Начертательная геометрия

ЛЕКЦИЯ №4

Поверхности

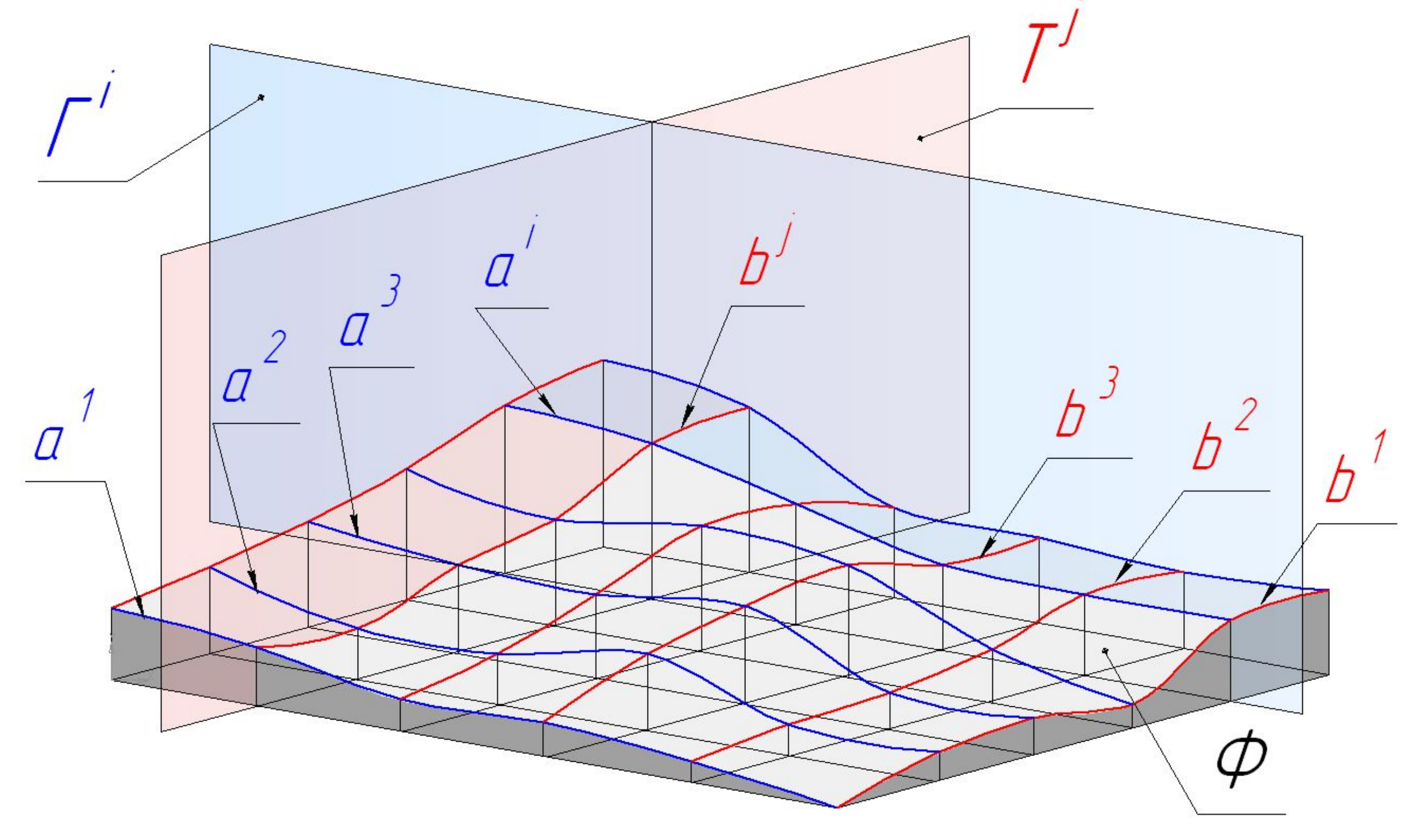
Поверхность представляет собой множество последовательных положений линии, перемещающейся в пространстве.

Эту линию называют *образующей поверхности*.

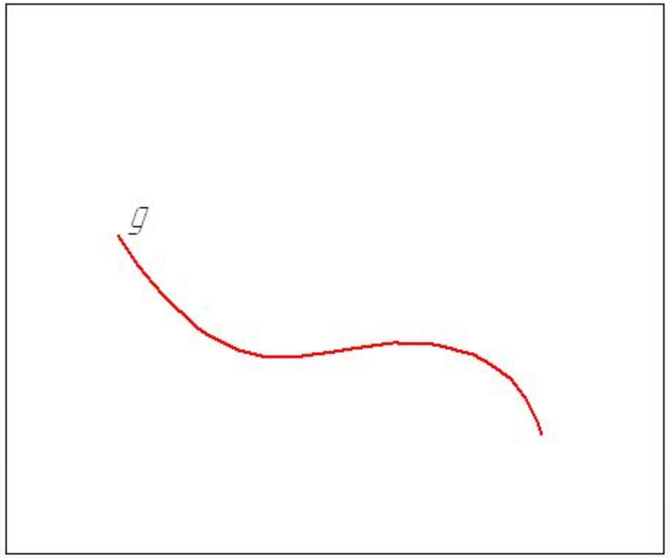
<u>**Существует три способа задания поверхности:**</u>

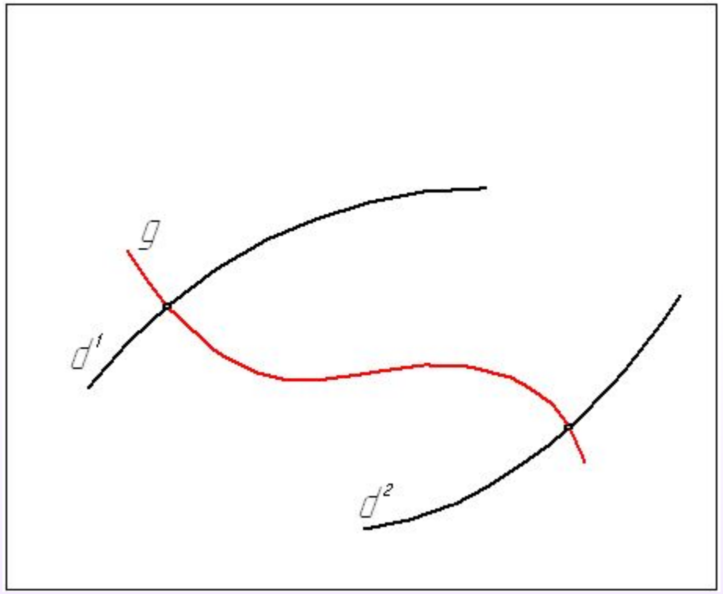
1. ***Аналитический*** – поверхность задается уравнением;

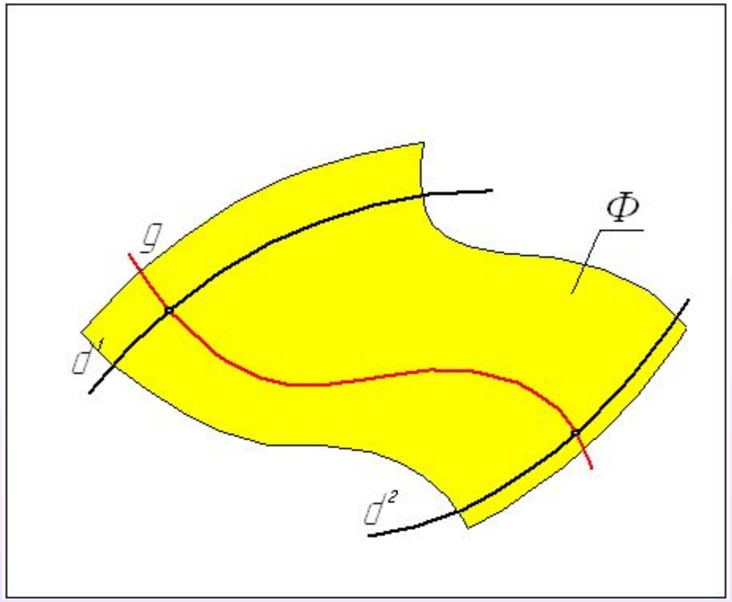
2. Каркасный – поверхность задается совокупностью точек и линий;



3. *Кинематический* – поверхность рассматривается как совокупность последовательных положений некоторой линии - *образующей*, которая перемещается в пространстве по определенному закону. Закон перемещения образующей может быть задан тоже линиями, но иного направления. Эти линии называют *направляющими.*







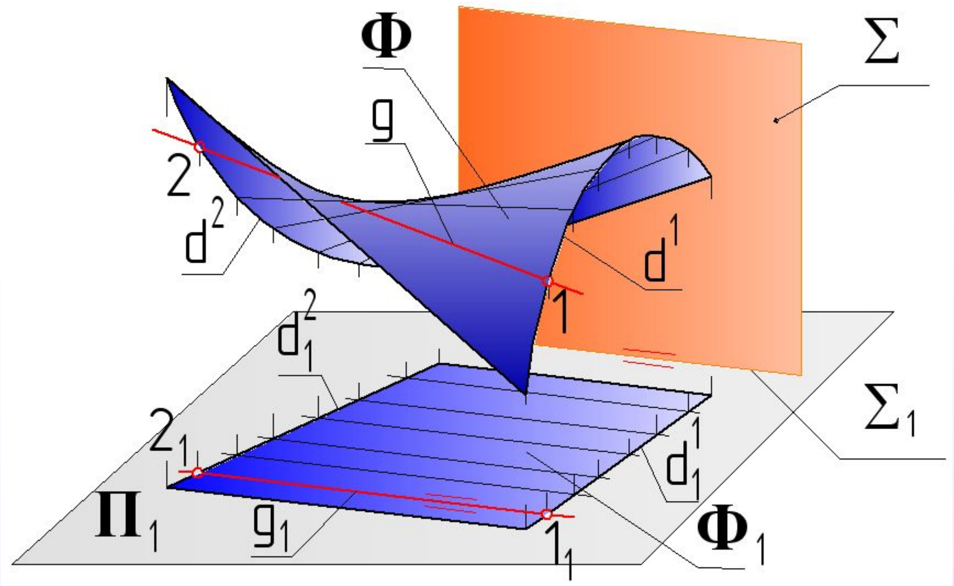
- g – образующая поверхности;
- d – направляющая поверхности.

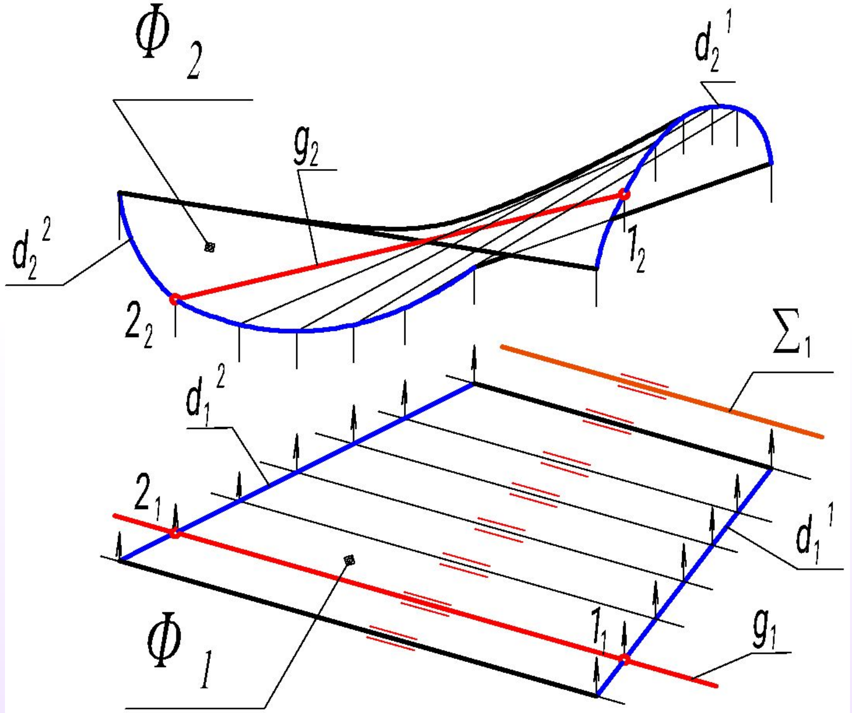
Ф - прямой цилиндроид (группа поверхностей Каталана),

g – образующая (прямая линия),

d^1, d^2 – направляющие,

Σ – направляющая плоскость (плоскость параллелизма)





