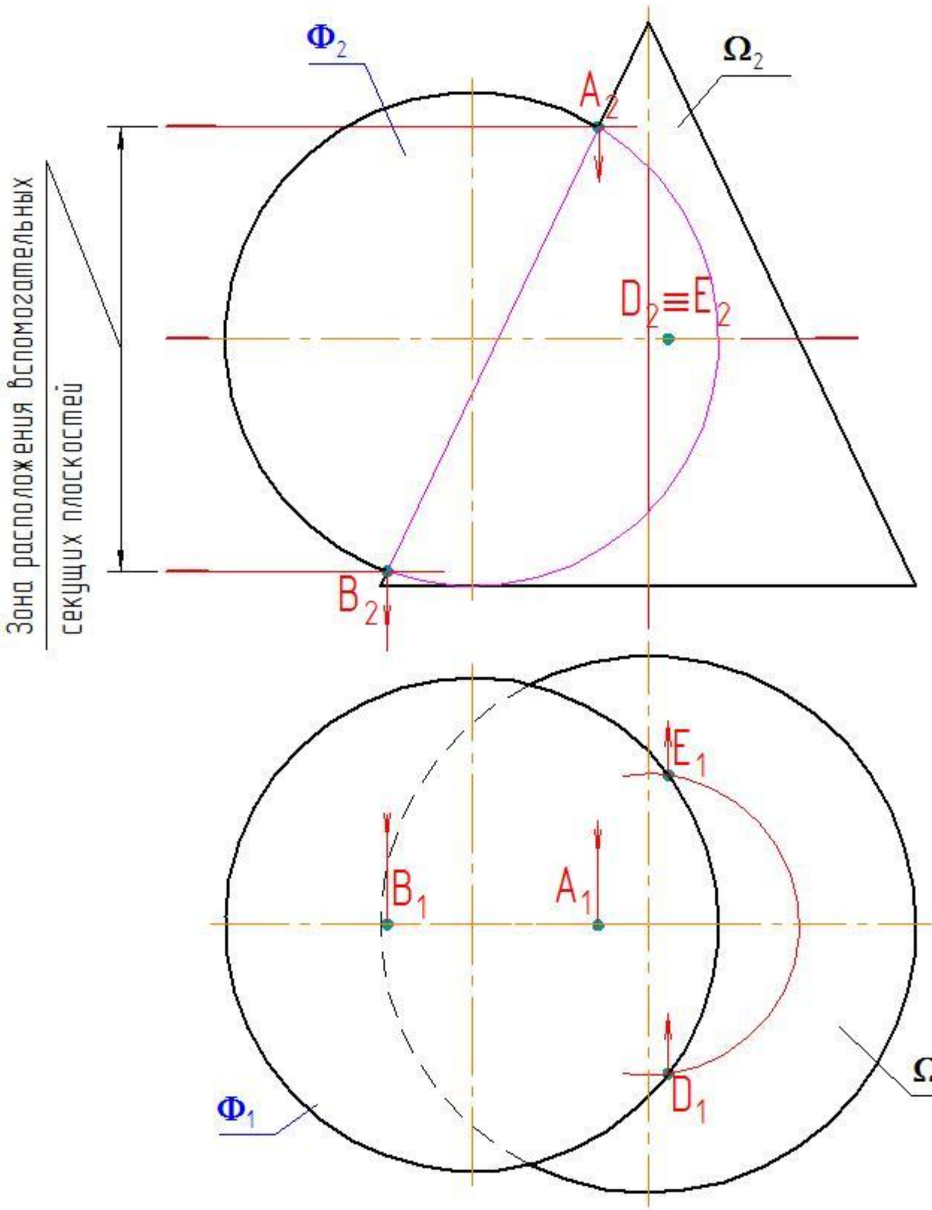

$1_2 \equiv 2_2$
$15_2 \equiv 16_2$
$17_2 \equiv 18_2$
$5_2 \equiv 6_2$
$9_2 \equiv 10_2$
$11_2 \equiv 12_2$
$3_2 \equiv 4_2$
$7_2 \equiv 8_2$
13_2
14_2
8_1
12_1
6_1
4_1
10_1
16_1
18_1
2_1
a
14_1
13_1
b
1_1
17_1
3_1
15_1
9_1
5_1
11_1
7_1

