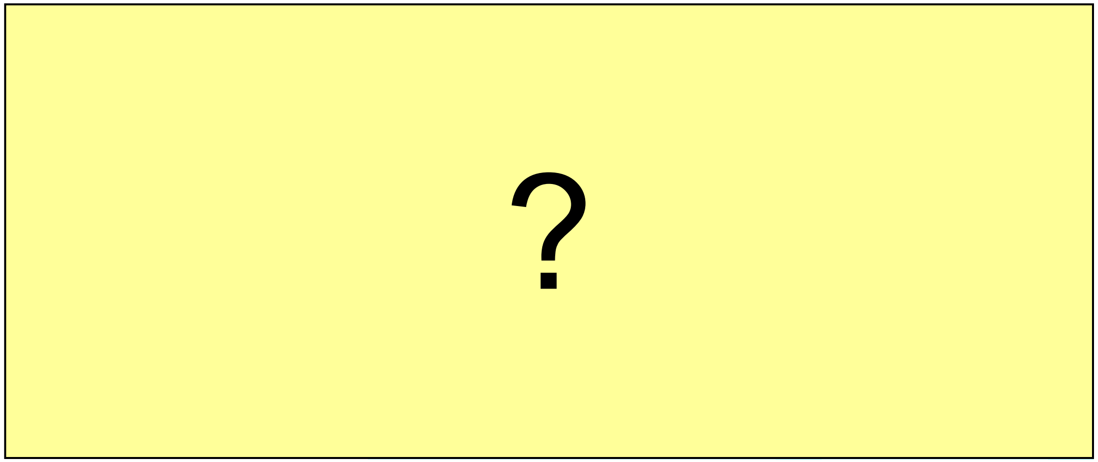
Введение в асимптотические методы. Лекция 11

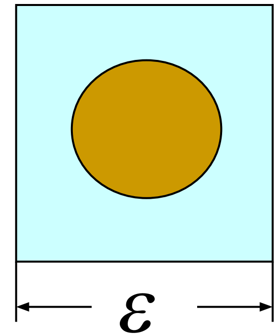
Метод гомогенизации

1. Что такое гомогенизация?

- Гомогенизация – математический метод позволяющий получать уравнения, описывающие исследуемые процессы на макроуровне из уравнений на микроуровне (“**upscaling**”). Дает
  - Структуру макроскопических уравнений и формулы для коэффициентов
  - Средства математически строгого доказательства сходимости решений микроскопических задач к решению макроскопической задачи.

2. Основная идея





$\varepsilon = 0.05$

Исходная задача

Семейство задач

$$\nabla \cdot k(x) \nabla p = 0 \xrightarrow[\text{вложение}]{} \begin{array}{c} \nabla \cdot k_{\varepsilon}(x) \nabla p_{\varepsilon} = 0 \\ k_{\varepsilon} = k(x/\varepsilon) \end{array} \xrightarrow[\text{Нахождение предела}]{} p_0$$

Работа метода гомогенизации состоит в отыскании диф. уравнения, которому удовлетворяет предел

$$p_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} p_{\varepsilon}$$

3. Первый пример: 1-D фильтрация.

$$\frac{d}{dx}k_{\varepsilon}(x)\frac{d}{dx}p_{\varepsilon}=0,\quad 0<x<1 \qquad k_{\varepsilon}=k(x/\varepsilon) \qquad (1)$$

$k(y)$ заданная периодическая функция с периодом 1

$$p_{\varepsilon}(0)=1,\quad p_{\varepsilon}(1)=0$$

(2) $$q_{\varepsilon}=-k_{\varepsilon}(x)\frac{dp_{\varepsilon}}{dx}=Const$$

$$q_{\varepsilon}\int_0^1\frac{dx}{k_{\varepsilon}(x)}=1 \quad (3)$$

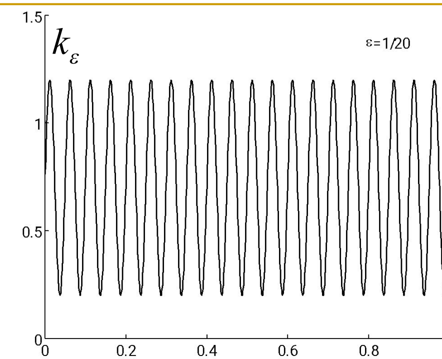
(4) $$\int_0^1\frac{dx}{k_{\varepsilon}(x)}=\varepsilon\int_0^{1/\varepsilon}\frac{dy}{k(y)}=\int_0^1\frac{dy}{k(y)}+O(\varepsilon)$$