Определитель поверхности

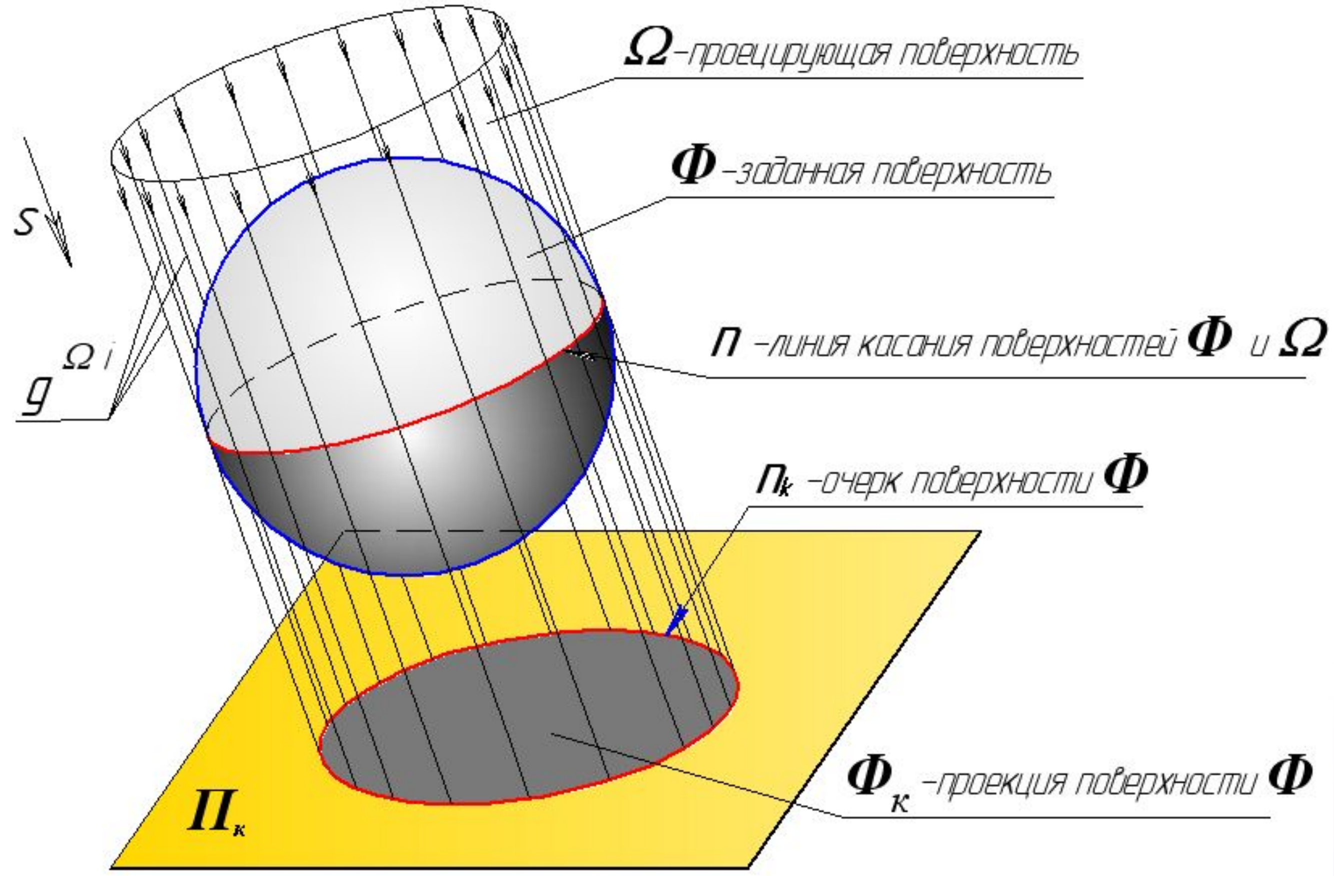
Это совокупность независимых условий, однозначно задающих поверхность.

Определитель состоит из двух частей:

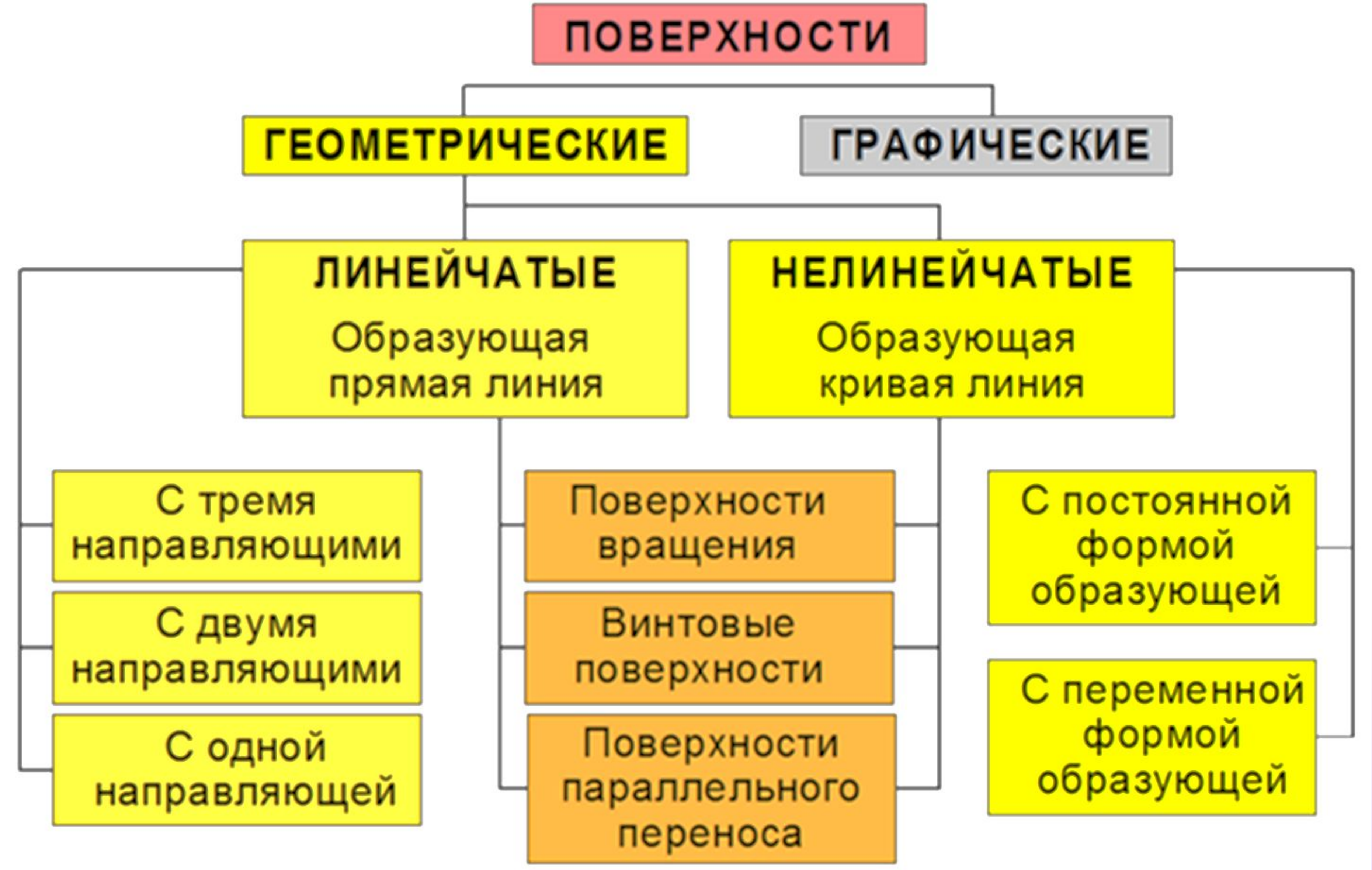
Геометрическая **(Г)** - геометрические фигуры - образующая и другие точки, линии, поверхности, участвующие в образовании поверхности.
Алгоритмическая **(А)** – закон перемещения и изменения формы образующей.

Ф{(Г)(А)}

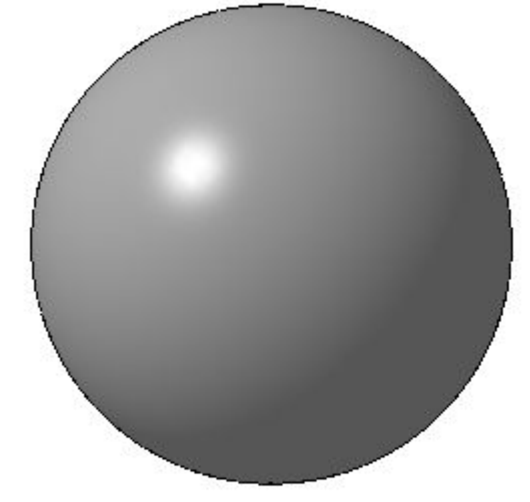
Очерк поверхности



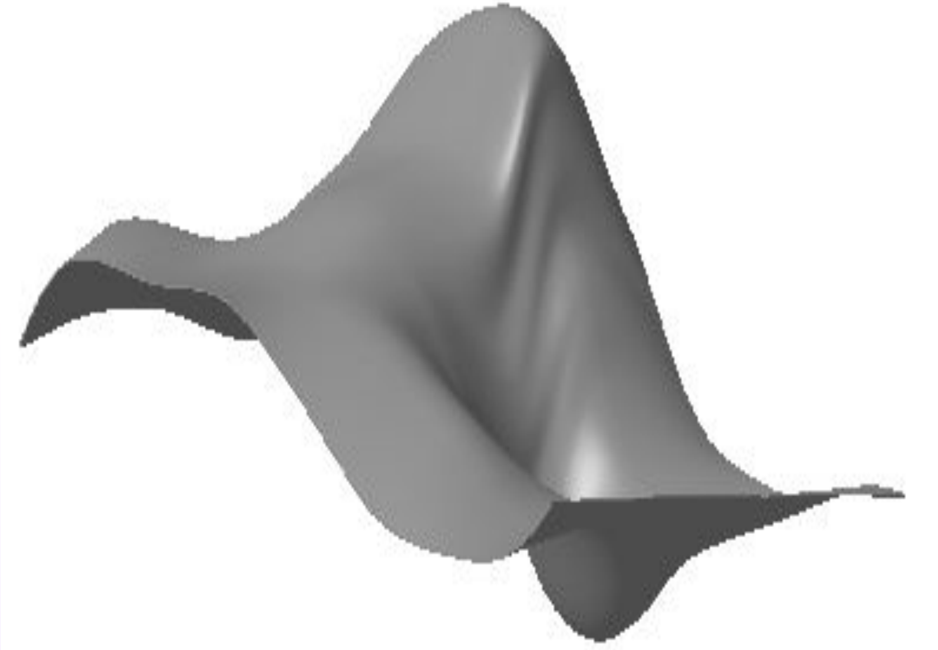
<u>Очерк поверхности</u> – это *линия пересечения* плоскости проекций с проецирующей поверхностью, касательной к заданной поверхности и ее охватывающей.


