

Методы оптимизации

Оптимизация

- При поиске экстремальной точки осуществляется локальное изучение поверхности отклика. Экстремальное значение отклика достигается с помощью многократного последовательного изучения поверхности отклика и продвижения в факторном пространстве с помощью шагов.
- Задачи с одним выходным параметром имеют очевидные преимущества. Но на практике чаще всего приходится учитывать несколько выходных параметров (прочность, эластичность, относительное удлинение)
- Математические модели можно построить для каждого из параметров, но одновременно оптимизировать несколько функций невозможно.
- Обычно оптимизируется одна функция, наиболее важная с точки зрения цели исследования, при ограничениях, налагаемых другими функциями. Поэтому из многих выходных параметров выбирается один в качестве параметра оптимизации, а остальные служат ограничениями.
- Всегда полезно исследовать возможность уменьшения числа выходных параметров.

Применение численных методов

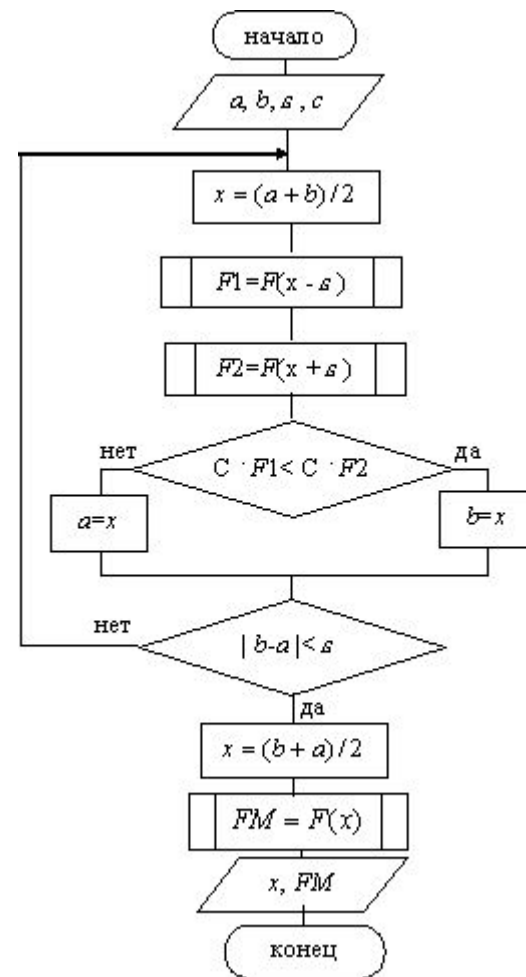
- Главное отличие численных методов от аналитических в том, что действия выполняются не с выражениями, а со значениями, когда соотношение или функция имеют определенный вид и поиск решения заключается в применении алгоритма.

Численные методы	Алгоритмические	Перебора	Итерационные	Интерполяционные
<i>Решение уравнений</i>		Прямого перебора Половинного деления	Простых итераций	Секущих Касательных Ньютона
<i>Решение систем уравнений</i>	Гаусса LU-разложения Прогонки		Якоби Зейделя	Ньютона
<i>Интегрирование</i>				Прямоугольников Трапеций Симпсона Сплайн-интерполяции
<i>Дифференцирование</i>				Численного дифференцирования
<i>Нахождение экстремумов</i>		Прямого перебора Трихотомии		Параболической интерполяции
<i>Другое</i>	Действия над матрицами Полином большой степени			

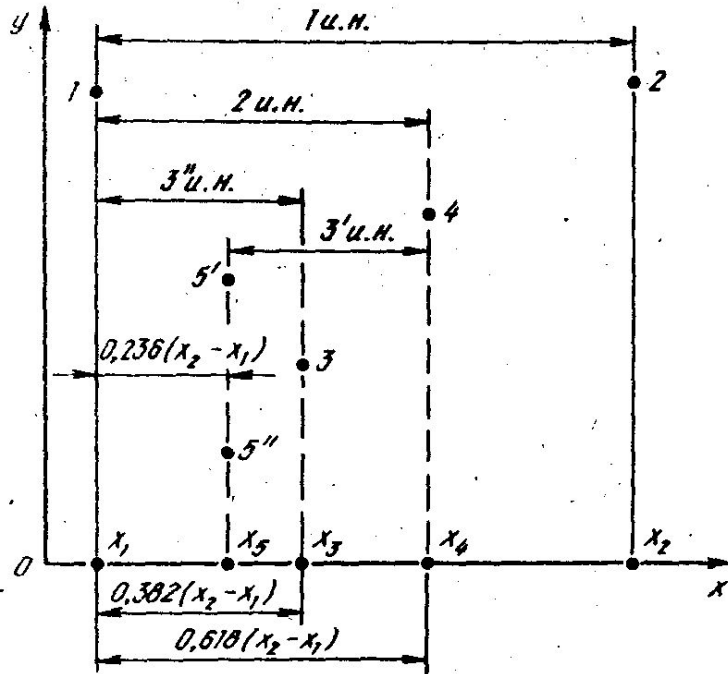
ОПТИМИЗАЦИЯ
ОДНОФАКТОРНЫХ
ОБЪЕКТОВ.

Деление отрезка пополам

- Существует довольно очевидная теорема: "Если непрерывная функция на концах некоторого интервала имеет значения разных знаков, то внутри этого интервала у нее есть корень (как минимум, один, но м.б. и несколько)". На базе этой теоремы построено численное нахождение приближенного значения корня функции. Обобщенно этот метод называется **дихотомией**, т.е. **делением отрезка на две части**.
- Обобщенный алгоритм выглядит так:
 1. Задать начальный интервал;
 2. Убедиться, что на концах функция имеет разный знак;
 3. Повторять пока не будет достигнута нужная точность:
 - выбрать внутри интервала точку;
 - сравнить знак функции в точке со знаком функции в одном из концов;
 - если совпадает, то переместить этот конец интервала в точку,
 - иначе переместить в точку другой конец интервала;