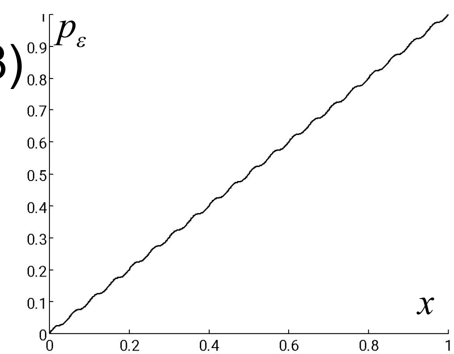
(5) $$q_{\varepsilon}=k_{harm}=\left(\int_0^1\frac{dy}{k(y)}\right)^{-1}$$

(6) $$p_{\varepsilon}=p_0(x)+\varepsilon p_1(x/\varepsilon)$$

$$q_{\varepsilon}\to q_0,\qquad p_{\varepsilon}\to p_0,\qquad q_0=-k_{harm}\frac{dp_0}{dx} \quad (8)$$

(7) $$p_0=1-x,\quad p_1(y)=-\varepsilon\int_0^y\left(\frac{k_{harm}}{k(y)}-1\right)dy$$





4. Первый пример: результаты.

- Рассмотренная техника обладает всеми основными признаками метода гомогенизации.
  - Мы доказали существование пределов для потока и давления (а именно макроскопических потока и давления) при $\varepsilon \to 0$
  - Мы нашли, что макро-поток и макро-давление связаны между собой тем же соотношением, что микроскопические характеристики, но проницаемость (эффективная проницаемость) является константой на макроуровне
  - Мы подсчитали эффективную проницаемость (оказавшуюся равной гармоническому среднему)
  - Мы определили вид микроскопического давления как сумму тренда (макроскопического давления) и малого периодически осциллирующего члена. Эта структура является общей в методе гомогенизации.

5. Пример: Слоистая среда

$$\nabla \cdot k_{\varepsilon}(x)\nabla p_{\varepsilon} = 0, \quad 0 < x_1, x_2 < 1 \qquad k_{\varepsilon}(x_1, x_2) = k(x_2/\varepsilon)$$

$k(y)$ заданная периодическая функция с периодом 1

Ожидается, что среда может быть описана в среднем как

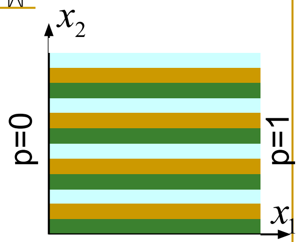
$$\nabla \cdot K\nabla p_0 = 0, \text{ (1)} \quad K = \begin{pmatrix} k_{\parallel} & 0 \\ 0 & k_{\perp} \end{pmatrix} \text{ (2)}$$

Задача для $k_{\parallel}$

(3)

$$p_{\varepsilon}(0, x_2) = 0, \; p_{\varepsilon}(1, x_2) = 1$$

$$\frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_2}(x_1, 0) = \frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_2}(x_1, 1) = 0$$



$$p_{\varepsilon}(x_1, x_2) = x_1, \qquad \vec{q}_{\varepsilon} = -k_{\varepsilon}\nabla p_{\varepsilon} = -k_{\varepsilon}\vec{e}_1$$

$$Q_1 = \int_0^1 q_{\varepsilon,1}dx_2 = -\int_0^1 k_{\varepsilon}(x_2)dx_2 = -\int_0^1 k(y)dy$$

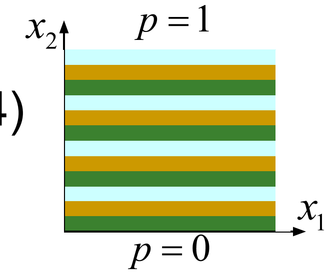
$$Q_1 = -k_{arith}\frac{\partial p_0}{\partial x_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_{\parallel} = k_{arith}}$$