ПОВЕРХНОСТИ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ
ГРАФИЧЕСКИЕ
ЛИНЕЙЧАТЫЕ
Образующая прямая линия
НЕЛИНЕЙЧАТЫЕ
Образующая кривая линия
С тремя направляющими
С двумя направляющими
С одной направляющей
Поверхности вращения
Винтовые поверхности
Поверхности параллельного переноса
С постоянной формой образующей
С переменной формой образующей

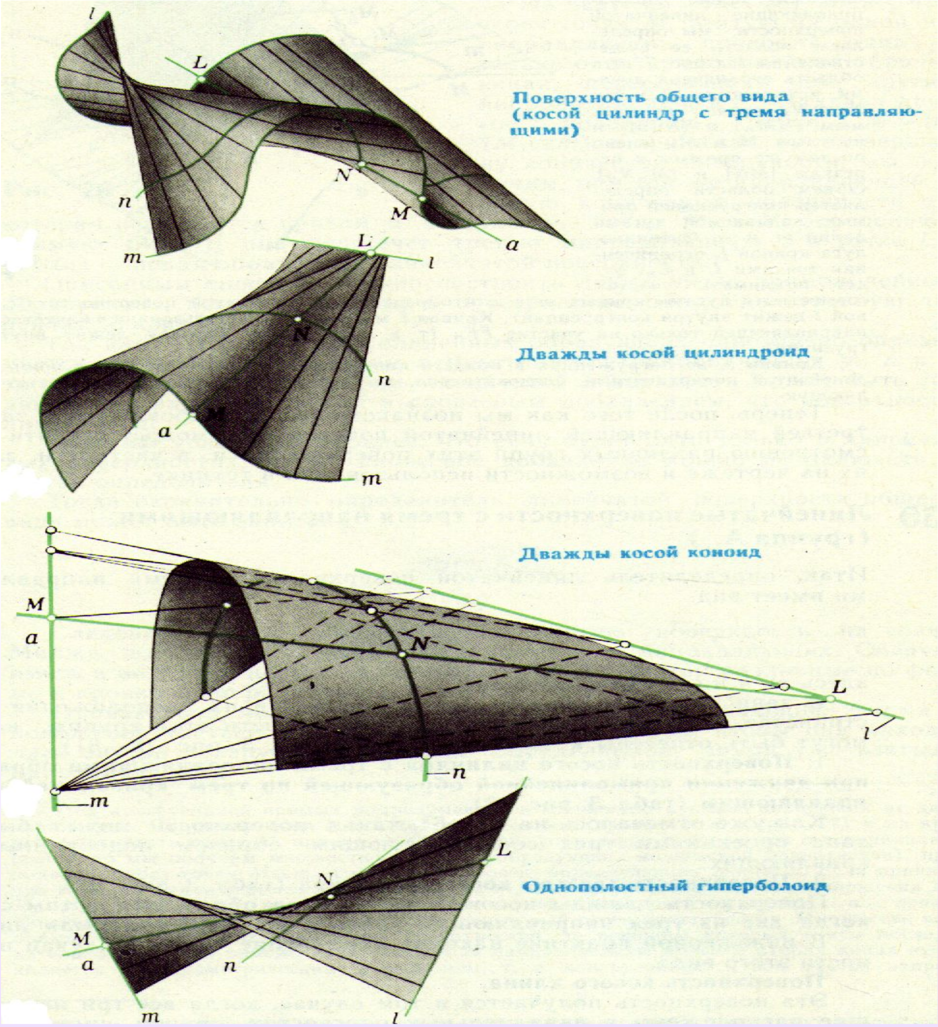
Геометрическая поверхность

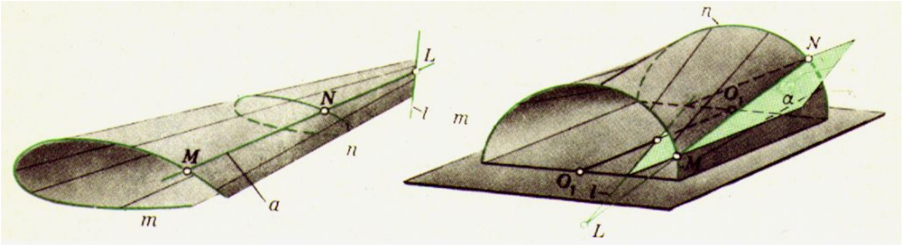


Графическая поверхность



Линейчатые поверхности с тремя направляющими

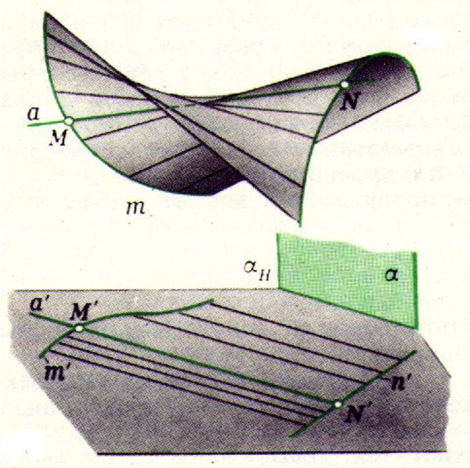




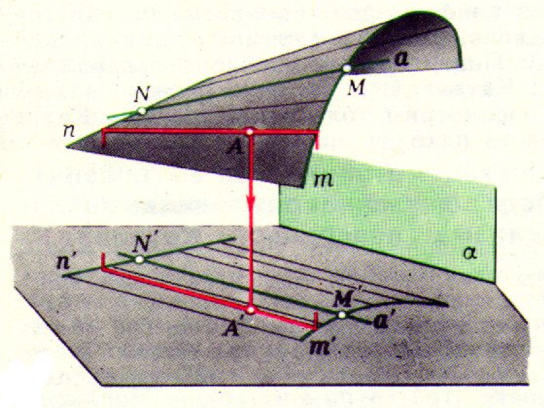
Поверхность косого клина

Поверхность косого перехода

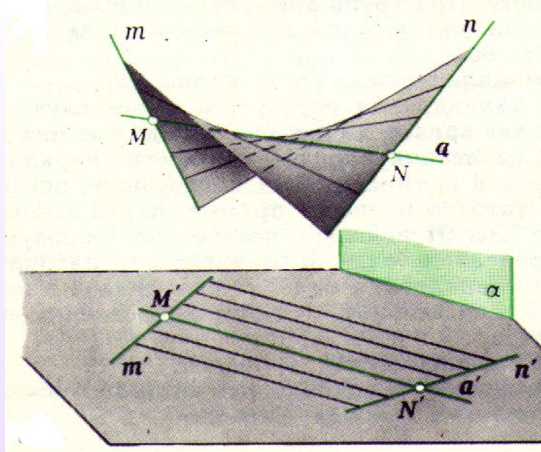
Линейчатые поверхности с двумя направляющими и направляющей плоскостью или плоскостью параллелизма (поверхности Каталана)



