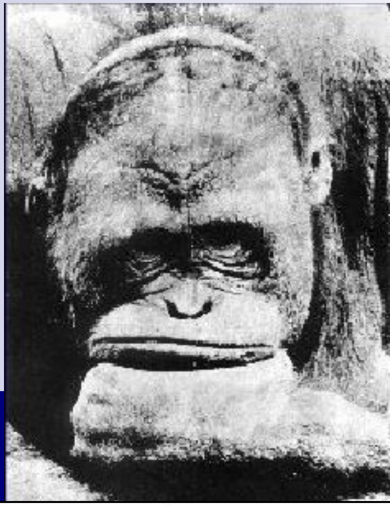
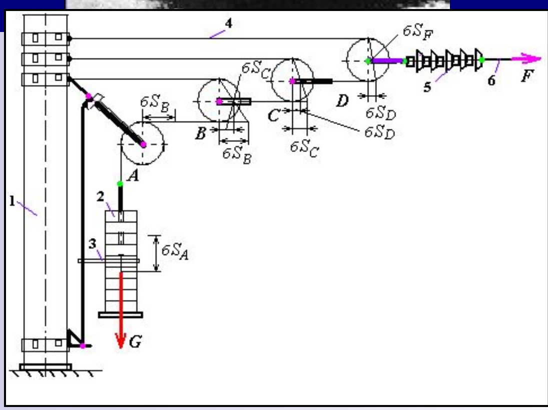
Московский государственный университет путей сообщения
(МИИТ)
Кафедра теоретической механики
Научно-технический центр транспортных технологий
Бондаренко А.Н.





Курс лекций по теоретической механике

Динамика (II часть)

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в НИИЖТе и МИИТе (1974-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме трех семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional.
Запуск презентации – F5, навигация – Enter, навигационные клавиши, щелчок мыши, кнопки.
Завершение – Esc.
Замечания и предложения можно послать по e-mail: bond@miit.ru .

Москва - 2007

Содержание

- **Лекция 6**. Работа, мощность силы. Кинетическая энергия. Теоремы об изменении кинетической энергии для материальной точки и системы. Пример решения задач на использование теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки. Пример решения задач на использование теоремы об изменении кинетической энергии системы.
- Динамика поступательного и вращательного движения твердого тела. Физический маятник.

Динамика плоского движения твердого тела.

Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы. Приведение сил инерции точек при поступательном и вращательном движениях. твердого тела. Приведение сил инерции точек при плоском движении твердого тела.

Рекомендуемая литература

1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.2. М.: Высшая школа. 1977 г. 368 с.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука. 1986 г. 416 с.
3. Сборник заданий для курсовых работ /Под ред. А.А. Яблонского. М.:Высшая школа. 1985 г. 366 с.
4. Бондаренко А.Н. “Теоретическая механика в примерах и задачах. Динамика” (электронное пособие www.miit.ru/institut/ipss/faculties/trm/main.htm), 2004 г.

Лекция 6

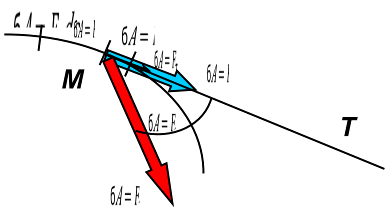
- **Работа, мощность силы. Кинетическая и потенциальная энергия** – механическое движение в результате взаимодействия механических систем может переноситься с одной механической системы на другую:

1. без превращений в другую форму движения, т.е. в качестве того же механического движения,
2. с превращением в другую форму движения материи (потенциальную энергию, теплоту, электрическую энергию и т.д.)

Импульс силы является мерой действия силы при изменении механического движения.
Работа является количественной мерой превращения механического движения в какую-либо другую форму движения материи.

- **Работа силы, приложенной к материальной точке** – Пусть точка приложения переменной по величине и направлению силы перемещается по некоторой произвольной траектории. На малом (элементарном) перемещении силу можно считать постоянной и **элементарная работа силы равна проекции силы на направление перемещения** (касательную к траектории движения), **умноженной на элементарное перемещение** :

$$\delta A = F_\tau ds$$



Знак элементарной работы определяется величиной угла α и знаком $\cos\alpha$:

Поскольку часто более удобно работать с острыми углами, то в этом случае используют острый угол и знак присваивают по следующему простому правилу: **если сила и перемещение совпадают по направлению, то присваивается знак +, если противоположны по направлению, то знак –**.

$$\delta A = F_\tau ds$$
$$= F\cos\alpha \cdot$$

Элементарная работа может быть записана в виде **скалярного произведения**: и **в проекциях**:

Работа на конечном перемещении $M M_1$ получается суммированием или интегрированием:

$\delta A = F$ $\delta A = F$ $\delta A = F$

Частные случаи: 1. Сила постоянная по величине (F = const) и направлению (α =const):

2. Сила постоянная по величине (F = const) и параллельна перемещению (α =0):

3. Сила перпендикулярна перемещению:

Лекция 6 (продолжение – 6.2)

Можно доказать следующие теоремы и утверждения:

- **Работа равнодействующей на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же перемещении:**

$\delta A = F\, d$

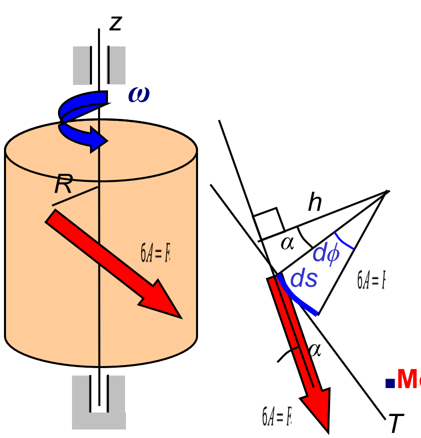
- **Работа постоянной сил по величине и направлению на составном перемещении равна алгебраической сумме работ этой силы на каждом из составляющих перемещений:** $\delta A = F$

- **Работа внутренних сил неизменяемой системы равна нулю:** $\delta A = F_\tau ds$

- **Работа силы тяжести не зависит от вида траектории и равна произведению силы тяжести на разность высот:**

$$\delta A = F\, ds$$

- **Работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.** Запишем выражение для элементарной работы силы, приложенной к точке, и выразим элементарное перемещение через угол поворота тела:



$$\delta A = F\, ds$$

- элементарная работа силы, приложенной к вращающемуся твердому телу, выражается через момент силы относительно оси.

Работа силы, приложенной к вращающемуся твердому Телу, для конечного угла поворота:

$$\delta A = F_\tau$$

В частном случае постоянного значения момента силы относительно оси работа равна произведению момента силы на угол поворота:

$\delta A = F\, d$

- **Мощность** – величина, характеризуемая количеством работы, произведенной в единицу времени:

$\delta A = F_\tau ds$

Мощность силы, приложенной к точке:

$$\delta A = F_\tau ds$$

Мощность силы, приложенной к вращающемуся твердому телу:

$$\delta A = F_\tau ds$$

Лекция 6 (продолжение – 6.3)

- **Кинетическая энергия** – характеризует способность механического движения превращаться в эквивалентное количество другого движения:

- **Кинетическая энергия материальной точки:** $\delta A = F_{\tau} ds$

- **Кинетическая энергия системы материальных точек:** $\delta A = F_{\tau} d$

- **Кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении:** $\delta A = F_{\tau} ds$

- **Кинетическая энергия твердого тела при вращательном движении:** $\delta A = F_{\tau} ds$

- **Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении:** $\delta A = F_{\tau} ds$

- **Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки – Изменение кинетической энергии точки равно работе сил, действующих на точку на том же перемещении:**

$$\delta A = F_{\tau} ds$$

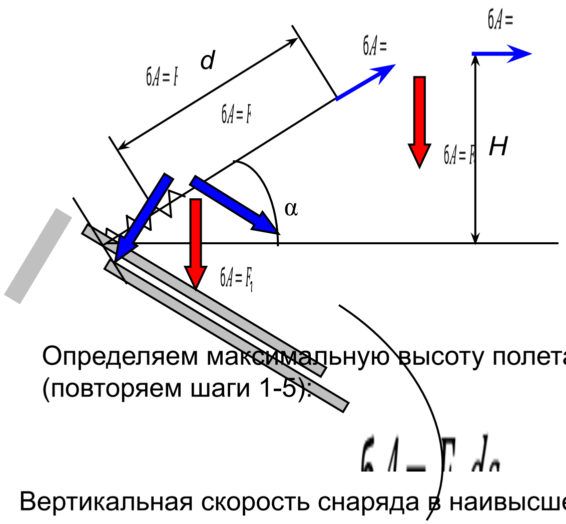
- **Теорема об изменении кинетической энергии системы – Изменение кинетической энергии системы равно работе сил, действующих на систему на соответствующих перемещениях точек системы:**

Для неизменяемой системы: $\delta A = F_{\tau} ds$

Задача 1 на применение теоремы об изменении кинетической энергии для материальной точки – Снаряд массы *m* выбрасывается пружинным устройством из канала под углом α к горизонту. Длина не растянутой пружины жесткостью *c* равна длине канала l_0. Перед выстрелом пружина сжимается на величину *d*. Определить скорость снаряда при вылете из канала, а также максимальную высоту полета.