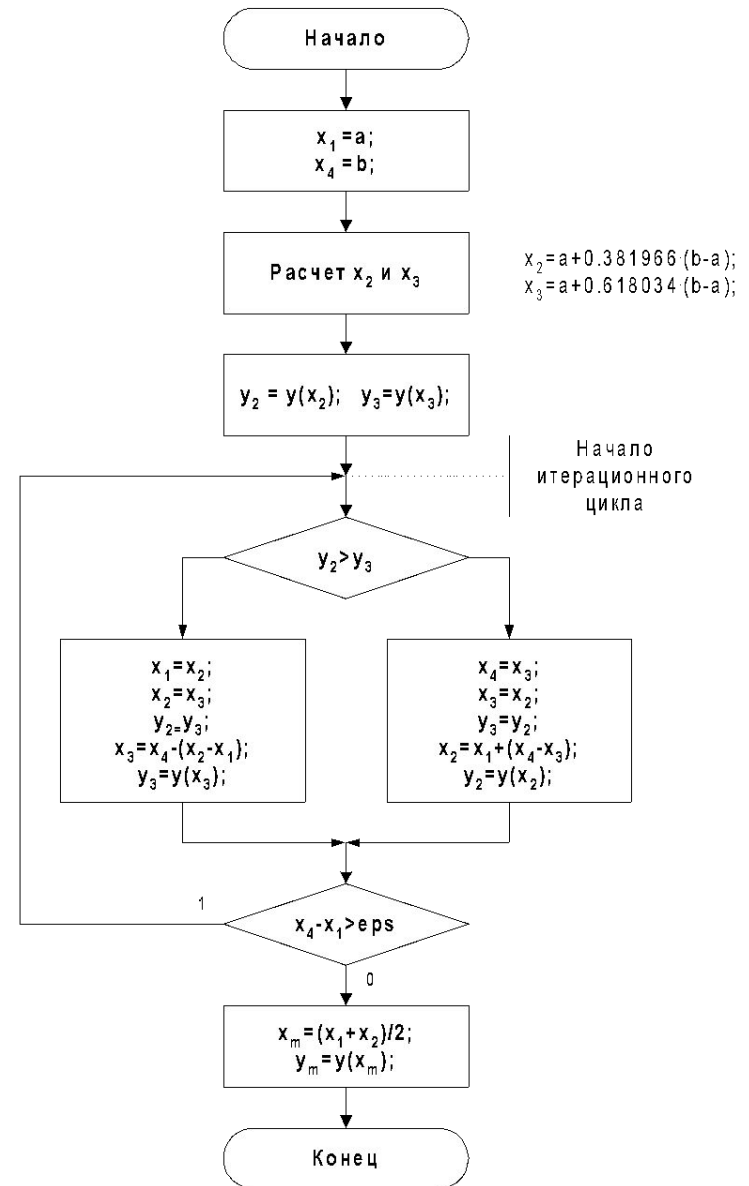
Метод золотого сечения



$$\delta x = b - a$$

$$\begin{cases} L_1 + L_2 = \delta x \\ L_2 / L_1 = L_1 / \delta x \end{cases}$$

- $L_1 > L_2$; $L_2 / L_1 = 0,618$
- $X_4 = 0,618 (X_2 - X_1)$



Метод Фибоначчи

- Числа Фибоначчи: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3.$

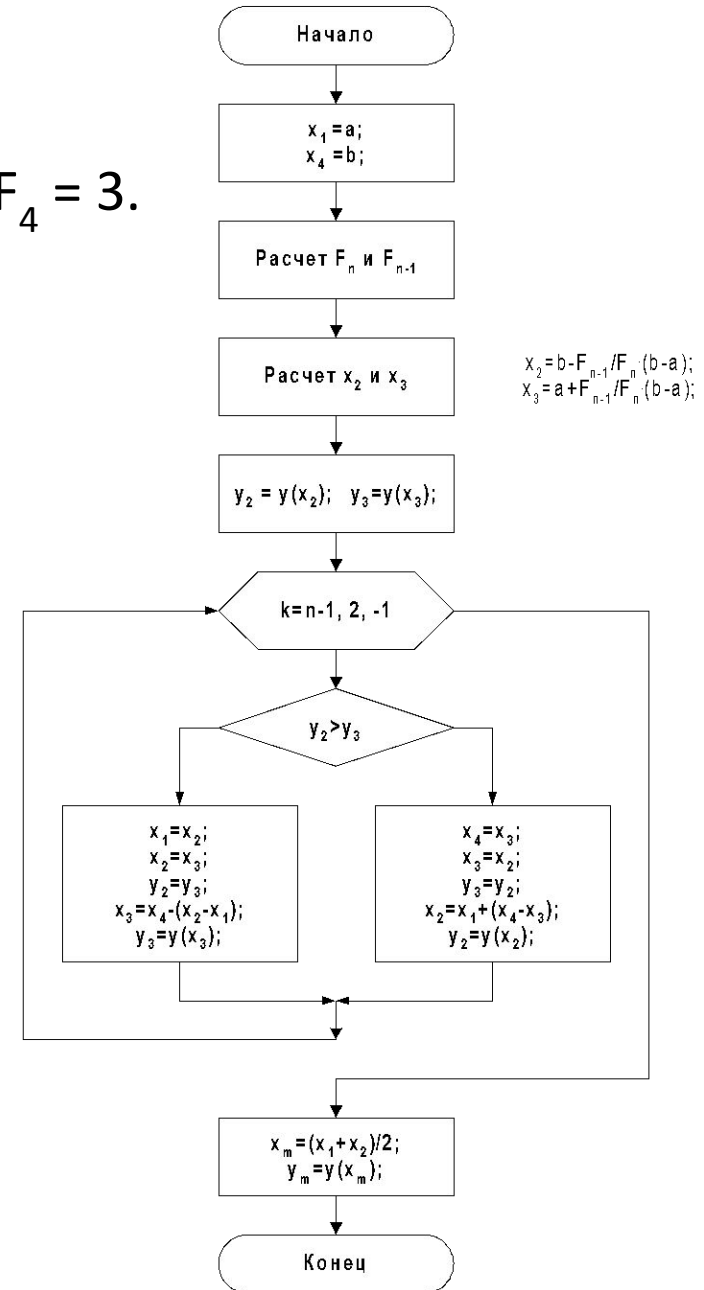
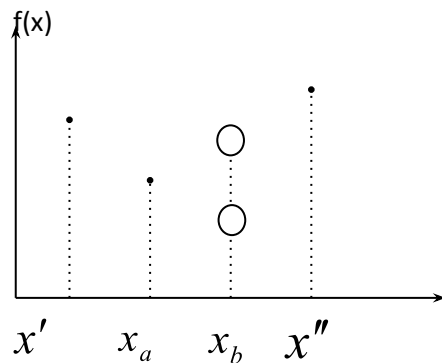
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при $n > 2.$

- Погрешность определяется $E_0 = \frac{L_0}{F_{N+2}}$

- Скорость сужения интервала $\frac{1}{(2E)}$

$$x_a = x' + \left(\frac{F_n}{F_{n+2}} \right) \cdot (x'' - x')$$

$$x_b = x'' + \left(\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} \right) \cdot (x'' - x')$$



Метод парабол

- Наиболее часто используемый машинный метод
- Пусть есть функция с минимумом на отрезке **ab**. Выбирается три точки x_1, x_2, x_3 – любые. Через эти три точки проводится парабола.

$$x_1 < x_2 < x_3 \quad f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3)$$

- Построим квадратный трехчлен $f_1(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1) \cdot (x - x_2)$
- Точку минимума можно определить, приравняв производную к 0:

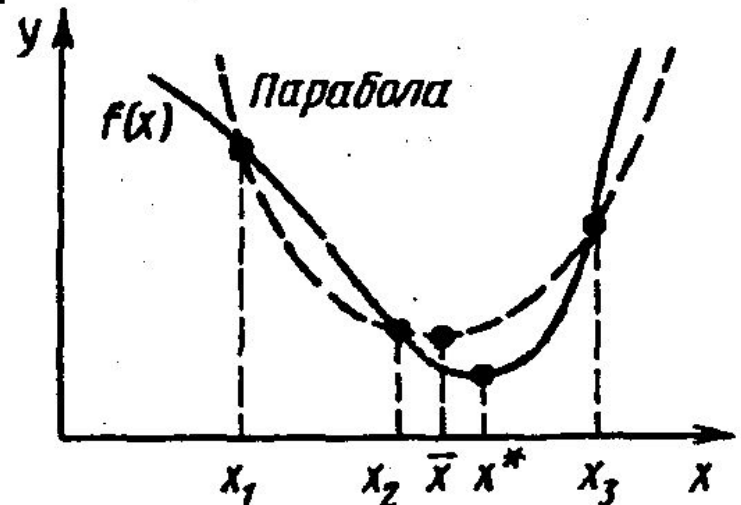
$$a_0 = f_1 \quad a_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$$

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2} \left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \right)$$