Взаимное пересечение кривых поверхностей

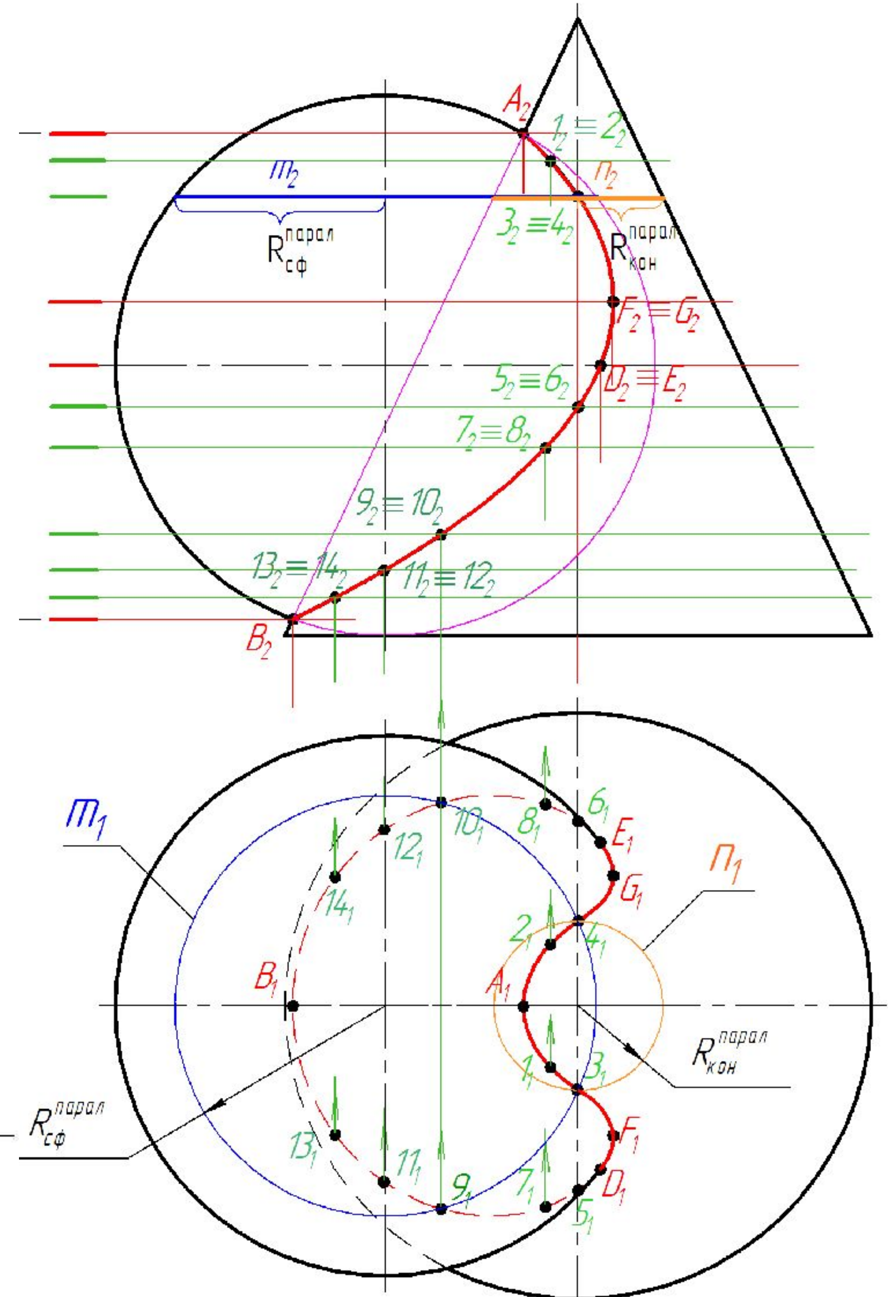


Φ_2
Ω_2
Φ_1
Ω_1





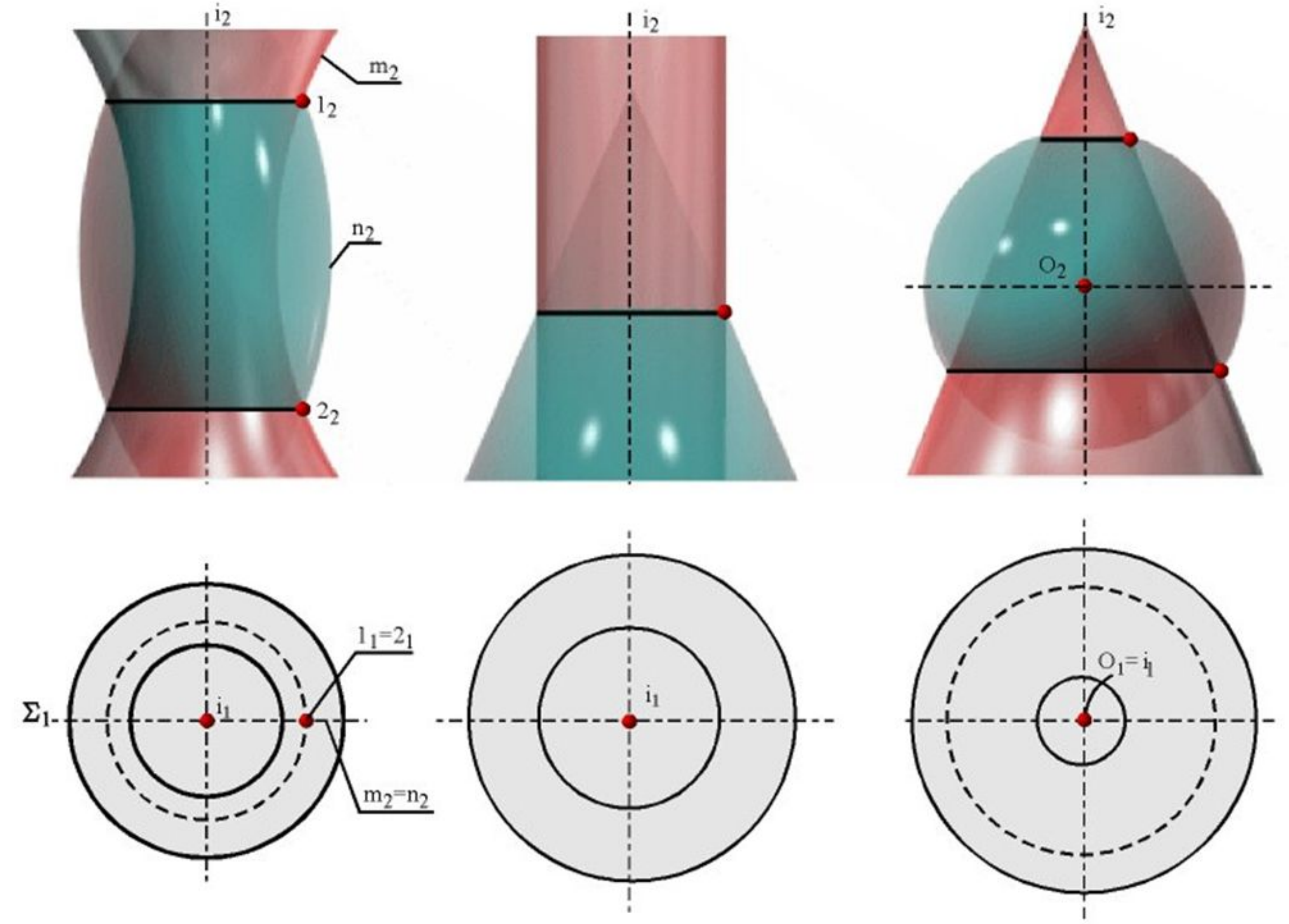
Зона расположения вспомогательных секущих плоскостей
Φ_2
Ω_2
A_2
$D_2 \equiv E_2$
B_2
E_1
B_1
A_1
D_1
Φ_1
Ω_1