Дано: α, *c*, *d*, *m*, l_0

Найти: v_1, *H*



1. Выбираем объект - снаряд
2. Отбрасываем связи – ствол, пружину
3. Заменяем связи реакциями – *N*, *R*
4. Добавляем активные силы – *G*
5. Записываем теорему об изменении кинетической энергии для точки:

6A = F ds

Начальная скорость снаряда равна нулю: 6A = F ds

Работа сил, приложенных к объекту, равна:

Работа нормальной реакции равна нулю (направление реакции перпендикулярно перемещению): 6A = F ds

Работа силы тяжести: 6A = F ds

Работа упругой реакции пружины (направление реакции совпадает с перемещением): 6A = F ds

Подставляем определенные величины в теорему: 6A = F ds

Отсюда величина скорости вылета снаряда: 6A = F d

Определяем максимальную высоту полета (повторяем шаги 1-5):

6A = F ds

Вертикальная скорость снаряда в наивысшей точке траектории равна нулю : 6A = F ds

Работа силы тяжести: 6A = F ds

Горизонтальная скорость снаряда постоянная (из закона сохранения проекции на ось x количества движения точки) и равна:

6A = F ds

Подставляем определенные величины в теорему:

6A = F ds

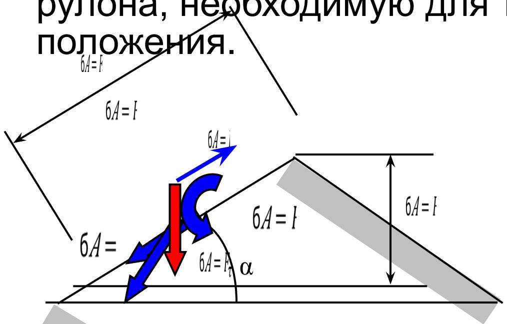
После некоторых сокращений и преобразований:

6A = F ds

Отсюда максимальная высота полета: 6A = F ds

Лекция 6 (продолжение – 6.5)

- **Задача 2 на применение теоремы об изменении кинетической энергии для системы**
- – Массивный бумажный рулон радиуса *R*, приведенный в движение толчком, катится без проскальзывания по инерции вверх по наклонной шероховатой плоскости под углом α к горизонту с некоторой начальной скоростью. Коэффициент трения качения f_k. Определить начальную скорость рулона, необходимую для того, чтобы он мог перевалить через вершину высотой *H* от начального положения.



Дано: α, f_k, H, R

Найти: v_0

1. Выбираем объект - рулон
2. Отбрасываем связи – опорную плоскость
3. Заменяем связи реакциями – N, $F_{тр}$, $M_к$
4. Добавляем активные силы – G
5. Записываем теорему об изменении кинетической энергии для твердого тела:

Кинетическая энергия на вершине равна нулю:

Кинетическая энергия в начальный момент времени равна:

$6A = F_\tau ds$

Момент инерции массы сплошного цилиндра равен:

$6A = F_\tau ds$

Угловая скорость равна: $6A = F_\tau ds$

Подставляем определенные величины в теорему:

Тогда кинетическая энергия в начальный момент времени:

Работа сил, приложенных к объекту, равна:

Работа нормальной реакции равна нулю: $6A = F_\tau ds$

Работа силы трения скольжения равна нулю (приложена в МЦС): $6A = F_\tau ds$

Работа силы тяжести: $6A = F_\tau ds$

Работа момента сопротивления качению:

Момент сопротивления качению: $6A = F_\tau ds$

Разность углов поворота рулона: $6A = F_\tau ds$

После некоторых сокращений и преобразований получаем:

$6A = F_\tau d$

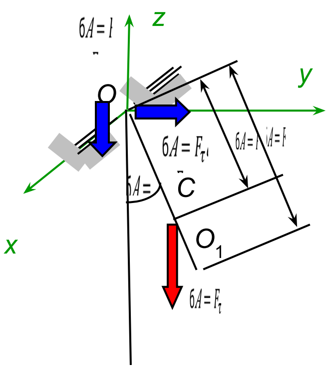
- **Динамика поступательного и вращательного движений твердого тела** – рассмотренные теоремы динамики системы дают дифференциальные уравнения, описывающие эти два типа движения твердого тела.
- **Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела** – из теоремы о движении центра масс системы:

6A = F ds

- **Дифференциальные уравнения вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси** – из теоремы об изменении момента количества движения системы:

6A = F ds

- **Физический маятник** – твердое тело, имеющее неподвижную горизонтальную ось вращения, не проходящую через его центр тяжести, и находящийся под действием только силы тяжести. При отклонении физического маятника от положения равновесия возникает возвращающий момент от силы тяжести, наличие которого является условием колебательного движения (качания) относительно положения равновесия.