- очередное приближение

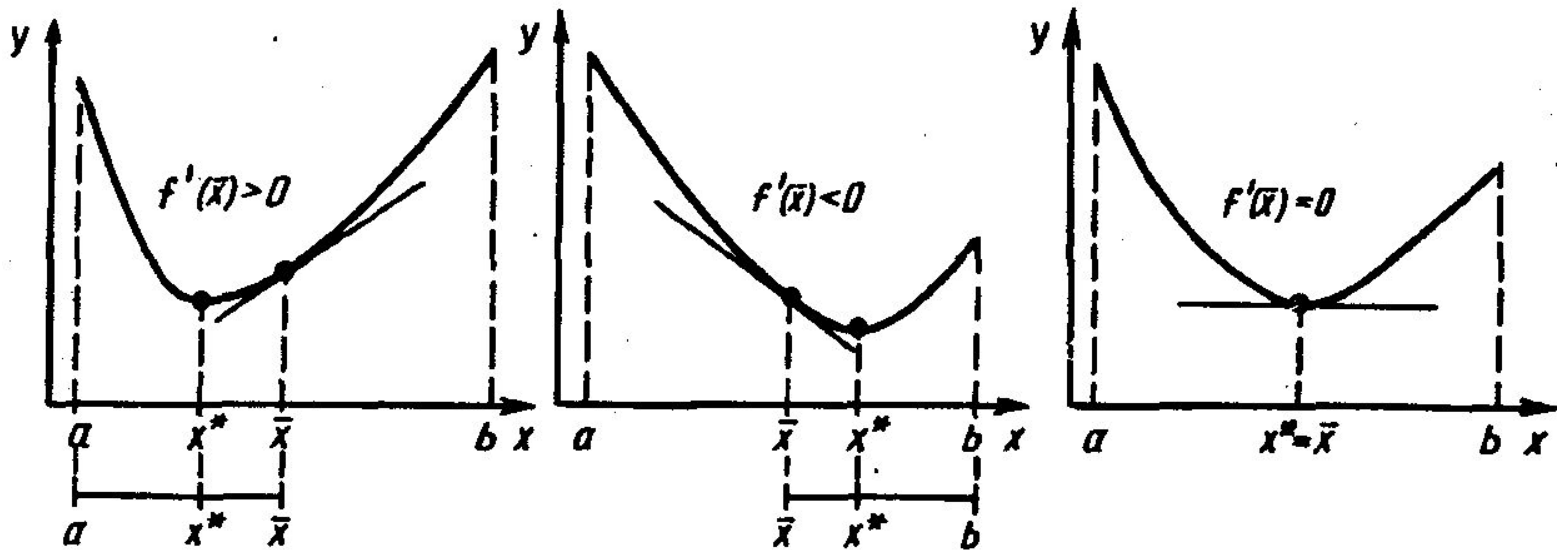
$$\bar{x} = \frac{1}{2} \left(x_1 - x_2 - \frac{a_1}{a_2} \right)$$

- Затем переходят к новому отрезку



Метод средней точки

- возможен только для функции, где берется первая производная.
- В этом случае вычисление значений функции можно заменить вычислением производной вблизи середины данного отрезка.
- Если $f'(x) > 0$, то точка середины лежит на участке возрастания \Rightarrow необходимо исследовать отрезок ax .

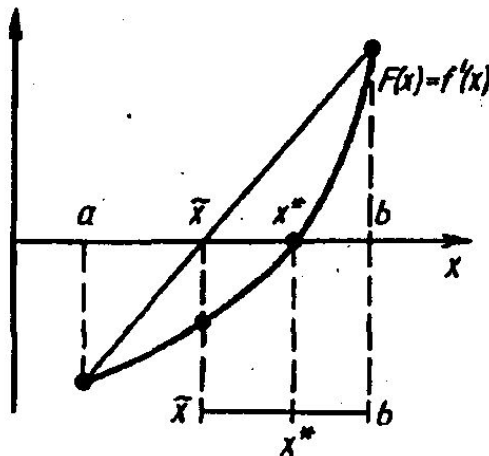


Метод Хорд

- Если на отрезке ab производная имеет разные знаки

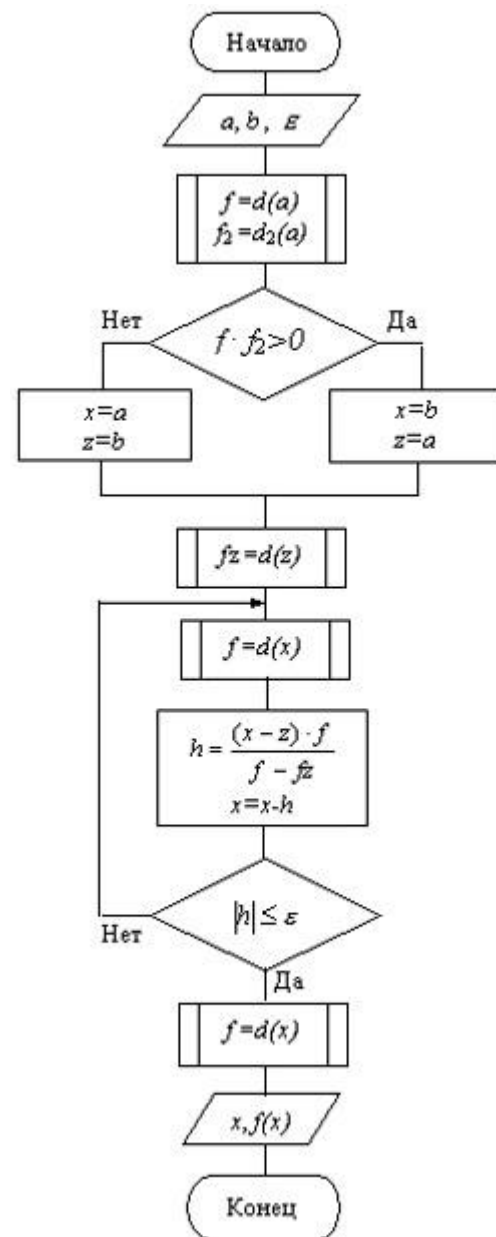
$$f'(a) \cdot f'(b) < 0$$

- то обязательно найдется точка экстремума

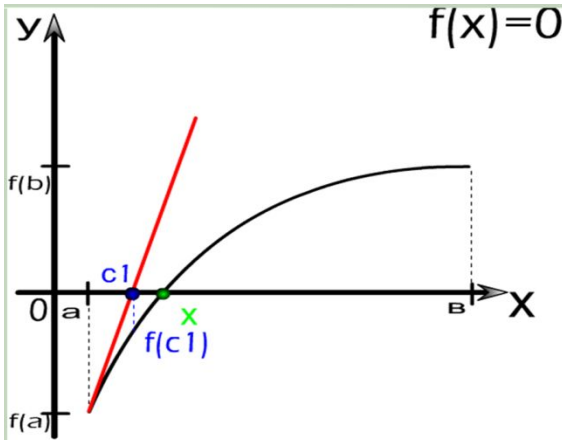


$$f'(x) = 0$$

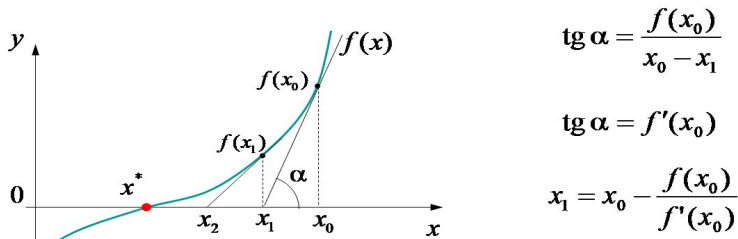
$$\tilde{x} = a - \frac{f'(a)}{f'(a) - f'(b)}(a - b)$$