Поверхность прямого цилиндроида



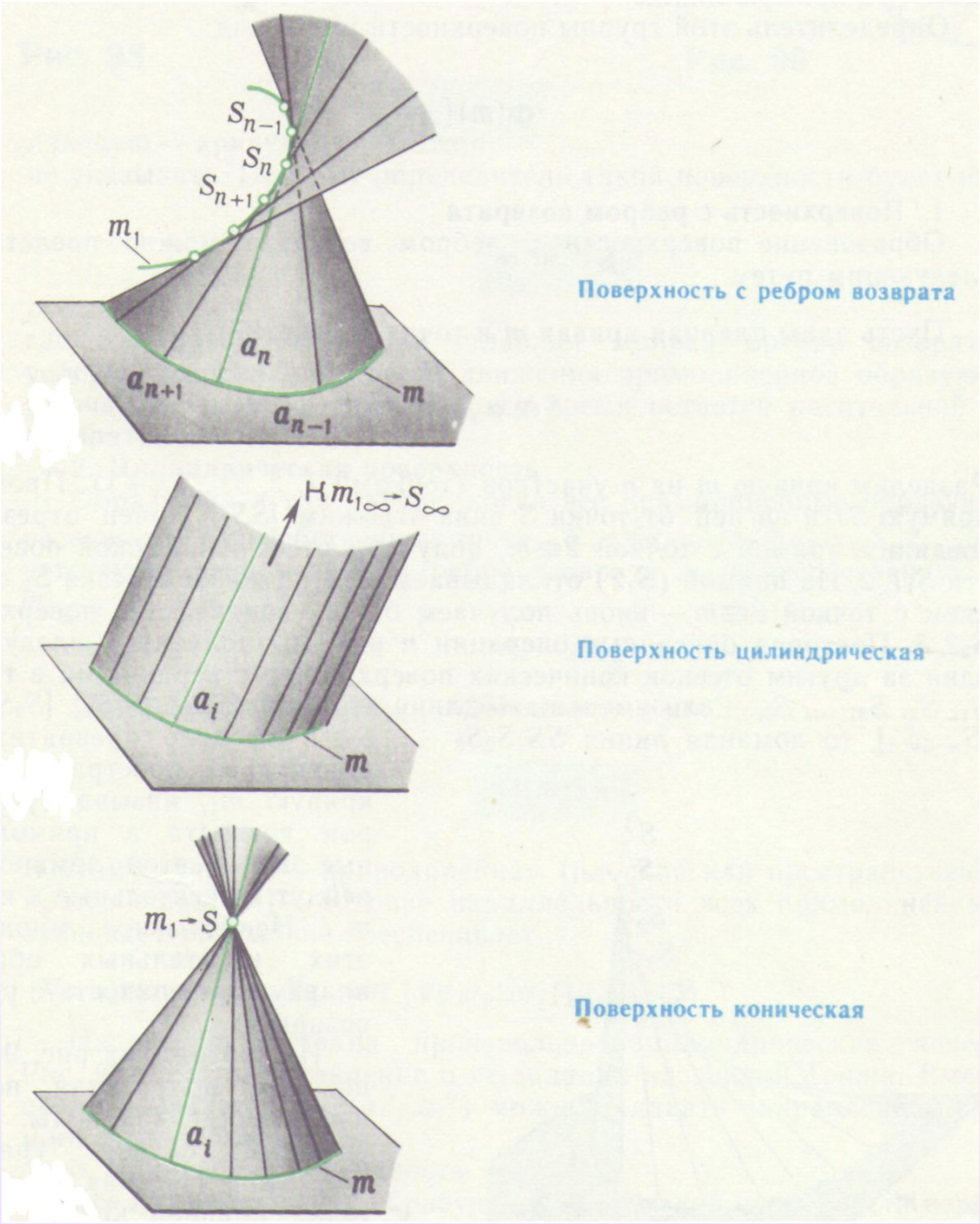
Поверхность прямого коноида



Косая плоскость

Линейчатые поверхности с одной направляющей

Торсы

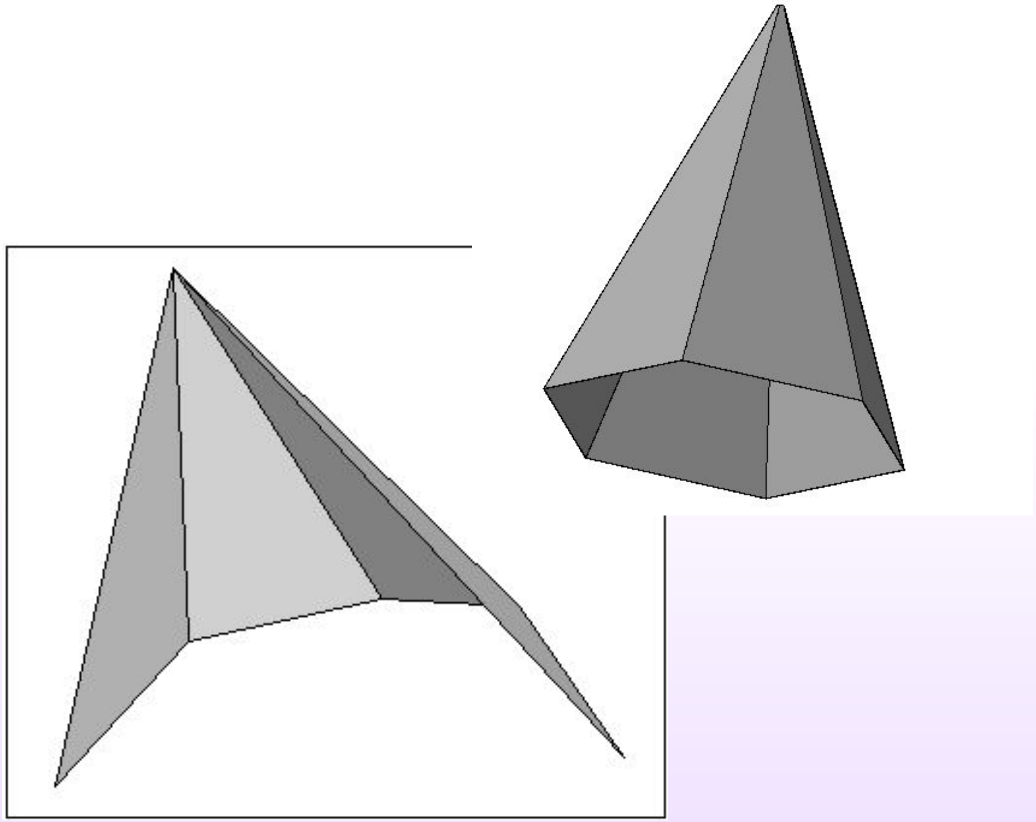


S – реальная точка

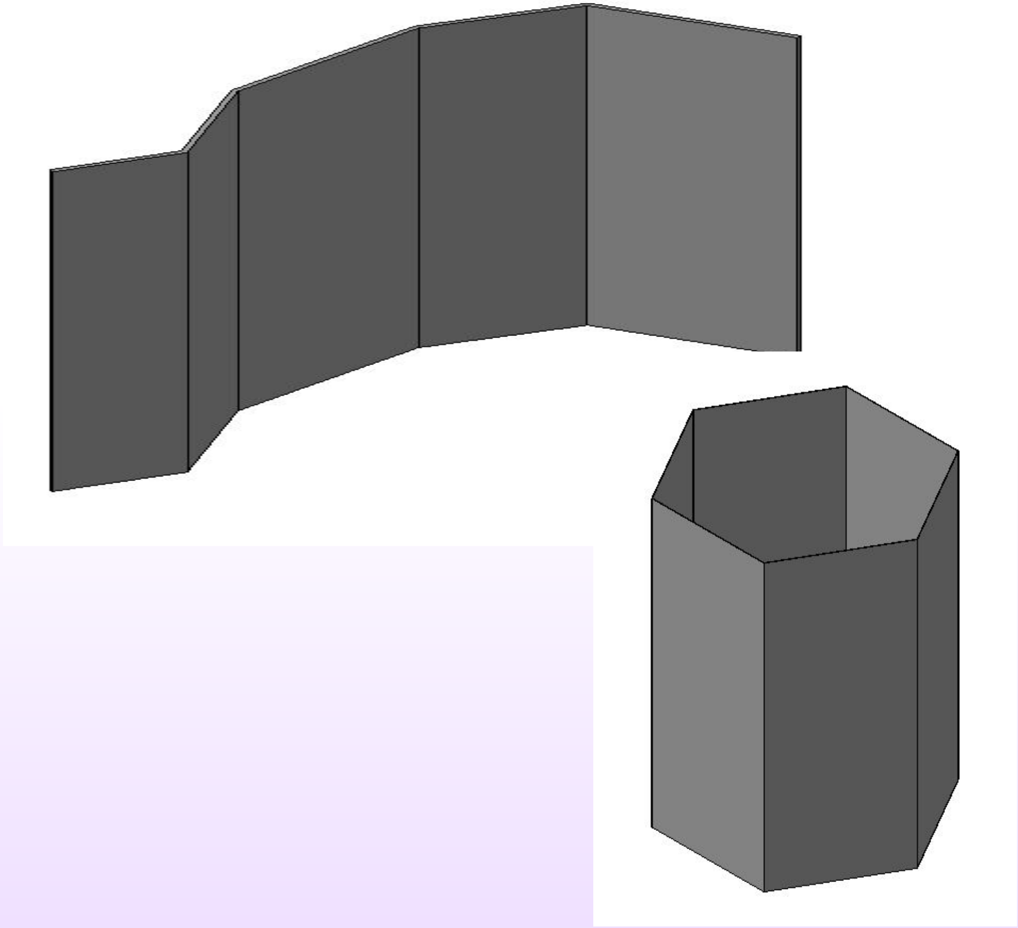
S^{∞} - несобственная точка пространства

Гранные поверхности

Пирамидальная



Призматическая

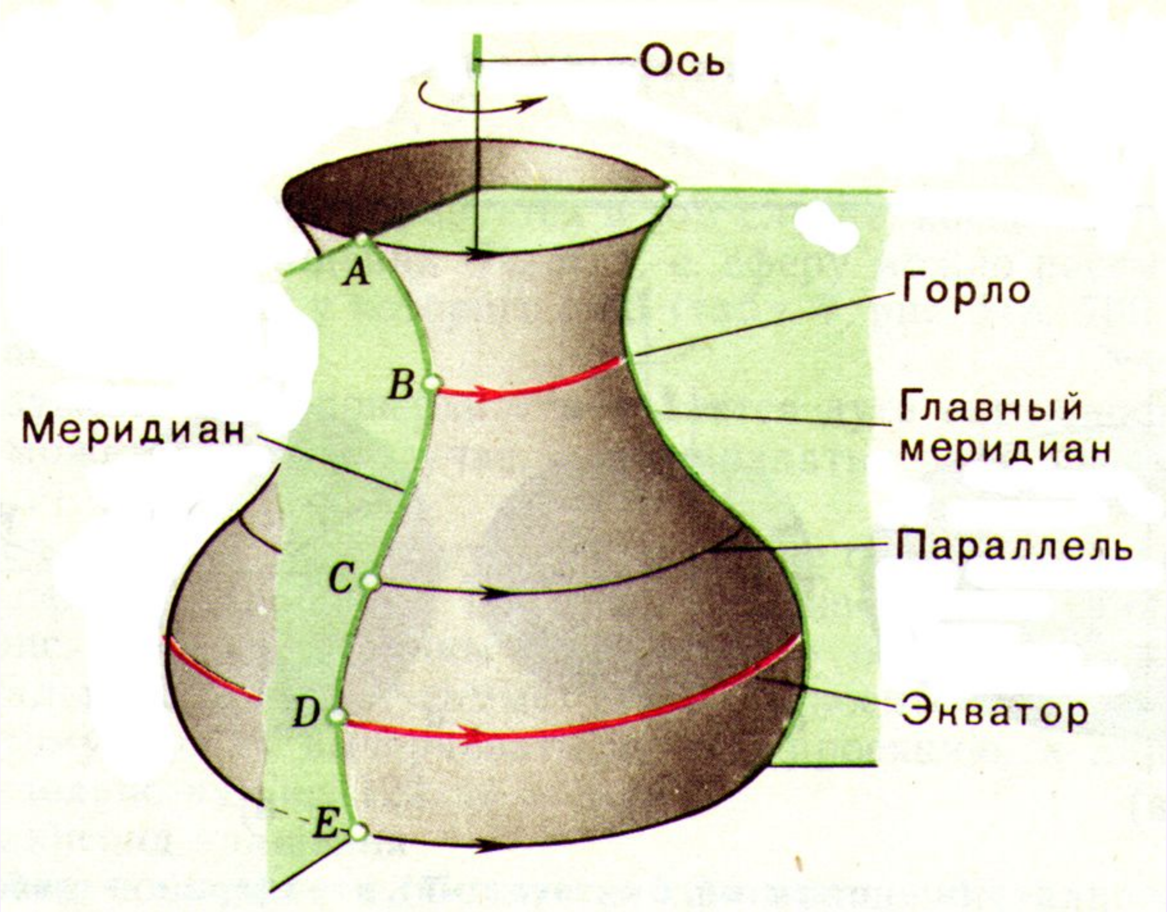


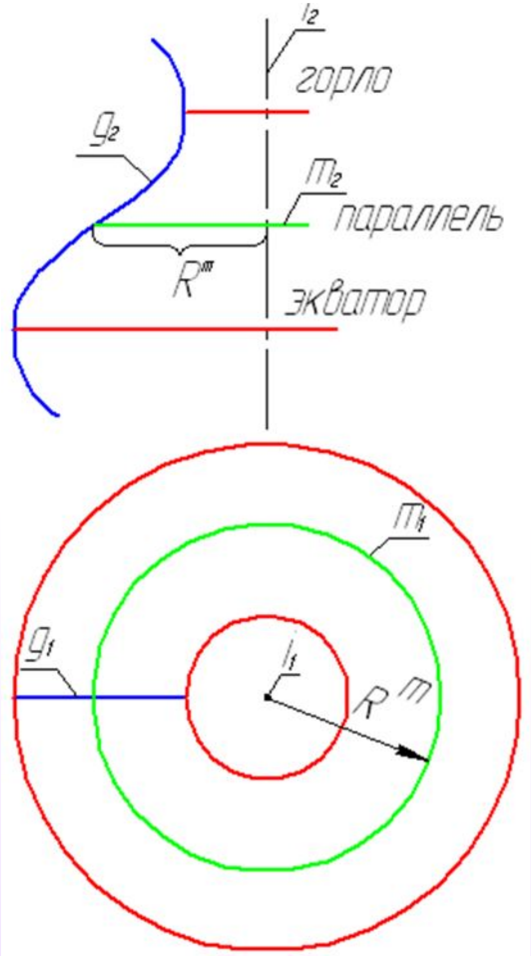
Поверхности вращения

Поверхность вращения

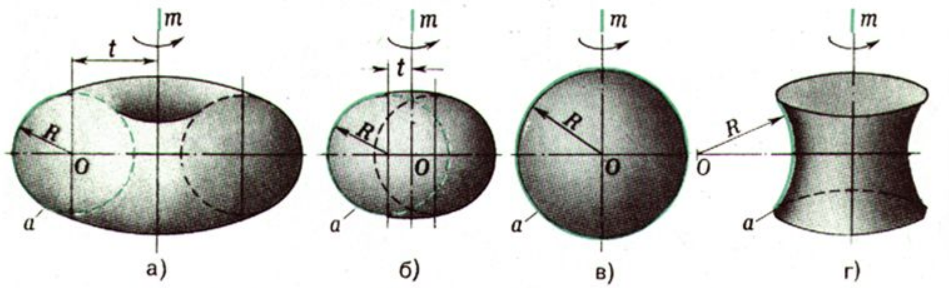
- линейчатая
- нелинейчатая

Основные элементы поверхности вращения

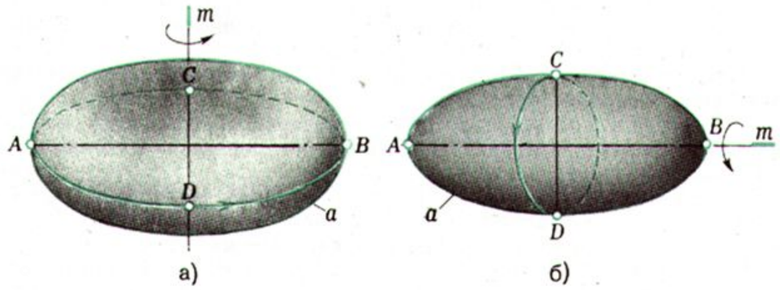




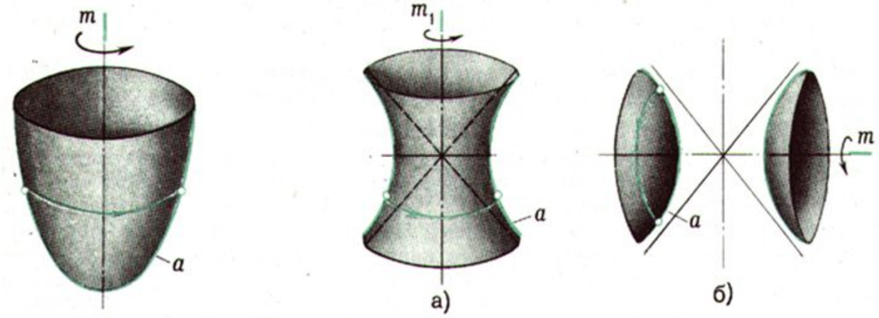
Примеры нелинейчатых поверхностей вращения



Тор (а — открытый, б — закрытый), в — сфера, г — глобоид



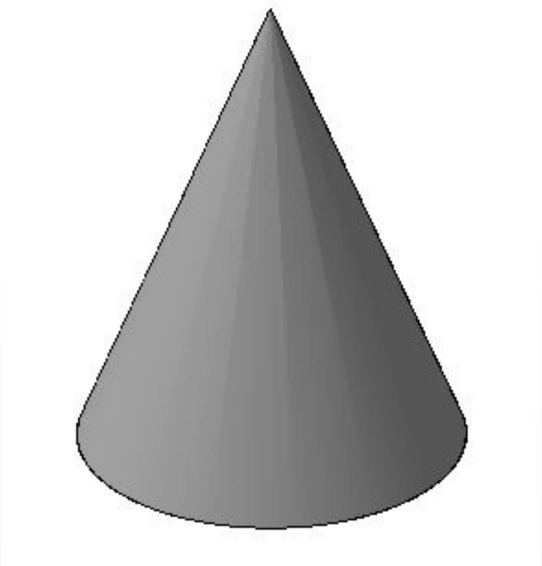
Эллипсоид (а — сжатый, б — вытянутый)