Задача для $k_{\perp}$

(4)

$$p_{\varepsilon}(x_1, 0) = 0, \; p_{\varepsilon}(x_1, 1) = 1$$

$$\frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_1}(0, x_2) = \frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_1}(1, x_2) = 0$$



$$p_{\varepsilon}(x_1, x_2) = x_2 + \varepsilon p_1(x_2/\varepsilon), \qquad \vec{q}_{\varepsilon} = -k_{harm}\vec{e}_2$$

$$Q_2 = \int_0^1 q_{\varepsilon,2}dx_1 = -k_{harm}$$

$$Q_2 = -k_{geom}\frac{\partial p_0}{\partial x_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_{\perp} = k_{harm}}$$

6. Пример: Слоистая среда

- Почему результаты верны?
  - Мы верно <u>угадали</u> вид макроскопического уравнения
  - Мы верно <u>угадали</u> вид задач (задачи на ячейке в теории гомогенизации) которые нужно решить для вычисления эффективных параметров среды
- Но что мы будем делать в случае более сложной среды или более сложных микроскопических уравнений?

  Мы нуждаемся в математической процедуре
  - <u>Вывода</u> макроскопических уравнений
  - <u>Вывода</u> задач на ячейке которые нужно решить для вычисления эффективных параметров среды

Искомая процедура по существу **есть** адаптированный к рассматриваемой задаче **метод многих масштабов**

7. Асимптотическое разложение: 1ый Шаг

$$\nabla \cdot k_{\varepsilon}(x)\nabla p_{\varepsilon} + f(x) = 0, \qquad k_{\varepsilon}(x) = k(x/\varepsilon) \qquad (1)$$

$k(y)$ периодическая функция с ячейкой $Y = \{0 < y_i < 1,\ i = 1,\ldots\ n\}$

Формальное 2-масштабное асимпт. разложение

$$p_{\varepsilon} = p_0(x,y) + \varepsilon\, p_1(x,y) + \varepsilon^2 p_2(x,y) + \ldots \qquad (2)$$

<u>медленная к-та</u>

где $p_i(x,y)$ есть Y-периодична по отношению к $y = x/\varepsilon$

<u>быстрая к-та</u>

$$\nabla = \nabla_x + \frac{1}{\varepsilon}\nabla_y$$ - дифф-ие сложной функции (3)

(4)

$$\left[\begin{array}{l}
\varepsilon^{-2}\nabla_y \cdot \left(k(y)\nabla_y p_0\right) + \\
\varepsilon^{-1}\left(\nabla_y \cdot \left(k(y)\nabla_y p_1\right) + \nabla_y \cdot \left(k(y)\nabla_x p_0\right) + k(y)\nabla_x \cdot \nabla_y p_0\right) + \\
\varepsilon^{0}\left(\nabla_y \cdot \left(k(y)\nabla_y p_2\right) + \nabla_y \cdot \left(k(y)\nabla_x p_1\right) + k(y)\nabla_x \cdot \nabla_y p_1 + k(y)\nabla_x \cdot \nabla_x p_0\right) + \\
\varepsilon^{1}\left(\square\ \right) + \ldots\ + f = 0
\end{array}\right.$$

8. Асимптотическое разложение: 2ой Шаг

Члены при ε^{-2} дают

$$\boxed{(1)\quad \nabla_y \cdot \left(k(y) \nabla_y p_0(x, y) \right) = 0 \quad \text{+ Y-периодичность}}$$

параметр y-задачи

$$\boxed{\text{Периодическое решение задачи } \nabla_y \cdot \left(k(y) \nabla_y p(y) \right) = 0 \text{ есть } \quad p = Const}$$

1-D :

$$(2)\quad \frac{dp}{dy} = \frac{C}{k(y)} \quad \Rightarrow \quad C \underbrace{\int_0^1 k^{-1}(y)\, dy}_{>0 \text{ в силу положительности } k} = \underbrace{p(1) - p(0)}_{0 \text{ в силу периодичности}} \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

$$\frac{dp}{dy} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = Const$$

$$\boxed{p_0 = p_0(x)}$$

!!!