Метод Ньютона



Вывод формулы метода Ньютона из геометрических построений



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

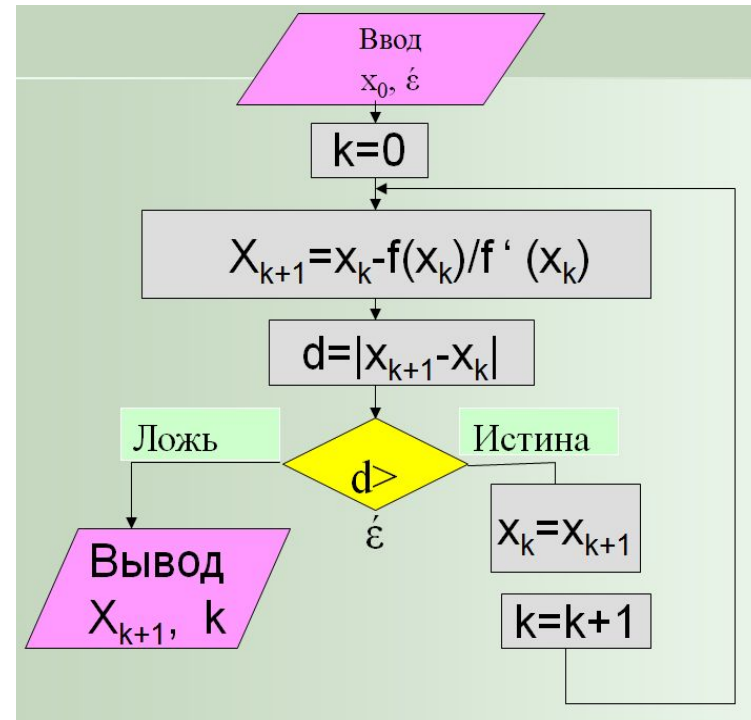
$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

! Общая формула метода Ньютона

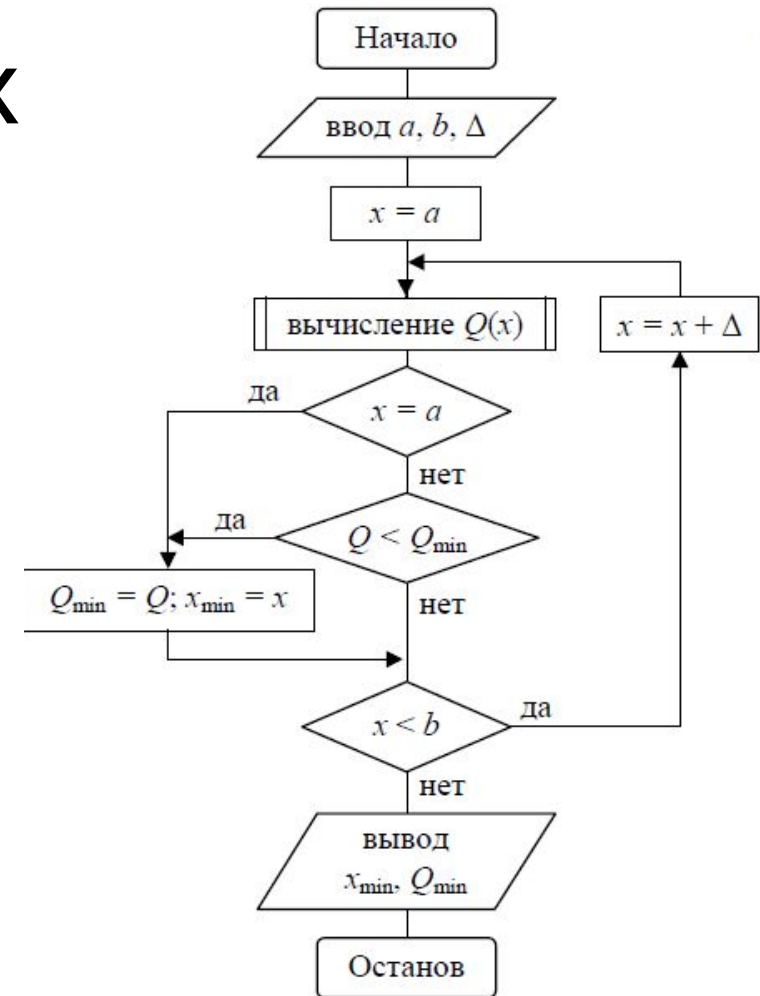
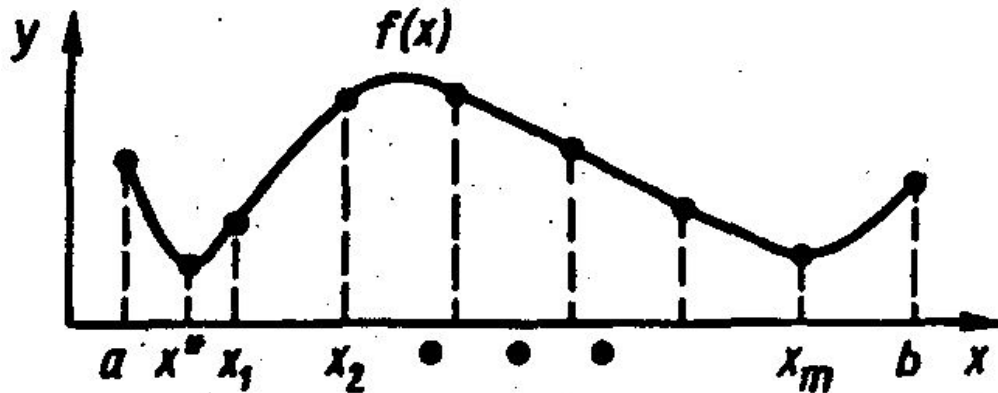
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- Функция должна быть дважды дифференцируемая, причем $f''(x) > 0$
- Корень уравнения ищут приближенно, используя метод касательных. В очередной точке строится линейная аппроксимация.
- Точка, в которой линейная аппроксимация обращается в 0, используется для следующего приближения.



Метод перебора (для многомодульных функций)

- Разбиение отрезков на равные части и проверка каждой из точек, т.е. расчет или сравнение производных