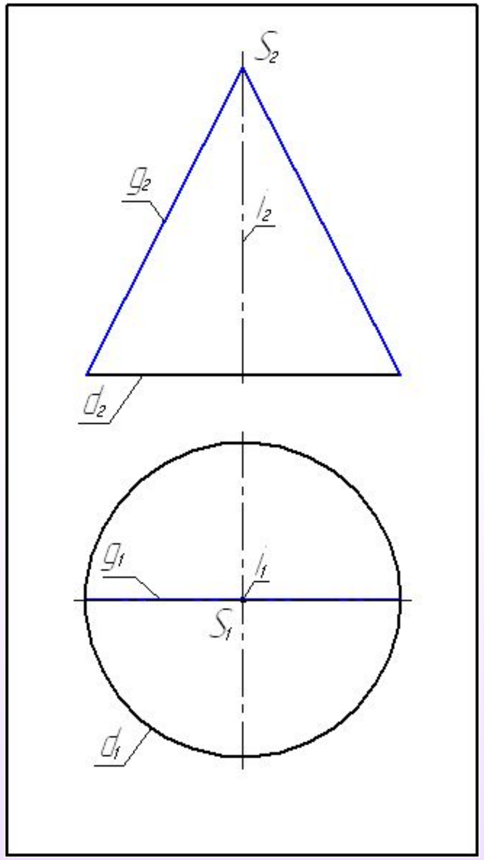


Параболоид вращения

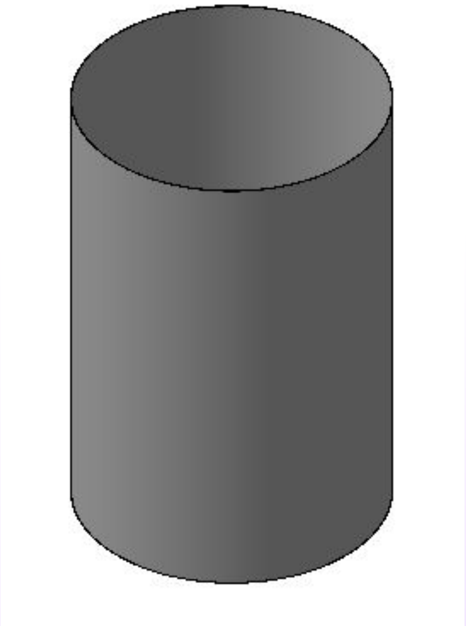
Примеры линейчатых поверхностей вращения

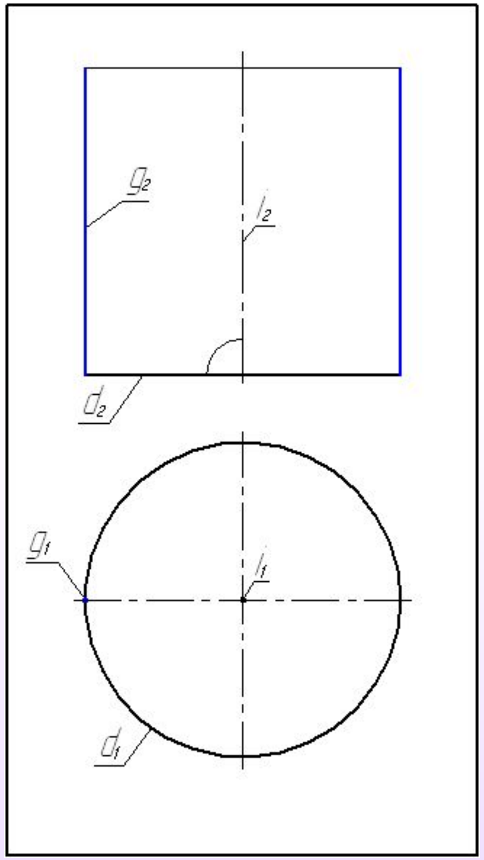
коническая



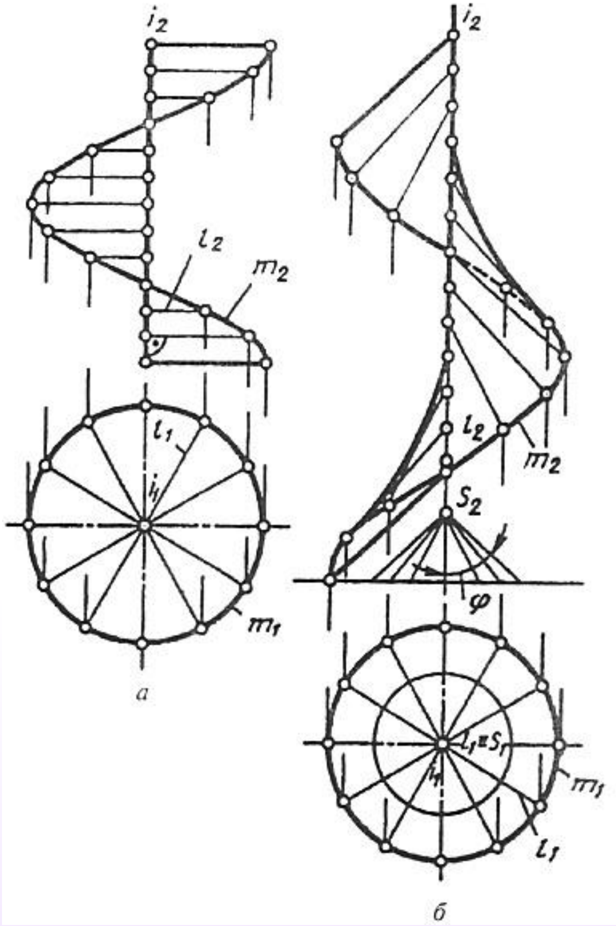


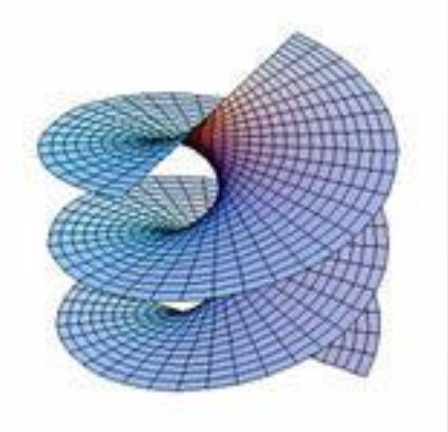
цилиндрическая





Винтовые поверхности





Прямой геликоид,
Винтовой
коноид

Точка на поверхности

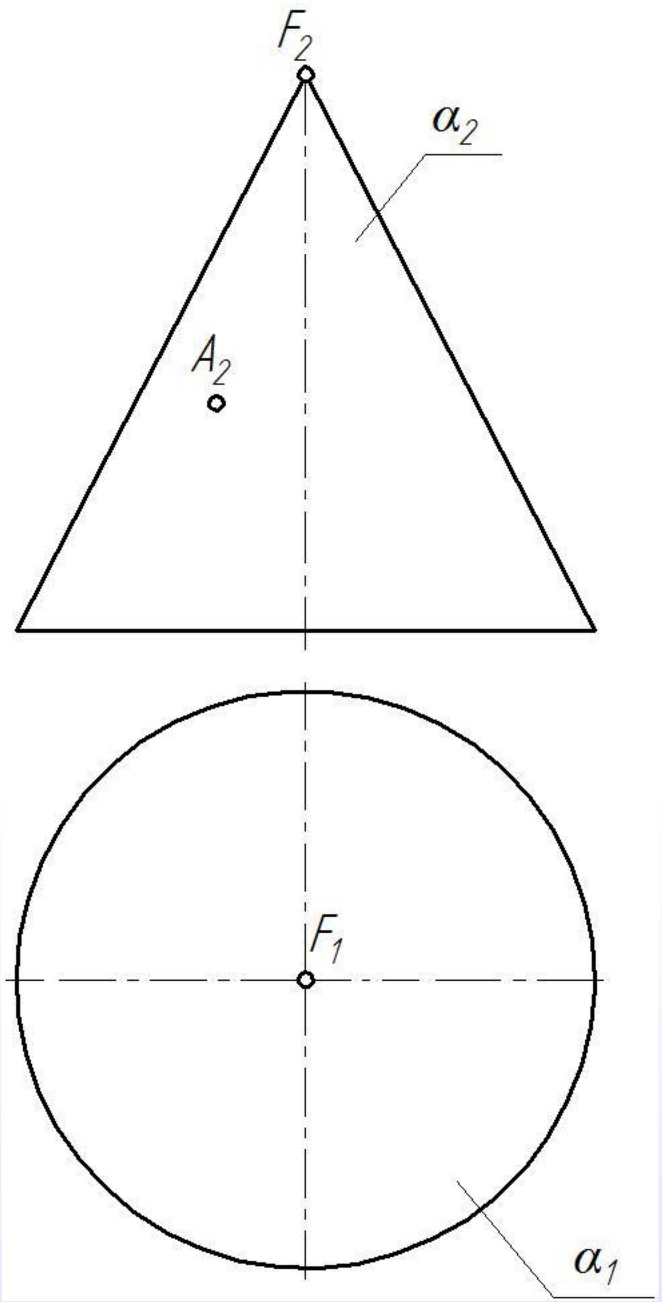
Положение Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит линии, принадлежащей этой поверхности.

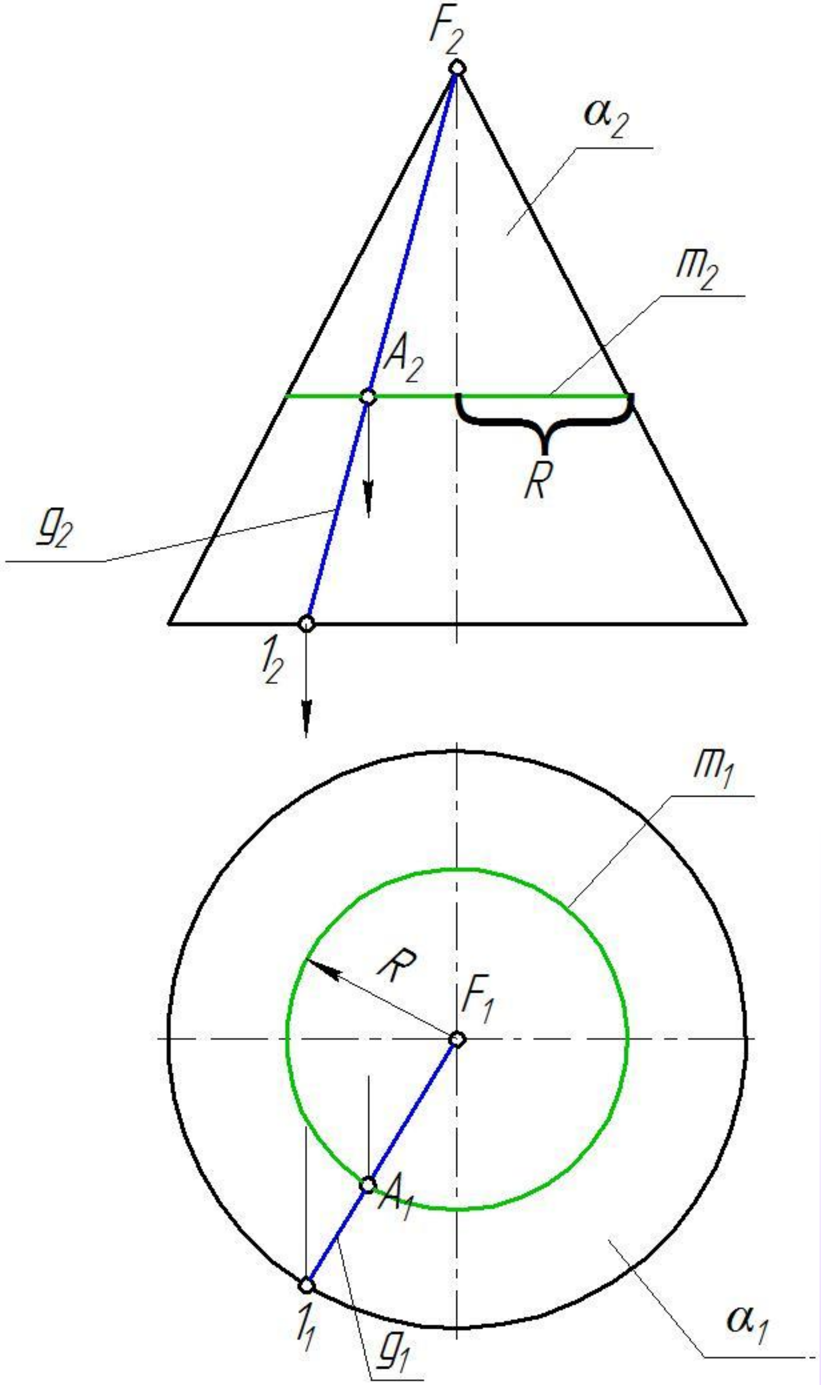
$$\mathbf{A} \in \mathbf{\Phi} \Leftrightarrow \mathbf{A} \in \boldsymbol{l}, \ \boldsymbol{l} \subset \mathbf{\Phi}$$

Линия ***l*** должна на ***проекциях*** иметь наиболее простую геометрическую форму: прямой или окружности.

Линейчатая поверхность

Линия ***l***, которой должна принадлежать точка, может иметь форму, как прямой линии (образующая), так и окружности (параллель).