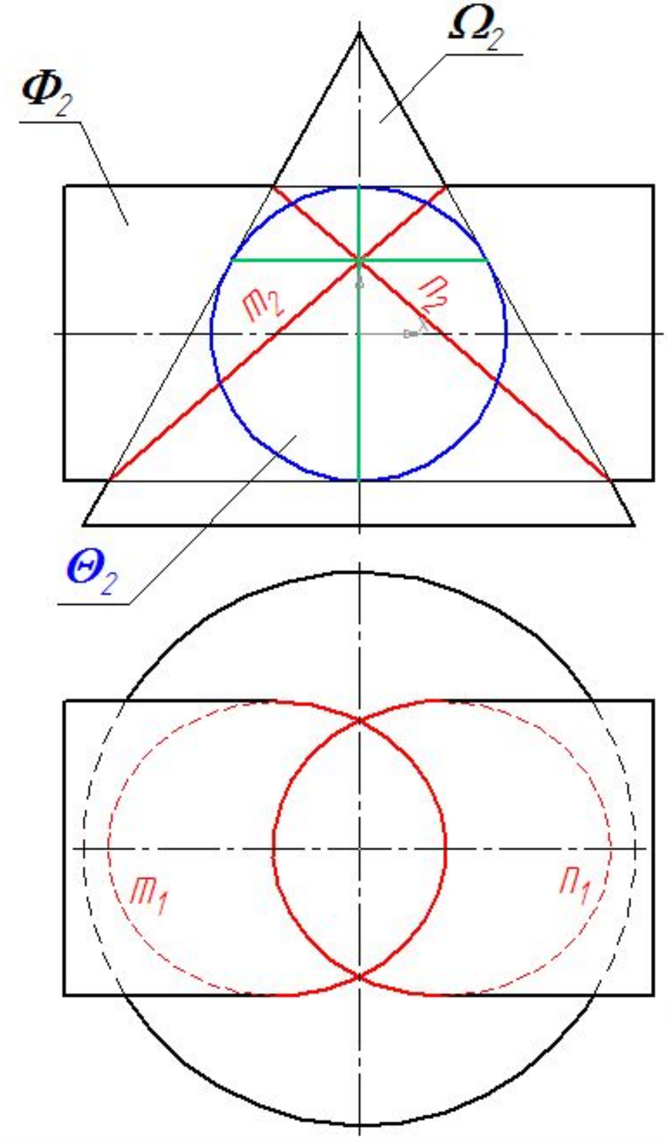


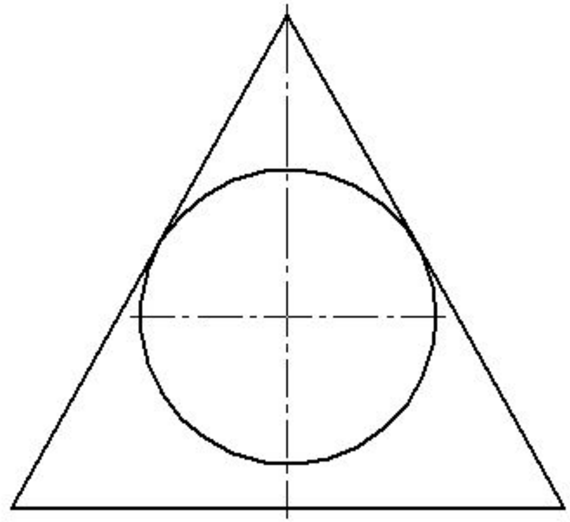
A_2
$1_2 \equiv 2_2$
m_2
n_2
$R^{парал}_{сф}$
$3_2 \equiv 4_2$
$R^{парал}_{кон}$
$F_2 \equiv G_2$
$5_2 \equiv 6_2$
$D_2 \equiv E_2$
$7_2 \equiv 8_2$
$9_2 \equiv 10_2$
$13_2 \equiv 14_2$
$11_2 \equiv 12_2$
B_2
m_1
n_1
6_1
E_1
G_1
8_1
10_1
12_1
14_1
2_1
4_1
B_1
A_1
1_1
3_1
$R^{парал}_{кон}$
$R^{парал}_{сф}$
F_1
D_1
13_1
11_1
9_1
7_1
5_1

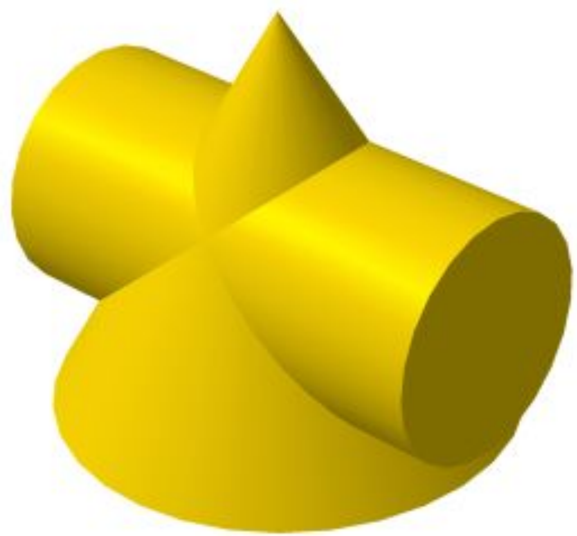
Частные случаи взаимного пересечения двух поверхностей вращения

Если две поверхности вращения соосны, то их линиями пересечения являются окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных их общей оси вращения.