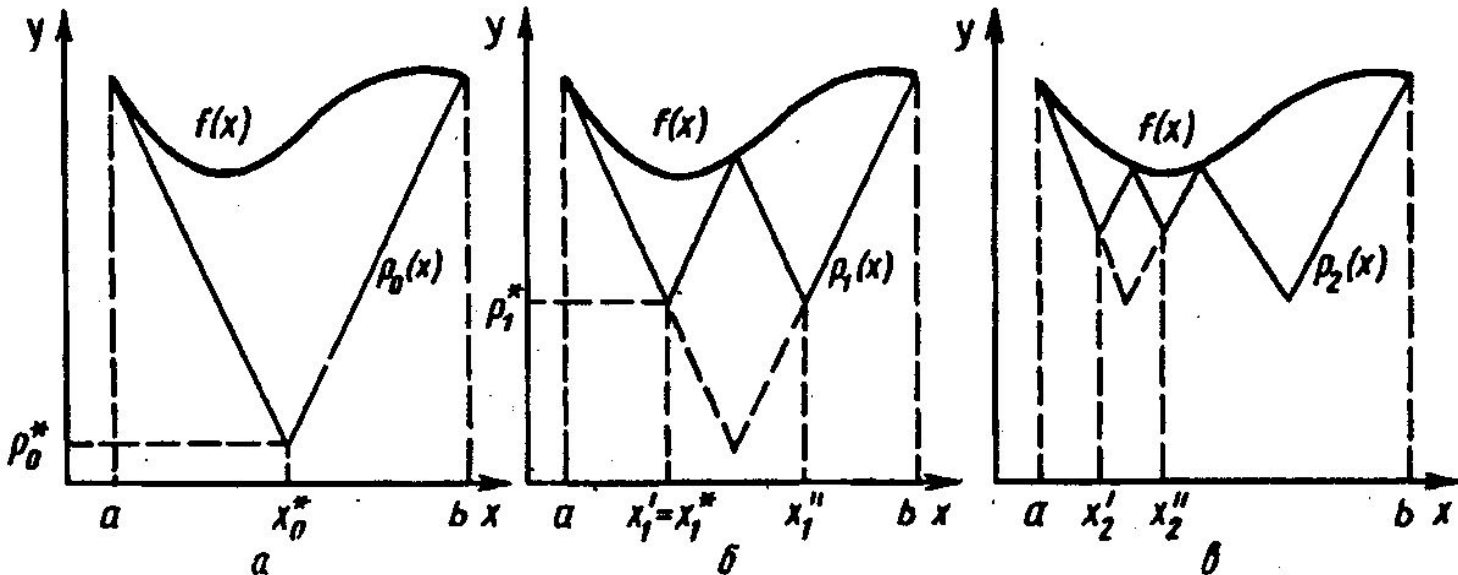
Метод ломаных линий

- Строят аппроксимирующие кусочно-линейные функции с параметрами:

$$P_0(x) = \begin{cases} f(a) - L(x-a) & x < x_0 \\ f(b) - L(x-b) & x > x_0 \end{cases} \quad \operatorname{tg} \alpha = L$$

$$x_0 = \frac{1}{2L} [f(a) - f(b) + L(a+b)]$$

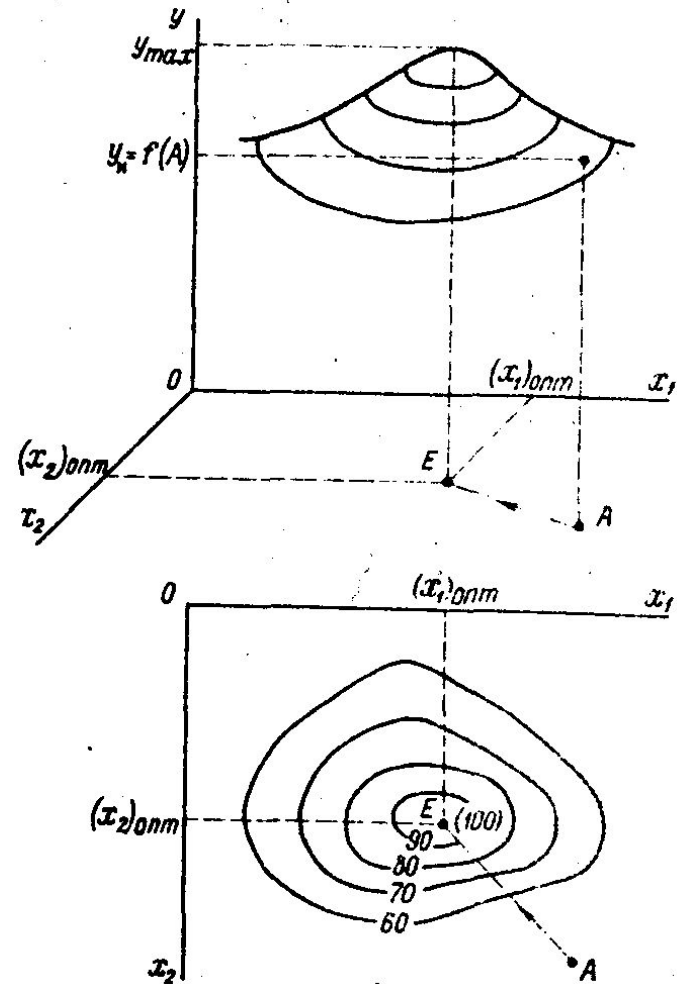
$$y_0 = \frac{1}{2} [f(a) + f(b) + L(a-b)]$$



Оптимизация многофакторных объектов

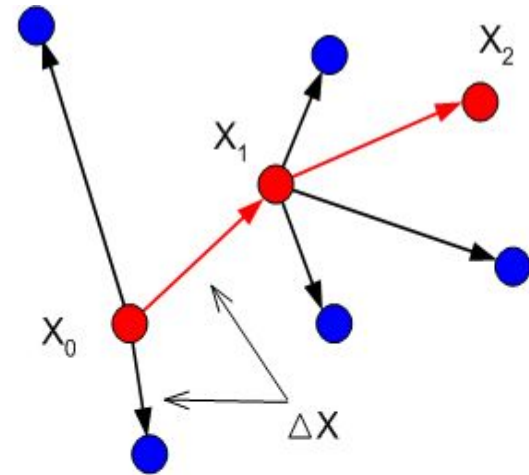
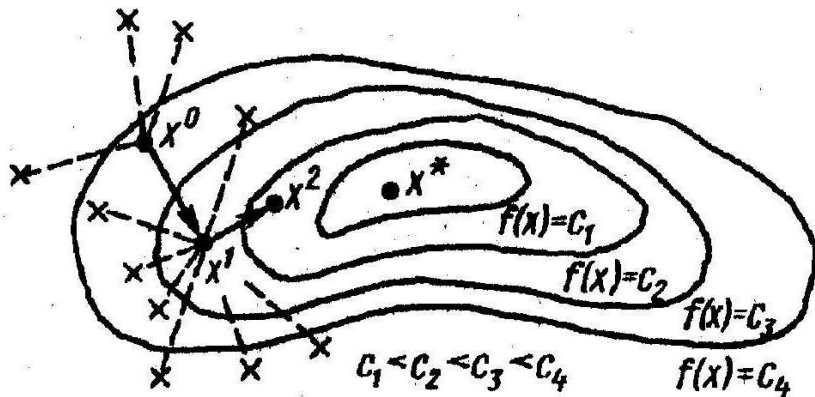
Графическая интерпретация задачи

- Принцип многофакторности отражает новый подход к эксперименту в задачах с многими факторами. При изучении объектов с несколькими факторами согласно этому принципу исследователю предлагается ставить опыты так, чтобы варьировать все факторы сразу в отличие от традиционного подхода, когда исследователь пытается изучать действие каждого фактора при поочередном варьировании.
- Организация эксперимента с применением многофакторных схем варьирования позволяет повысить точность оценок параметров подбираемых моделей для недетерминированных объектов, точнее оценить чувствительность выходной зависимой переменной объекта к вариации изучаемых входных независимых переменных.
- Размерность факторного пространства зависит от числа факторов. При многих факторах поверхность отклика уже нельзя изобразить наглядно и приходится ограничиваться только алгебраическим языком. Но для двух факторов можно даже не переходить к трехмерному пространству, а ограничиться плоскостью.