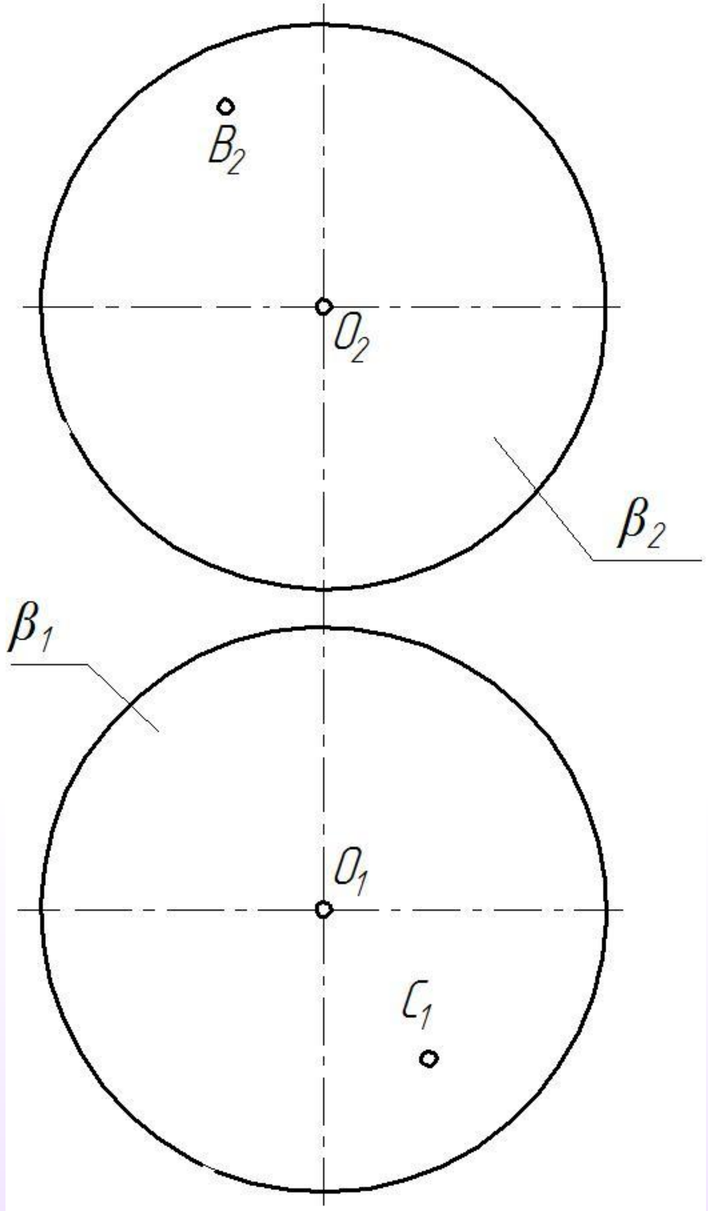


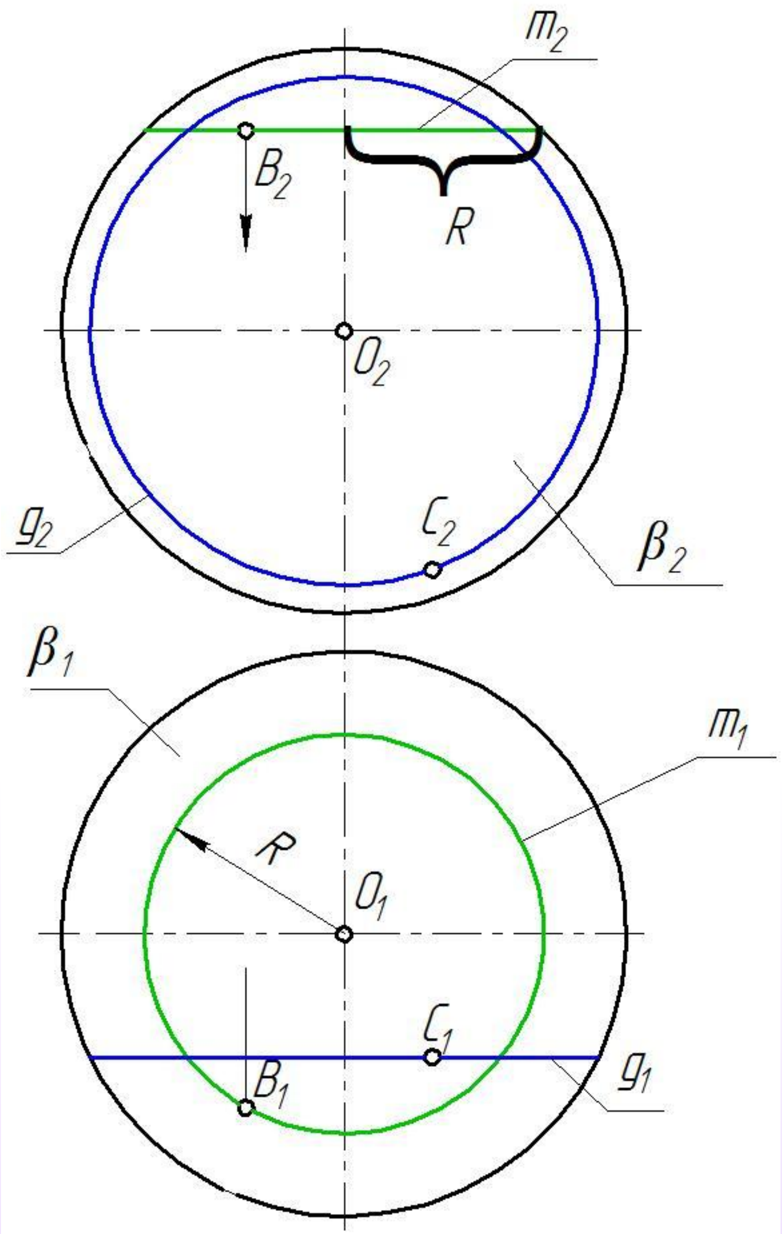


F2
α2
m2
A2
R
g2
12
m1
R
F1
A1
11
g1
α1

Нелинейчатая поверхность

Линия ***l***, которой должна принадлежать точка, может иметь только форму окружности (параллель).

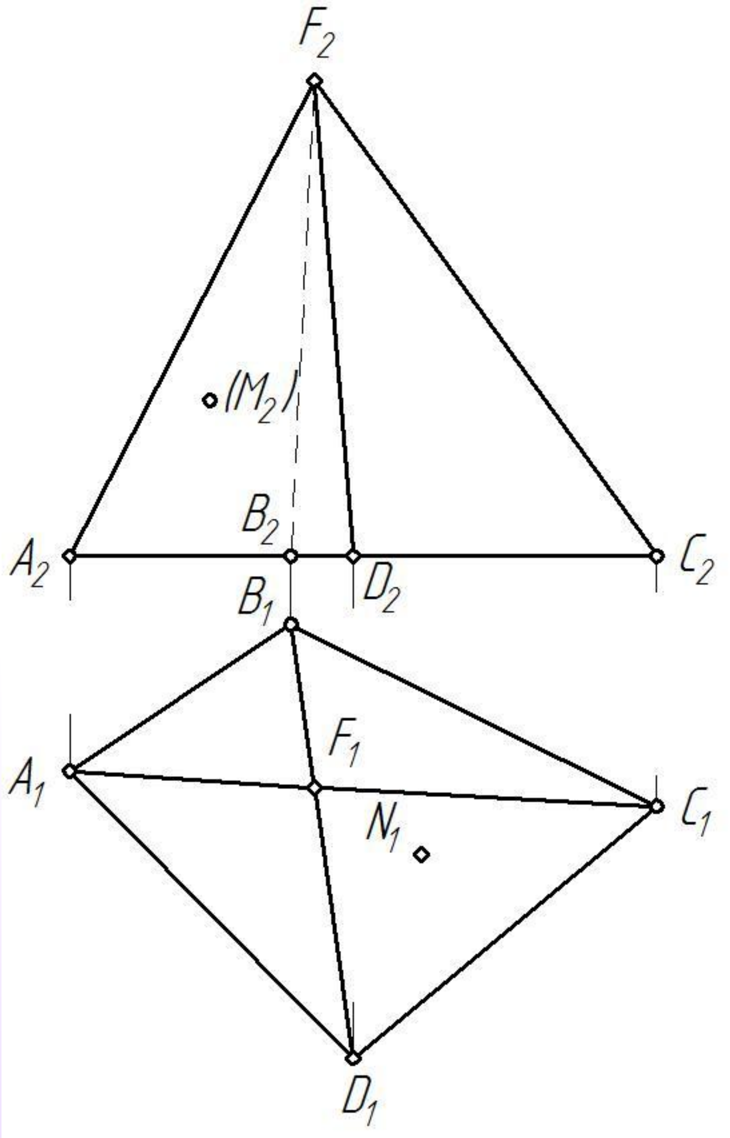


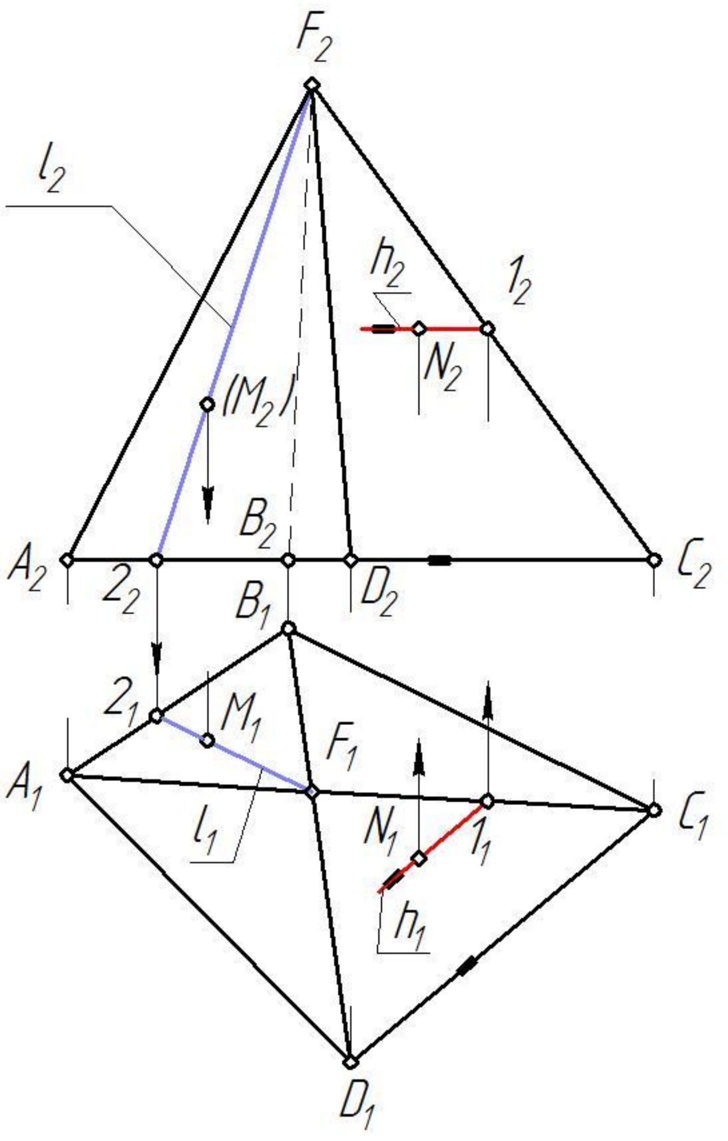


m2
B2
R
O2
g2
C2
β2
β1
m1
R
O1
C1
g1
B1

Точка на гранной поверхности

Каждая грань – отсек плоскости.
Построение точки на грани сводится к построению точки на плоскости.