1. Выбираем объект (маятник):
2. Отбрасываем связи (цилиндрические шарниры):
3. Заменяем связи реакциями (суммарные реакции двух шарниров):
4. Запишем дифференциальное уравнение вращения оси x:

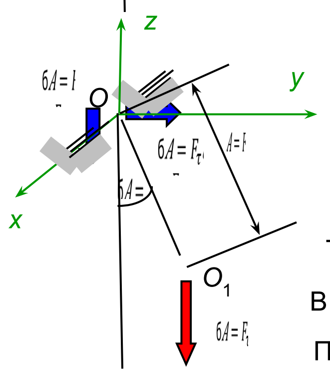
6A = F ds

Представим уравнение в виде: 6A = F ds - **дифференциальное уравнение качаний физического маятника.**

Рассмотрим **математический маятник** длиной l:

6A = F ds

Подставим момент инерции
и представим уравнение в виде: 6A = F ds - **дифференциальное уравнение качаний математического маятника.**



Поскольку полученные уравнения отличаются лишь коэффициентами, то всегда можно поставить в соответствие физическому маятнику математический маятник, период качаний которого равен периоду данного физического маятника. Для этого достаточно приравнять коэффициенты:

6A = F ds

Отсюда можно определить **приведенную длину физического маятника**:

6A = F ds

Последнее неравенство
легко доказывается:

6A = F ds

Точка O_1 физического маятника, находящаяся на расстоянии l по прямой OC называется **центром качаний маятника**.

В случае малых колебаний $\sin\varphi \approx \varphi$:

6A = F ds

Период
колебаний:

6A = F ds

Используя формулу для периода колебаний можно определять опытным путем моменты инерции тел сложной формы (положение центра тяжести можно найти методом подвешивания).

- **Динамика плоского движения твердого тела** – Плоское движение может быть представлено как совокупность поступательного движения тела со скоростью центра масс и вращательного движения вокруг центра масс. Это представление было использовано ранее при вычислении кинетической энергии:

Первые два дифференциальные уравнения, описывающие поступательное движение тела,
найдем, используя теорему о движении центра масс: $6A = F_\tau ds$

$$6A = F_\tau$$

Третье дифференциальное уравнение, описывающее вращательное движение тела вокруг центра масс, найдем, используя теорему об изменении кинетического момента системы:

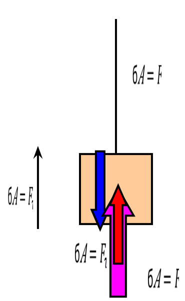
$$6A = F_\tau ds \qquad 6A = F_\tau ds$$

- **Принцип Даламбера (Германа, Эйлера)** – общий метод, при помощи которого уравнениям динамики по форме придается вид уравнений статики. Благодаря простоте этот метод получил широкое применение во многих прикладных дисциплинах.
- **Принцип Даламбера для материальной точки.** Основное уравнение динамики точки:

С введением силы инерции $6A = F$ **уравнение динамики точки принимает вид уравнения равновесия**:

Таким образом, **геометрическая сумма приложенных к точке сил и силы инерции этой точки равна нулю.** Сила инерции условно добавляется к действующим на точку силам, образуя взаимно уравновешенную систему сил.

$$6A = F_\tau$$



Задача 1: Кабина лифта весом ***G*** поднимается тросом с ускорением ***a***. Определить натяжение троса.

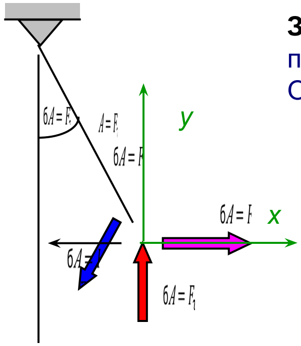
1. Выбираем объект (кабина лифта).
2. Отбрасываем связь (трос) и заменяем реакцией ***R***.
3. Добавляем к действующим силам силу инерции:
4. Составляем уравнение равновесия:

$$6A = F$$

$$6A = F_\tau$$

Определяем реакцию троса: $6A = F_\tau ds$

Определяем натяжение троса: $6A = F_\tau ds$



Задача 2: Груз весом ***G*** подвешен на тросе длиной l и движется по круговой траектории в горизонтальной плоскости с некоторой скоростью. Угол отклонения троса от вертикали равен α.
Определить натяжение троса и скорость груза.