Метод случайного поиска

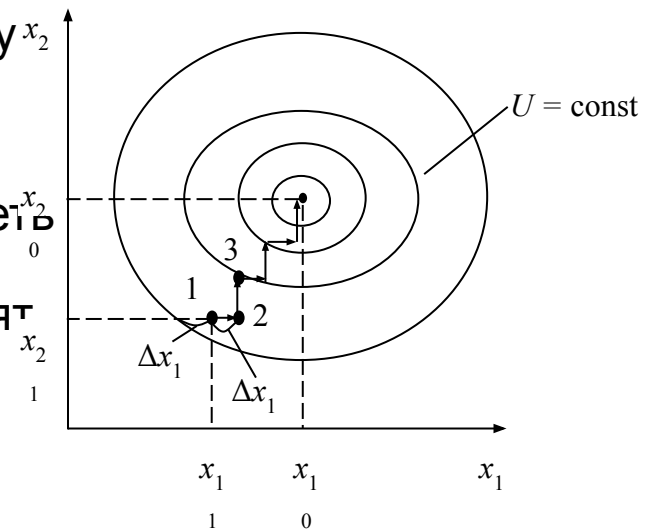
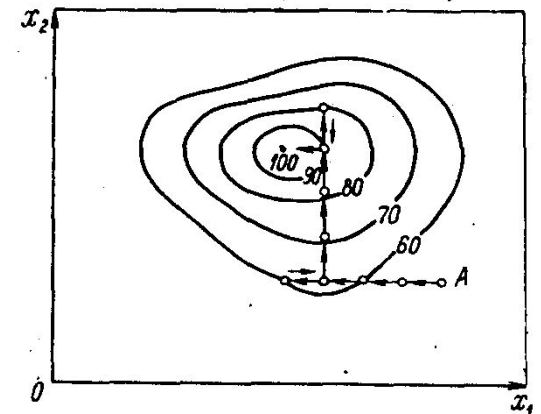
- Направление поиска не параллельно ни одной из осей.
- При достижении частного экстремума перемещение производится по другому частному направлению, причем если два последовательных шага улучшают значения выходного параметра, то шаг увеличивают в 1,618 раз.
- Если же m шагов, где $m = 3k$ (k – фактор), не дают улучшения, то шаг уменьшают в 0,618 раз.



- Точки, в которых было достигнуто улучшение целевой функции
- Точки, в которых значение целевой функции не улучшилось (ухудшилось или осталось прежним)

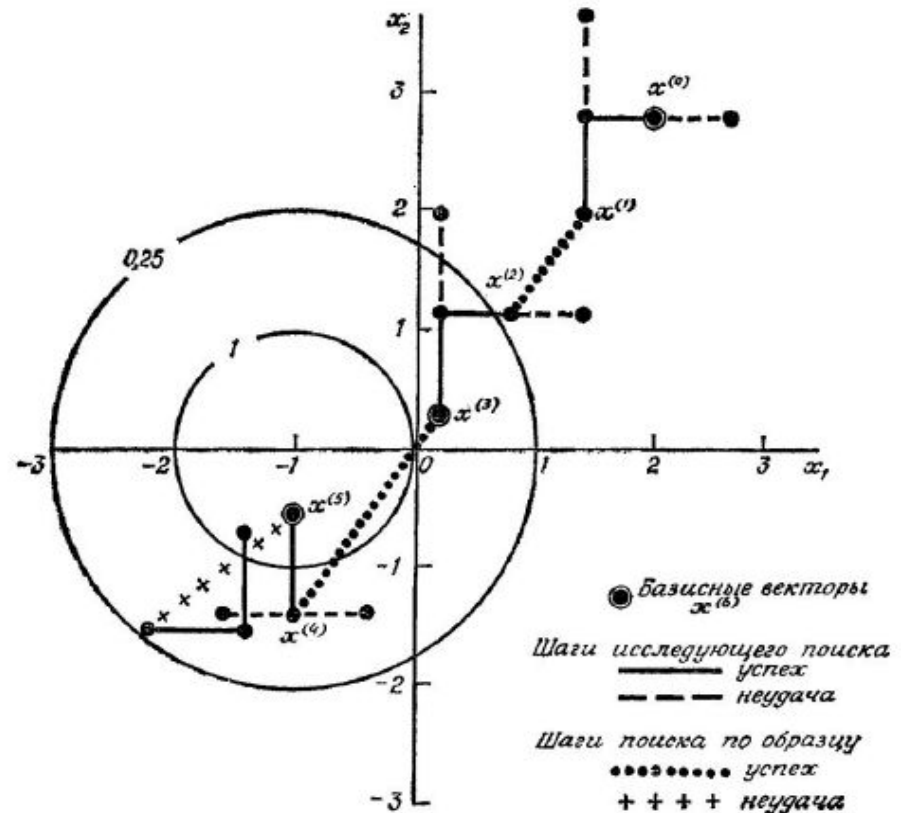
Метод Гаусса – Зейделя

- Суть метода заключается в эквивалентной замене общей многопараметрической задачи поиска экстремума критерия последовательностью однопараметрических задач поиска частных экстремумов.
- Метод осуществляется поочередным варьированием каждого фактора (при постоянстве остальных) до достижения частного экстремума. Затем производится поворот.
- В исходной точке фиксируют все координаты x , кроме одной. Этой координате x_i задают приращение в сторону ее увеличения и в сторону уменьшения и получают две точки. Вычисляют значение целевой функции f в этих точках и сравнивают между собой. Следующей исходной точкой будет та, для которой функция f будет иметь наибольшее значение.
- В случае двумерной целевой функции происходят последовательные вычисления и движения смещение по координате x_1 , затем по x_2 .



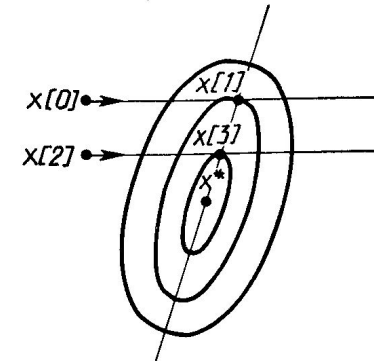
Метод Хука – Дживса

- Исследуют по координатный спуск в окрестностях данной точки и перемещаются в направлении убывания или возрастания.

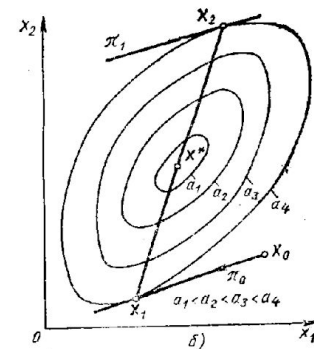


Метод сопряженных направлений

- Суть метода такова. Выбирается некоторая начальная точка $x[0]$ и выполняется одномерный поиск вдоль произвольного направления, приводящий в точку $x[1]$. Затем выбирается точка $x[2]$, не лежащая на прямой $x[0] - x[1]$, и осуществляется одномерный поиск вдоль прямой, параллельной $x[0] - x[1]$. Полученная в результате точка $x[3]$ вместе с точкой $x[1]$ определяет направление $x[1] - x[3]$ одномерного поиска, дающее точку экстремума x^* . В случае квадратичной функции n переменных оптимальное значение находится за n итераций. Поиск минимума при этом в конечном счете осуществляется во взаимно сопряженных направлениях. В случае неквадратичной целевой функции направления поиска оказываются сопряженными относительно матрицы Гессе.
- Алгоритм метода параллельных касательных состоит в следующем. Из точки X_0 к линии уровня (в точке X_1) строят касательную, затем параллельно этой прямой строят прямую π_1 и на ней точку X_2 , соответствующую точке касания π_1 и линии уровня. Местоположение центра определяется вдоль линии $X_1 X_2$.