F_2
l_2
h_2
1_2
N_2
(M_2)
B_2
A_2
2_2
D_2
C_2
B_1
2_1
M_1
F_1
A_1
l_1
N_1
1_1
C_1
h_1
D_1

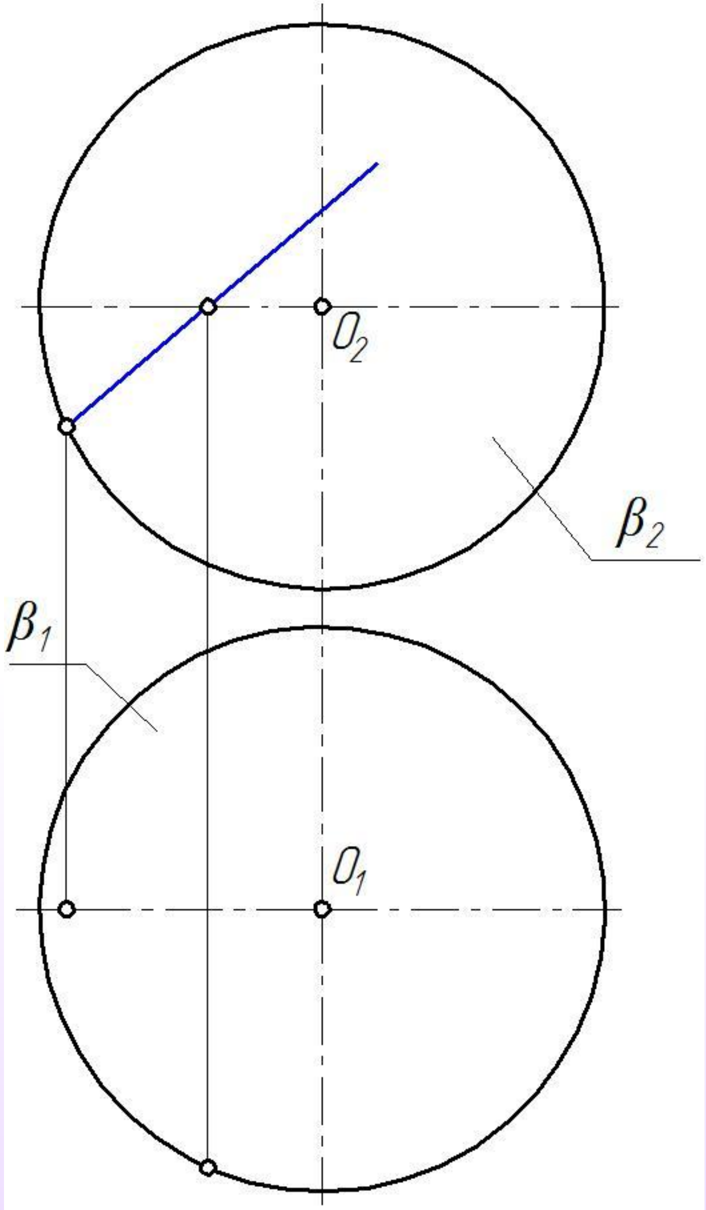
Линия на поверхности

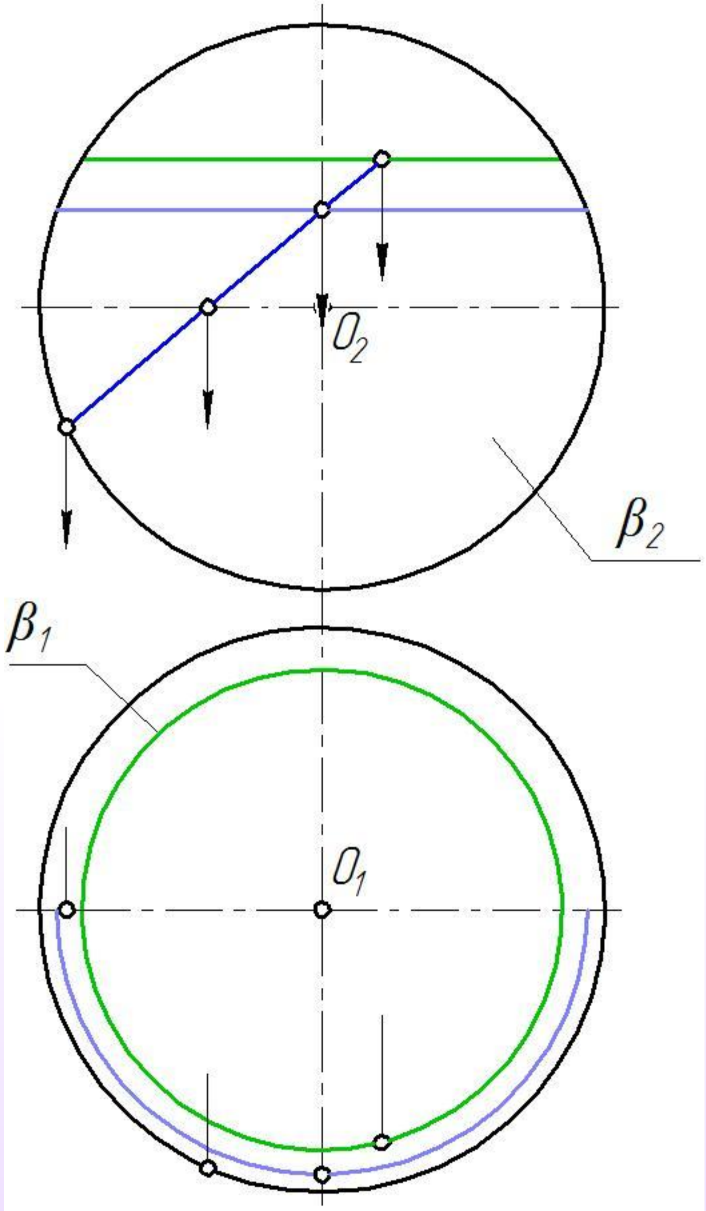
Положение Линия принадлежит поверхности, если все множество ее точек принадлежит этой поверхности.

Чтобы построить линию на поверхности, необходимо представить эту линию, как множество точек, и построить каждую из точек этого множества, используя условие принадлежности точки поверхности.

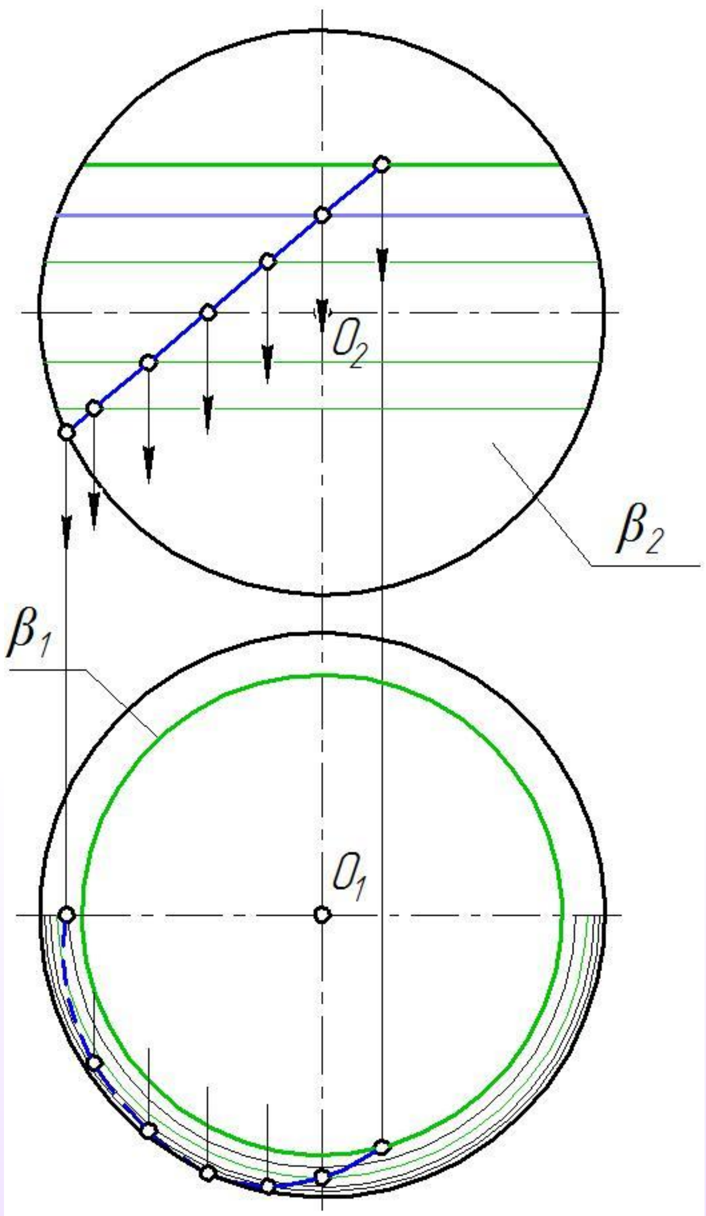
Примеры построения линии на поверхности, заданной очерком