1. Выбираем объект (груз).
2. Отбрасываем связь (трос) и заменяем реакцией ***R***.
3. Добавляем к действующим силам силу инерции:

$$6A = F_\tau ds$$

4. Составляем уравнение равновесия:

$$6A = F_{\tau}$$

Из первого уравнения определяем реакцию троса:

$$6A = F_\tau ds$$

Определяем натяжение троса:

$$6A = F_\tau ds$$

Подставляем значение реакции троса и силы инерции во второе уравнение и определяем скорость груза:

$$6A = F_\tau ds$$

$$6A = F_\tau ds$$

Сравните ход решения и результат с примером 3 в лекции 2 (стр.4).

Принцип Даламбера для несвободной механической системы.

Геометрическая сумма главных векторов задаваемых сил, реакций связи и сил инерции материальных точек равна нулю.

$$6A = F_\tau ds$$

Здесь $\boldsymbol{P}^*$ – главный вектор задаваемых сил, приложенных к точке,
$\boldsymbol{R}^*$ – главный вектор реакций связей, приложенных к точке,
$\boldsymbol{\Phi}^*$– главный вектор сил инерции точек системы.

Геометрическая сумма главных моментов задаваемых сил, реакций связи и сил инерции материальных точек относительно любого центра равна нулю.

$$6A = F_\tau ds$$

Здесь $\boldsymbol{M}_O^P$ – главный момент задаваемых сил относительно центра *O*,
$\boldsymbol{M}_O^R$– главный момент реакций связей относительно центра *O*,
$\boldsymbol{M}_O^\Phi$– главный момент сил инерции точек системы относительно центра *O*.

Лекция 6 (продолжение – 6.9)

- **Главный вектор сил инерции твердого тела –** не зависит от выбора центра приведения и **для всех типов движения равен**:

$$6A = F_{-}d$$

- **Приведение сил инерции точек твердого тела при поступательном движении –**

Силы инерции приводятся к равнодействующей силе, приложенной в центре масс, равной по модулю произведению массы тела на модуль ускорения его центра масс и направленной противоположно этому ускорению.

- **Приведение сил инерции точек твердого тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси.**

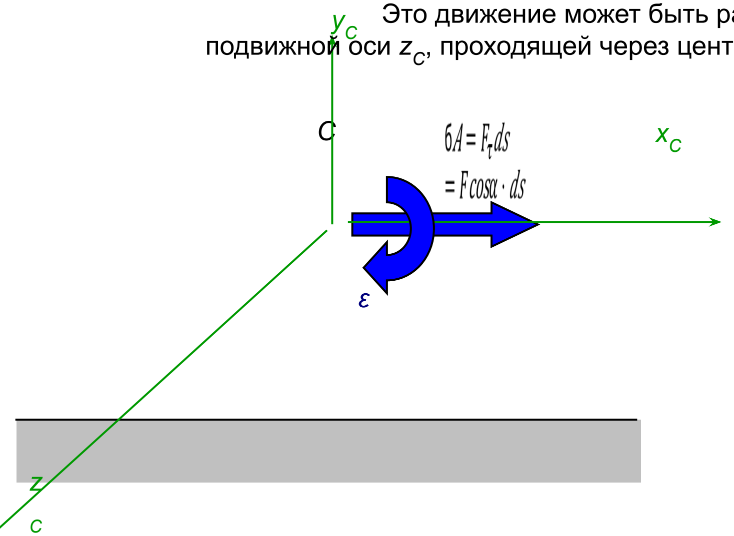
Центр масс тела находится на оси вращения. Тогда силы инерции приводятся к главному моменту сил инерции.

Главный момент сил инерции равен произведению углового ускорения на момент инерции тела относительно оси вращения и направлен в сторону противоположную угловому ускорению:

$$6A = F_{-}ds$$

- **Приведение сил инерции точек твердого тела при плоском движении**

Это движение может быть разложено на поступательное движение с центром масс тела *C* и вращательное вокруг подвижной оси z_C, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения.



В соответствии с этим **силы инерции при плоском движения приводятся к главному вектору сил инерции, приложенному в центре масс**, **и главному моменту сил инерции**

$$6A = F_{-}d \qquad 6A = F_{-}ds$$