$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$



Метод Ньютона

- Если функция дважды дифференцируема, то ее можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки x^k . Поэтому поведение описывается квадратичной функцией, т.е. сходимость быстрее, чем у метода grad. Этапы расчета следующие:
- В этом методе 1) определяется grad функции; 2) определяется матрица вторых производных и обратная к ней матрица. Необходимо найти точку минимума аппроксимирующей квадратичной функции:
$$x^{k+1} = x^k - [f''(x^k)]^{-1} \cdot f'(x^k)$$

Метод градиента

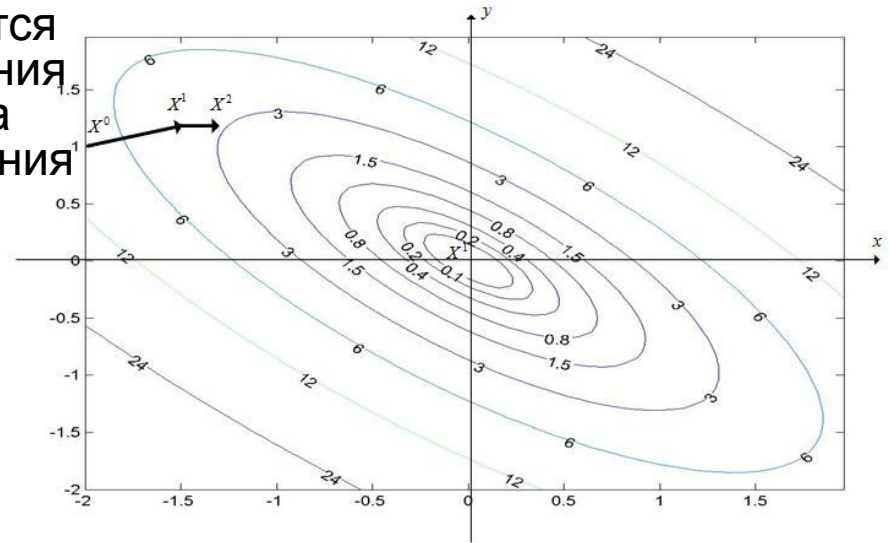
- При оптимизации движение совершается в направлении максимального изменения критерия, т.е. в направлении градиента целевой функции. Направление движения корректируется после каждой серии опытов. При этом находят градиент функции, равный:

$$\text{grad}(y(\bar{x})) = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} i + \frac{\partial y}{\partial x_2} j + \dots \right)$$

- После нахождения состава grad (коэффициента уравнения) выполняется шаг по направлению к экстремуму:

$$x_{n+1} = x_n + \rho \cdot \text{grad}(y(x_n))$$

- ρ – параметр шага
- Показателем выхода в область оптимума является малое значение grad, т. е. коэффициенты полинома близки к 0.

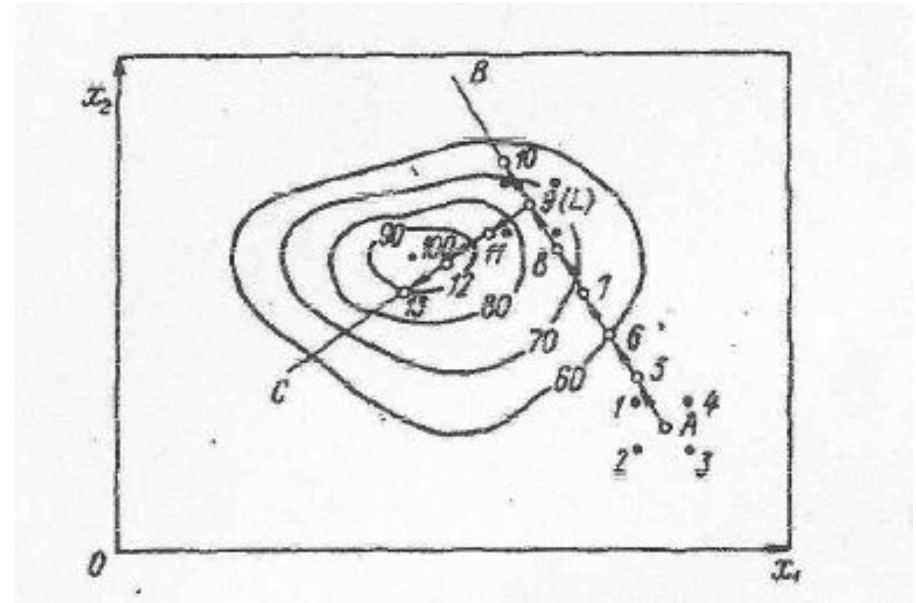


Фрагмент траектории поиска минимума функции градиентным методом с дроблением шага.

Метод крутого восхождения Бокса-Уилсона

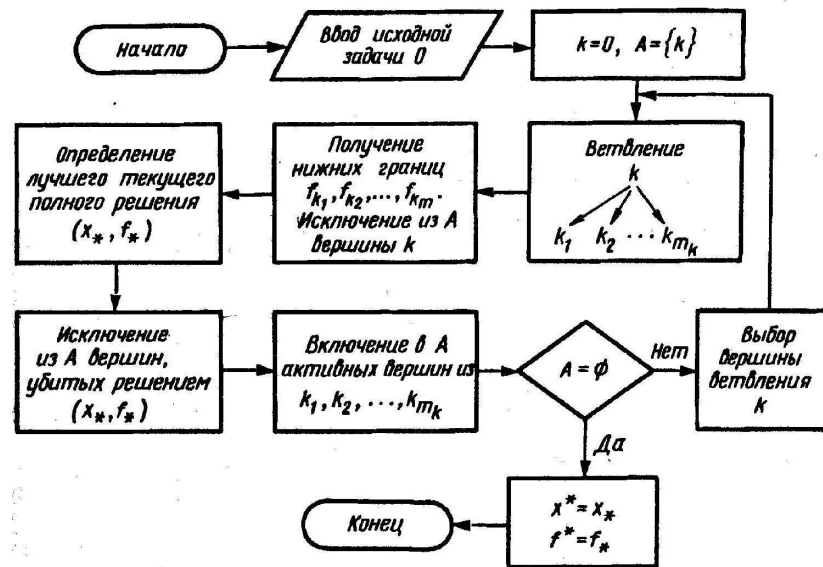
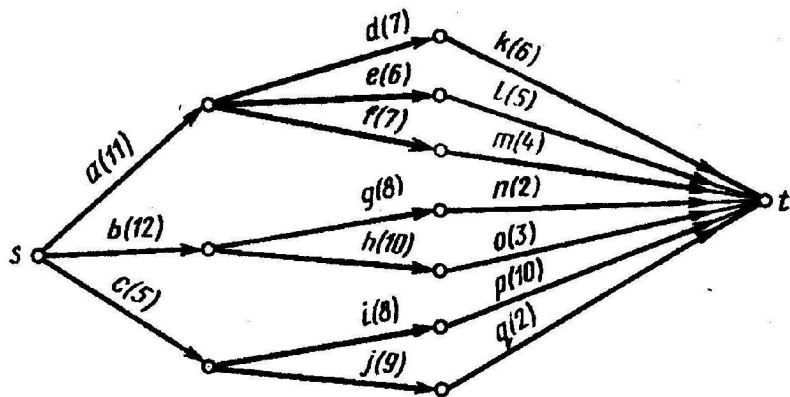
Крутое восхождение по поверхности отклика – ставят эксперимент для нахождения уравнения

- Находят базовый фактор
- По нему нормируют остальные шаги
- Производят так называемые «мысленные» опыты, которые заключаются в вычислении значений целевой функции в точке факторного пространства, лежащих на пути к экстремуму от исходной точки.