9. Асимптотическое разложение: 3ий Шаг

Члены при ε^{-1} дают

$$\nabla_y \cdot \left(k(y)\nabla_y p_1\right) + \nabla_y \cdot \left(k(y)\nabla_x p_0\right) + \cancel{k(y)\nabla_x \cdot \nabla_y p_0} = 0$$

$$-\nabla_y \cdot \left(k(y)\nabla_y p_1\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial k(y)}{\partial y_i}\frac{\partial p_0(x)}{\partial x_i} \qquad (1)$$

Задача для p_1 линейна и $\partial p_0 / \partial x_1$ не зависят от y

$$p_1 = \sum_{i=1}^{n} N_i(y)\frac{\partial p_0(x)}{\partial x_i}$$

Задачи на ячейке

$$\boxed{-\nabla_y \cdot \left(k(y)\nabla_y N_i\right) = \frac{\partial k(y)}{\partial y_i} \quad i = 1,\ldots\ n}$$

!!!

10. Асимптотическое разложение: 4ый Шаг

Члены при ε^0 дают

(1) $\nabla_y \cdot \left(k(y)\nabla_y p_2\right) = -\nabla_y \cdot \left(k(y)\nabla_x p_1\right) - k(y)\nabla_x \cdot \nabla_y p_1 - k(y)\nabla_x \cdot \nabla_x p_0 - f(x)$

Разрешимость уравнения

(2) $$\cancel{\int_Y \nabla_y \cdot \left(k(y)\nabla_y p_2\right) dy} = -\cancel{\int_Y \nabla_y \cdot \left(k(y)\nabla_x p_1\right) dy} - \int_Y k(y)\nabla_x \cdot \nabla_y p_1 \, dy$$

$$-\int_Y k(y)\nabla_x \cdot \nabla_x p_0 \, dy - \int_Y f(x) dy$$

$$\sum_{i=1}^{n} N_i(y)\frac{\partial p_0(x)}{\partial x_i}$$

(3) Если $\varphi(y)$ Y-периодична то $\int_Y \nabla_y \varphi(y)\, dy = 0$

(4) Д-во: $\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} dy_1 dy_2 = \int_0^1 \left(\varphi(1, y_2) - \varphi(0, y_2)\right) dy_2 = 0$

Макроскопическое уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\frac{\partial^2 p_0(x)}{\partial x_i \partial x_j} + f(x) = 0, \quad k_{ij} = \int_Y k(y)\left(\delta_{ij} + \frac{\partial N_j}{\partial y_i}\right) dy$$

!!!

11. Асимптотическое разложение: Результат

	Балансовое ур-е	Реология
Микроскопическая модель:	$\nabla \cdot \vec{q}_\varepsilon = f,$	$\vec{q}_\varepsilon = -k_\varepsilon(x)\nabla p_\varepsilon$
Макроскопическая модель:	$\nabla \cdot \vec{q}_0 = f,$	$\vec{q}_0 = -K\nabla p_0, \quad K = \{k_{ij}\}$

?

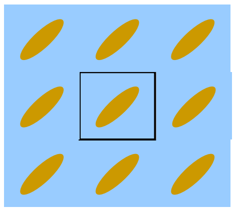
$$\vec{q}(x,y) = -k(y)\left(\varepsilon^{-1}\nabla_y + \nabla_x\right)\left(p_0(x) + \varepsilon p_1(x,y) + \dots\right) =$$

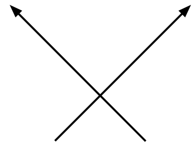
$$-k(y)\left(\nabla_x p_0 + \nabla_y p_1\right) + O(\varepsilon) = -k(y)\left(\nabla_x p_0 + \nabla_y\left(\vec{N}(y)\cdot\nabla_x p_0\right)\right) + O(\varepsilon)$$

$$\vec{q}_0(x) = \int_Y \vec{q}(x,y)\,dy + O(\varepsilon)$$

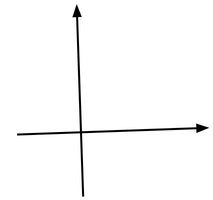
12. Эффективные коэф-ты : общие свойства