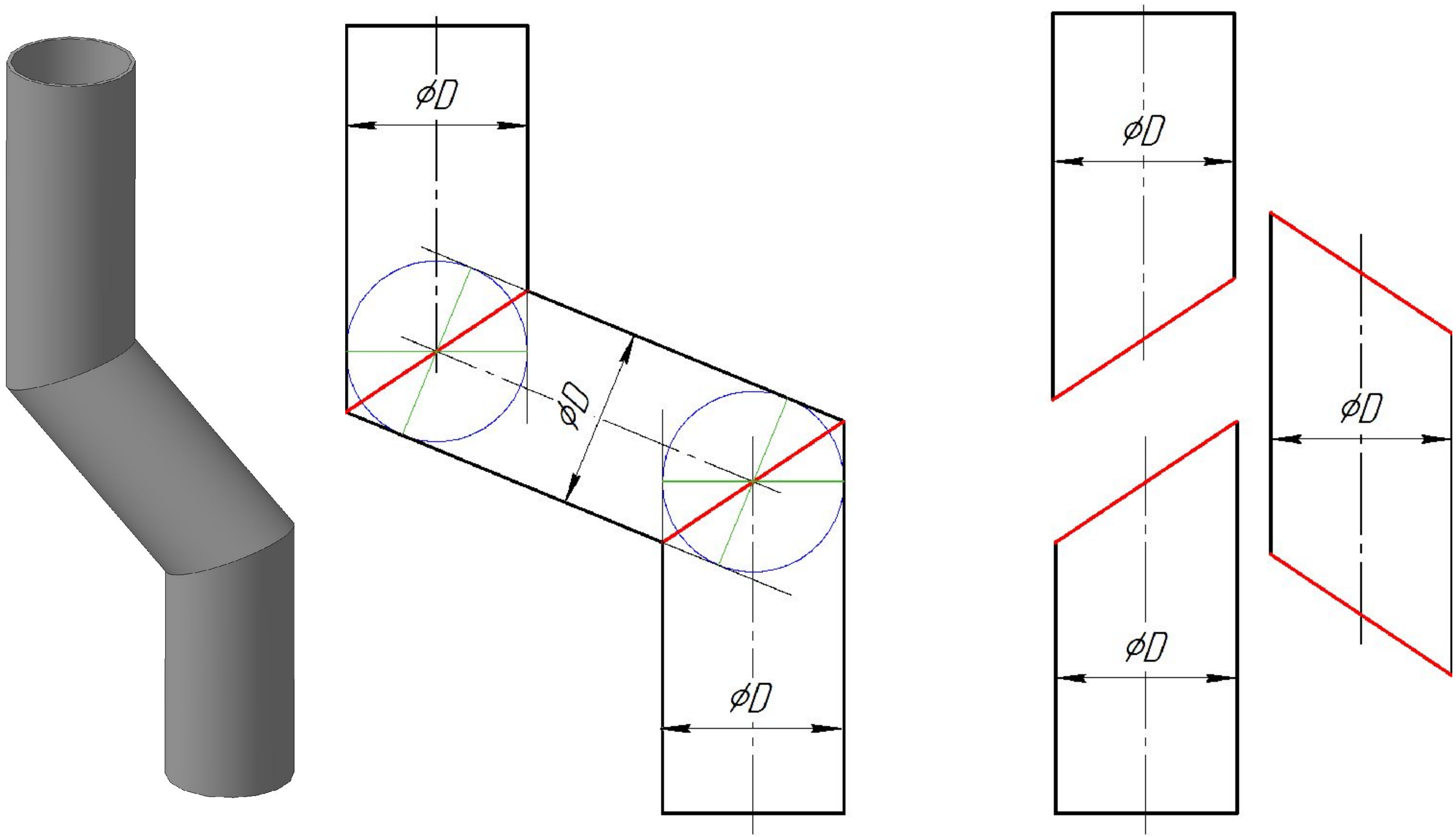






Теорема Монжа.

Если две поверхности вращения второго порядка **Ф** и **Ω** описаны вокруг третьей поверхности вращения второго порядка **Θ** (сферы) или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые ***m*** и ***n*** второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.


⌀D
⌀D
⌀D
⌀D
⌀D
⌀D