Некоторые из «мысленных» опытов (обычно через 2-5) реализуются для того, чтобы проверить соответствие аппроксимации процесса найденной зависимостью.

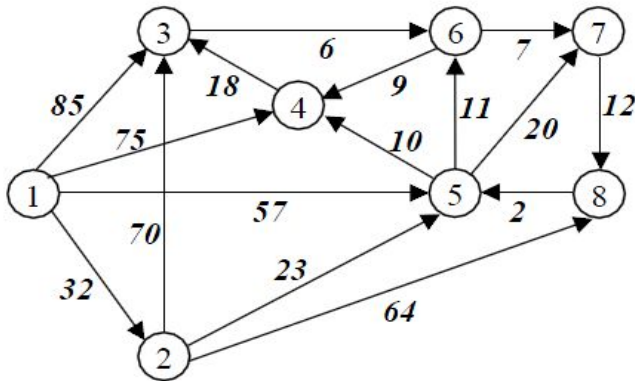
Метод ветвей и границ



- На каждом шаге метода элементы разбиения (подмножества) подвергаются анализу – содержит ли данное подмножество оптимальное решение или нет.
- Если рассматривается задача на минимум, то проверка осуществляется путем сравнения нижней оценки значения целевой функции на данном подмножестве с верхней оценкой функционала.
- Допустимое решение, дающее наименьшую верхнюю оценку, называют рекордом. Если оценка снизу целевой функции на данном подмножестве не меньше оценки сверху, то рассматриваемое подмножество не содержит решения лучше рекорда и может быть отброшено.
- Если значение целевой функции на очередном решении меньше рекордного, то происходит смена рекорда.
- Если просмотрены все элементы разбиения, алгоритм завершает работу, а текущий рекорд является оптимальным решением.
- В противном случае среди непросмотренных элементов разбиения выбирается множество, являющееся в определенном смысле перспективным. Оно подвергается разбиению (ветвлению).

Теория графов

- Найти кратчайшие пути в орграфе от первой вершины ко всем остальным, используя алгоритм Дейкстры. Постройте дерево кратчайших путей.



Вершинам графа присваиваются временные метки, которые затем по определенным правилам заменяются на постоянные метки. После этого из всех временных меток выбирается наименьшая, и она становится постоянной меткой. Действия продолжаются, пока не будут найдены постоянные метки для всех вершин графа. Результаты действий на каждом шаге будем заносить в таблицу. В предпоследний столбец заносим вершину, получившую постоянную метку, в последний столбец – величину этой метки (для данного шага). Кратчайшие пути найдены, их длина приведена в последних двух столбцах расчетной таблицы. Дерево кратчайших путей – **ребра** (1,2), (2,5), (5,4), (4,3), (5,6), (6,7), (7,8).

Шаги	Вершины								x_i	$L^*(x_i)$
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	x_1	0
2		32	85	75	57	∞	∞	∞	x_2	32
3			85	75	55	∞	∞	96	x_5	55
4			85	65		66	75	96	x_4	65
5			83			66	75	96	x_6	66
6			83				73	96	x_7	73
7			83					85	x_3	83
8								85	x_8	85

Графический метод решения задачи линейного программирования

$$x - 2y \rightarrow \min, \max$$

$$\begin{cases} 5x + 3y \geq 30, \\ x - y \leq 3, \\ -3x + 5y \leq 15, \end{cases}$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

РЕШЕНИЕ. Построим область допустимых решений задачи, ограниченную неравенствами

$$\begin{cases} 5x + 3y \geq 30, \\ x - y \leq 3, \\ -3x + 5y \leq 15, \end{cases}$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

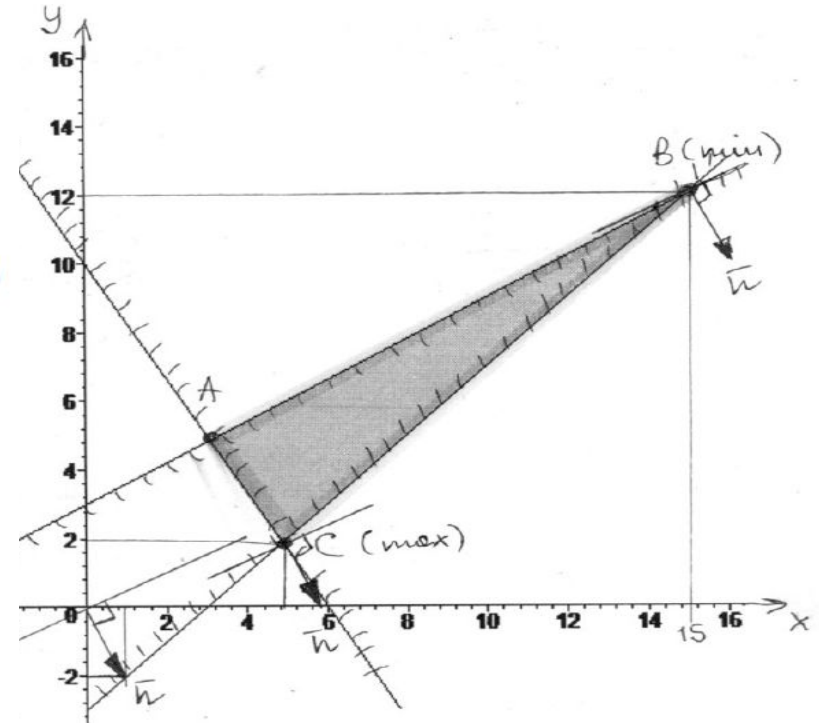
Строим прямые (по двум точкам каждую):

(I) $5x + 3y = 30$, точки (6, 0), (0, 10).

(II) $x - y = 3$, точки (3, 0), (6, 3).

(III) $-3x + 5y = 15$, точки (0, 3), (5, 6).

Штриховкой выделяем нужные полуплоскости, соответствующие знакам неравенств.



Симплексный метод решения ЗЛП

- **Симплекс-метод** - это итеративный процесс направленного решения системы уравнений по шагам, который начинается с опорного решения и в поисках лучшего варианта движется по угловым точкам области допустимого решения, улучшающих значение целевой функции до тех пор, пока целевая функция не достигнет оптимального значения.
- Составление первого опорного плана. Переход к канонической форме задачи линейного программирования путем введения неотрицательных дополнительных балансовых переменных.
- *Проверка плана на оптимальность*. Если найдется хотя бы один коэффициент индексной строки меньше нуля, то план не оптимальный, и его необходимо улучшить.
- *Определение ведущих столбца и строки*. Из отрицательных коэффициентов индексной строки выбирается наибольший по абсолютной величине. Затем элементы столбца свободных членов симплексной таблицы делит на элементы того же знака ведущего столбца.
- *Построение нового опорного плана*. Переход к новому плану осуществляется в результате пересчета симплексной таблицы методом Жордана—Гаусса.
- Построение симплекс-таблиц продолжается до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение.
- Движение к точке оптимума осуществляется путем перехода от одной угловой точки к соседней, которая ближе и быстрее приближает к X^* . Такую схему перебора

точке

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	min
x_3	20	5	2	1	0	20:5=4
x_4	6	1	1	0	1	6:1=6
F(X1)	0	-8	-5	0	0	0