- Тензор эффективной проницаемости не обязательно диагонален





Диагонален здесь



Но не здесь

(1)

- Тензор K симметричен

Задача на ячейке

$$(2)\; k_{ij} - k_{arith}\delta_{ij} = \int_Y k\frac{\partial N_i}{\partial y_j}dy = -\int_Y N_i\frac{\partial k}{\partial y_j}dy = \int_Y N_i\nabla_y\left(k(y)\nabla_y N_j\right)dy = -\int_Y k(y)\left(\nabla_y N_i\cdot\nabla_y N_j\right)dy$$

$$=$$

- Тензор K положительно определен

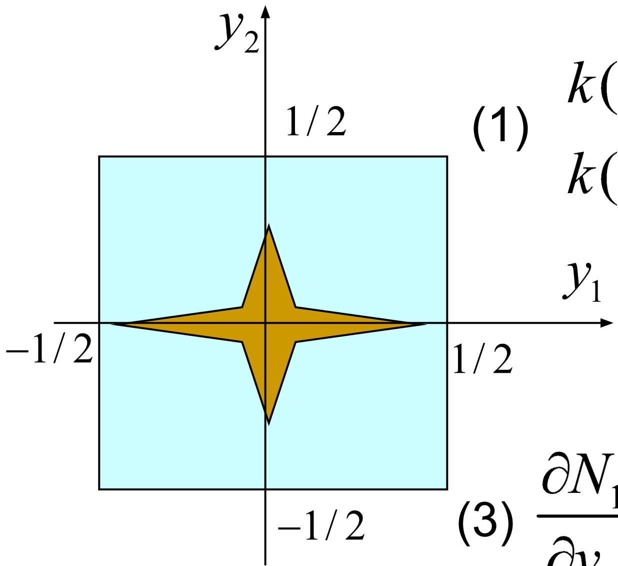
$$\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}\xi_i\xi_j > 0 \quad \forall\vec{\xi}\neq 0$$

$$k_{ij} = \int_Y k(y)\left(\nabla_y N_i + \vec{e}_i\right)\cdot\vec{e}_j dy = \int_Y k(y)\left(\nabla_y N_i + \vec{e}_i\right)\cdot\left(\nabla_y N_j + \vec{e}_j\right)dy$$

- Справедлива оценка $k_{harm} \le K \le k_{arith}$

$$k_{harm}\left|\xi\right|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}\xi_i\xi_j \le k_{arith}\left|\xi\right|^2$$

13 Эффективные к-ты : наша интуиция в порядке.



(1) $$k(-y_1, y_2) = k(y_1, y_2)$$
$$k(y_1, -y_2) = k(y_1, y_2)$$

$$-\nabla_y k(y) \nabla_y N_1(y) = \frac{\partial k(y)}{\partial y_1}$$

(2) $$N_1(-y_1, y_2) = -N_1(y_1, y_2)$$
$$N_1(y_1, -y_2) = N_1(y_1, y_2)$$

(3) $$\frac{\partial N_1}{\partial y_2}(-y_1, y_2) = -\frac{\partial N_1}{\partial y_2}(y_1, y_2)$$

(4) $$k_{12} = \int_Y k(y) \frac{\partial N_1(y)}{\partial y_2} = 0$$

(5) $$N_1(-1/2, y_2) = -N_1(1/2, y_2)$$

(6) $$N_1(-1/2, y_2) = N_1(1/2, y_2)$$

(7) $$N_1\big|_{y_1=-1/2} = N_1\big|_{y_1=-1/2} = 0$$

(8) $$\left.\frac{\partial N_1}{\partial y_2}\right|_{y_2=-1/2} = \left.\frac{\partial N_1}{\partial y_2}\right|_{y_2=1/2} = 0$$

$$M_1 = y_1 + N_1(y)$$

$$-\nabla_y k(y) \nabla_y M_1(y) = 0$$

$$k_{11} = \int_Y k(y) \frac{\partial M_1}{\partial y_1} dy$$