Сфера



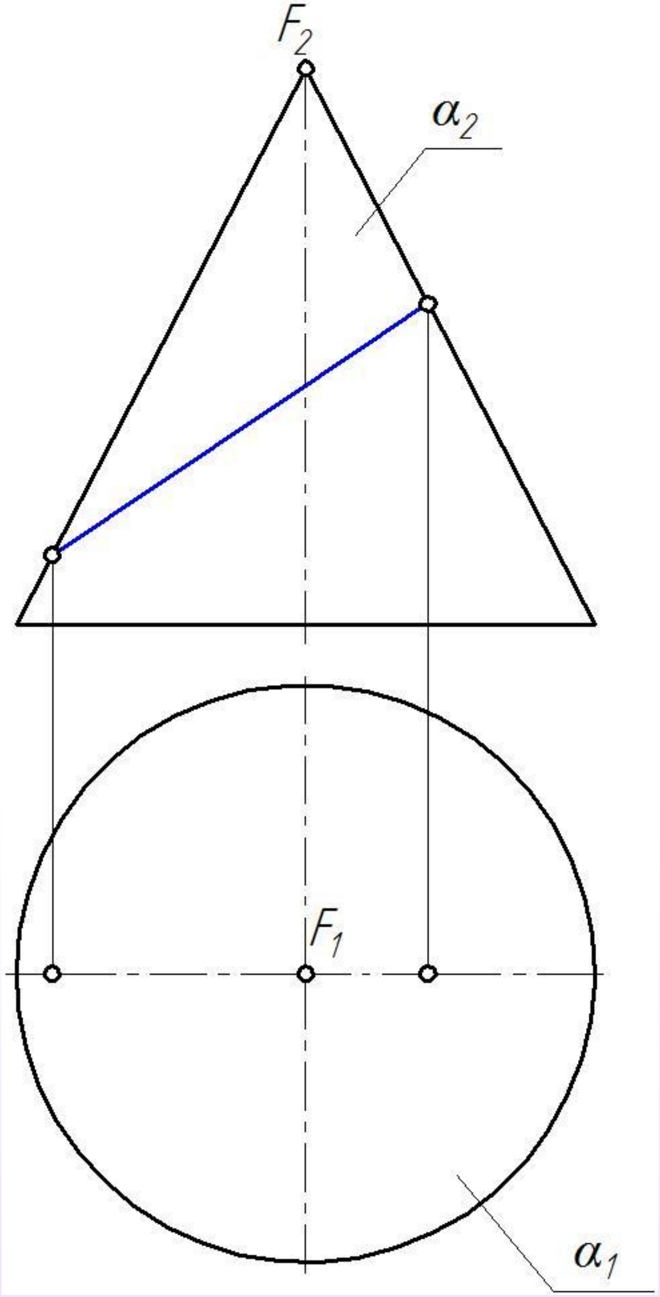


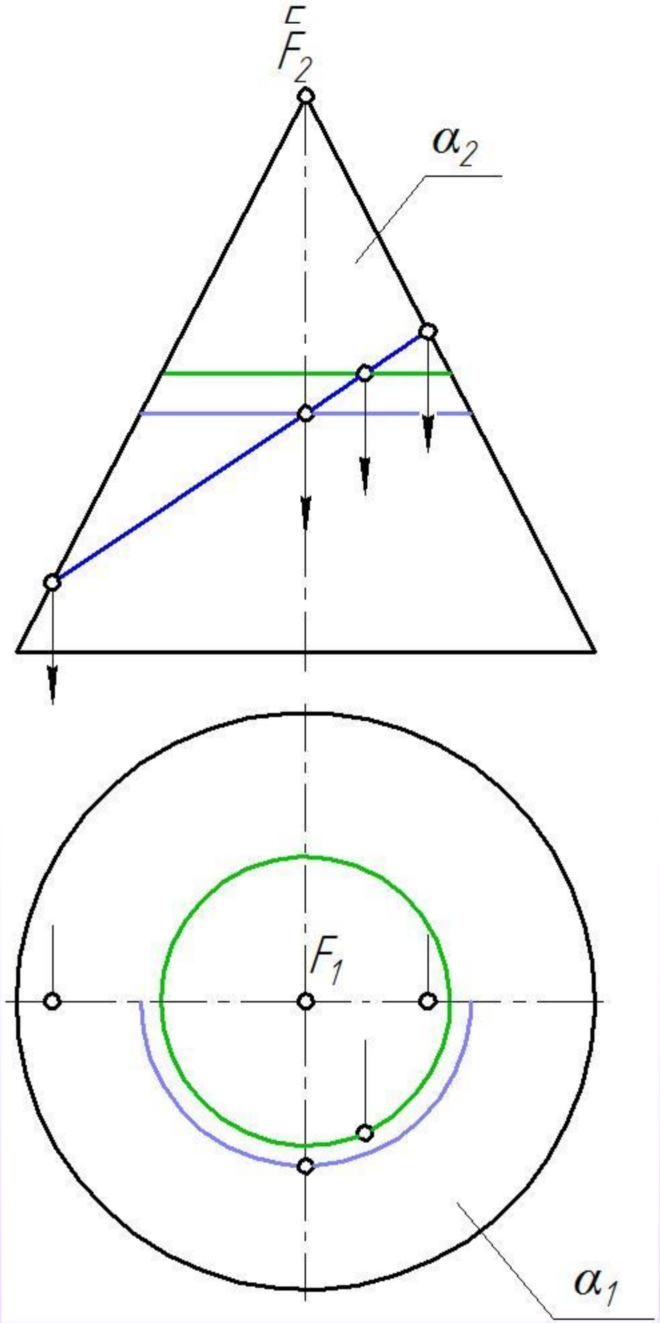
O_2
β_2
β_1
O_1



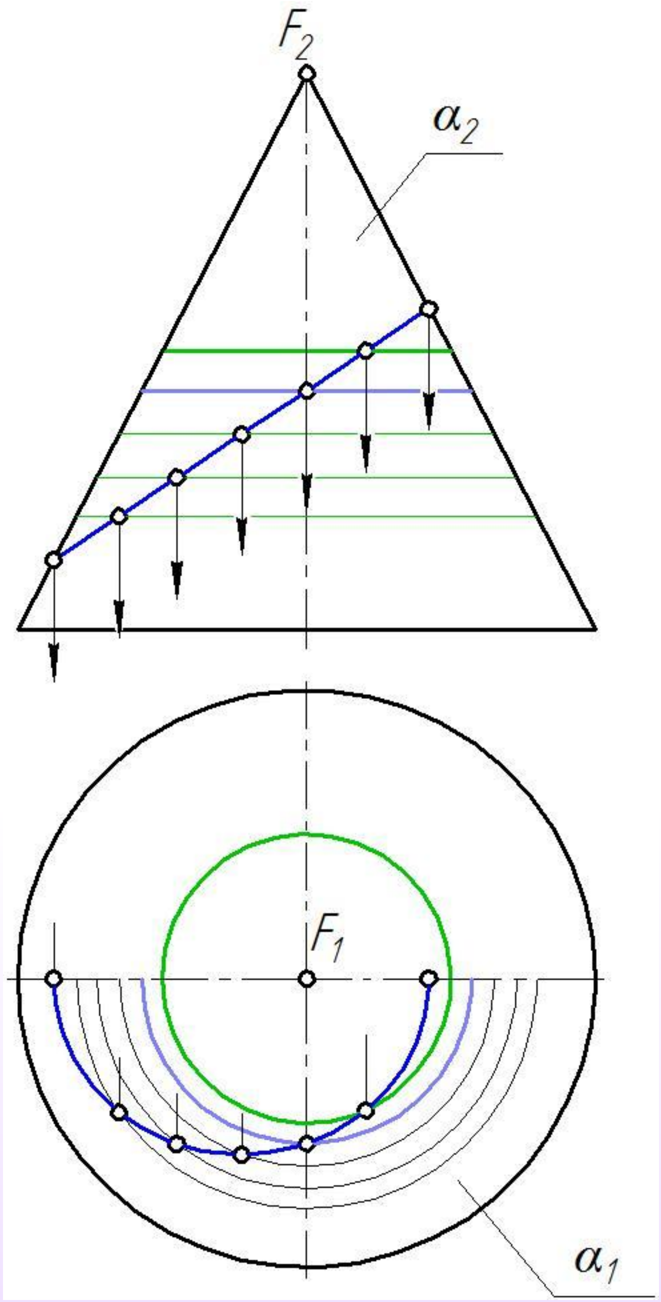
O_2
β_2
β_1
O_1

Конус





F_2
α_2
F_1
α_1



F_2
α_2
F_1
α_1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

Геометрическая фигура **-** это любое множество точек.

Геометрические фигуры бывают:

- ✔ *Плоские* (точка, прямая, плоскость и т. д.)
- ✔ *Пространственные* (призма, конус и т. д.)
- ✔ *Ограниченные* (окружность, многоугольник, сфера и т. д.
- ✔ *Неограниченные* (плоский угол, трехгранный угол).

Геометрическое тело - это замкнутая пространственная область (например, призма, пирамида, цилиндр, сфера и т. д.). Границу этой области называют ***поверхностью тела***.

<u>Положение</u> Поверхность геометрического тела принимается *непрозрачной*. Невидимые ребра показываются *штриховыми линиями*.

МНОГОГРАННИКИ

Простой многогранной поверхностью называется объединение много угольников.

Многоугольники, составляющие многогранную поверхность, называются ***гранями,*** грани пересекаются по ***ребрам***.

Вершинами многогранной поверхности называют точки пересечения трех и более ребер.

Многогранником называется объединение многогранной поверхности и ее внут ренней области.

ПРИЗМА

Призма — это многогранник, две грани которого — многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные грани в общем случае — параллелограммы.

Многоугольники в основании призмы конгруэнтны.

Боковой поверхностью призмы называется объединение боковых граней.

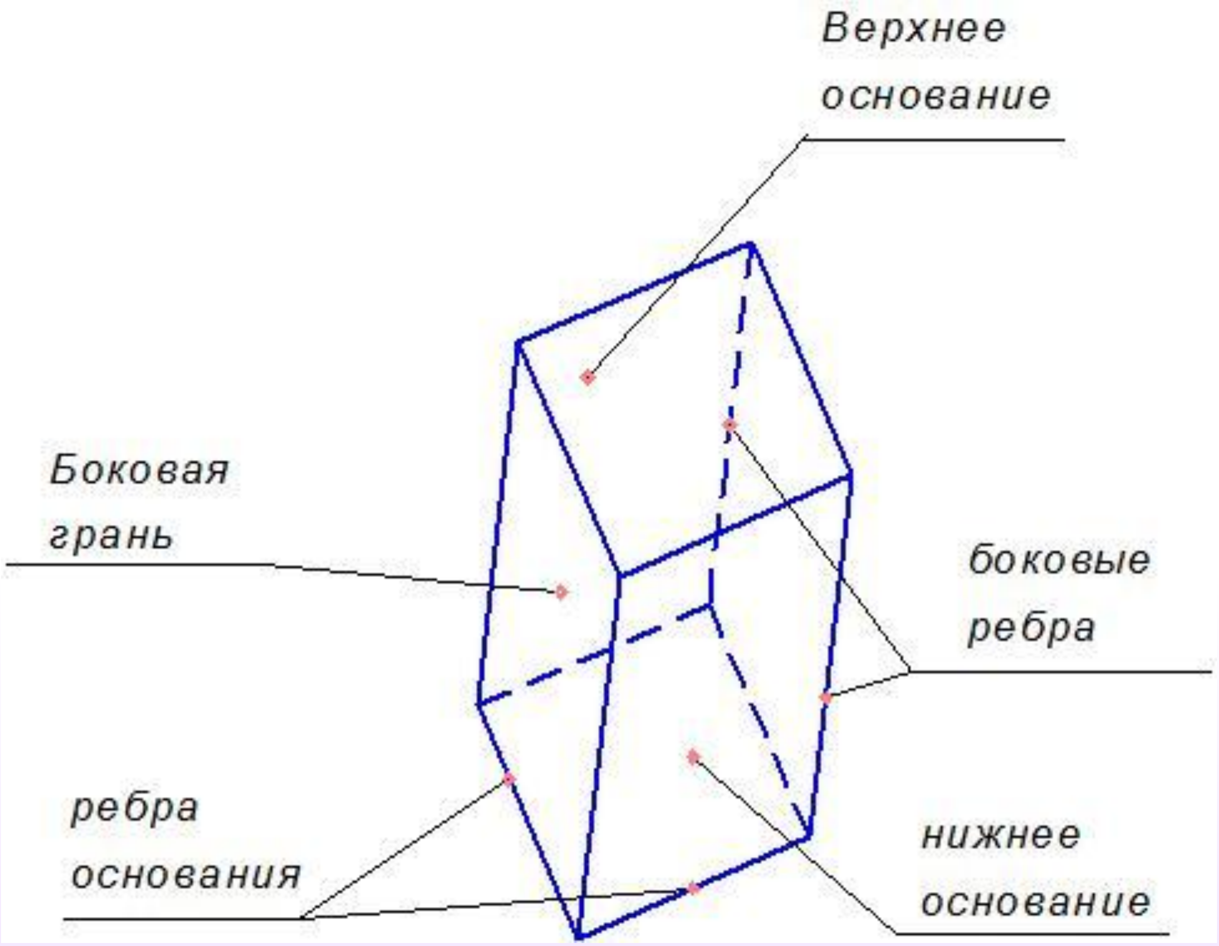
По числу углов основания призмы подразделяются на треугольные, четырехугольные и т. д.

Призма называется ***прямой,*** если ее боковые ребра (и грани) перпендикулярны к плоскости основания призмы, и, наклонной в противном случае.

Многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, называются ***основаниями*** призмы, а параллелограммы — ее ***боковыми гранями***.

Боковыми называются ребра, не лежащие в основании призмы.

Высота призмы — это перпендикуляр, опущенный из точки одного основания на другое.

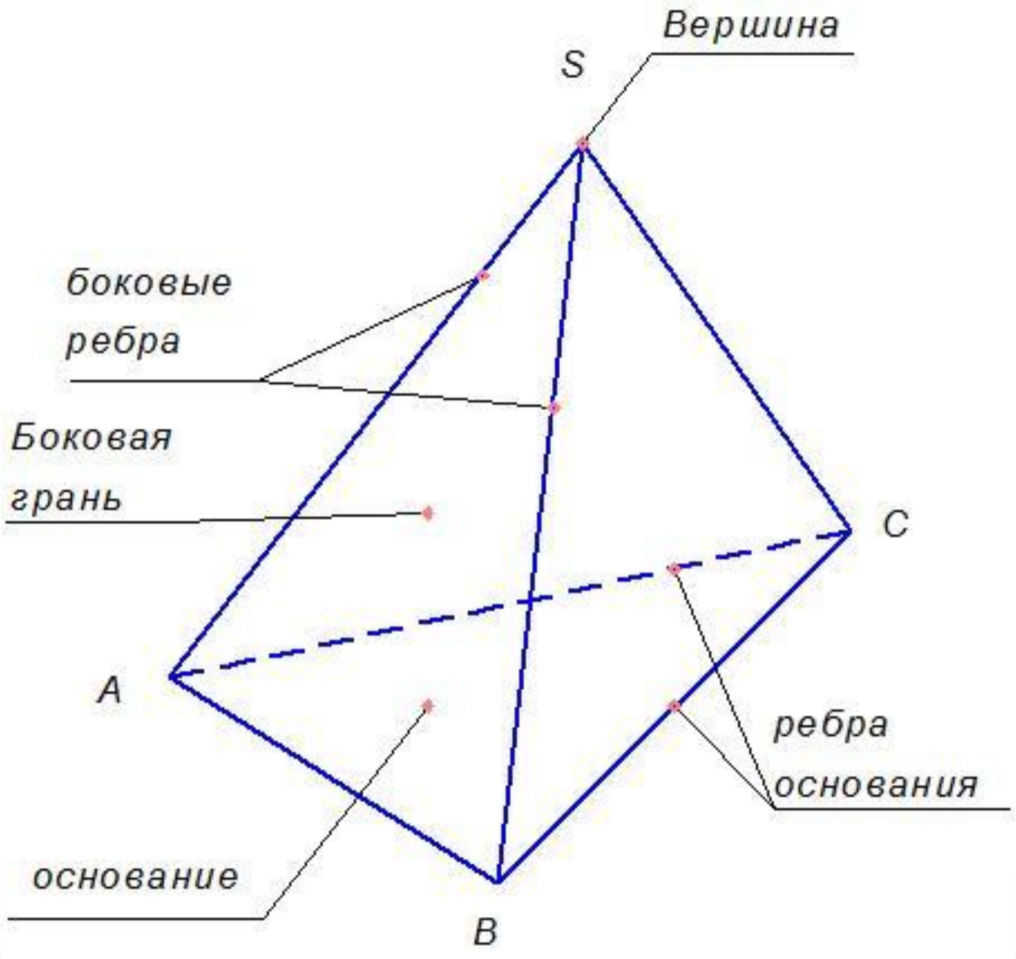


ПИРАМИДА

Пирамидой называется многогранник, одна из граней которого — продольный многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину.

Пирамида называется ***правильной,*** если основанием ее является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания.

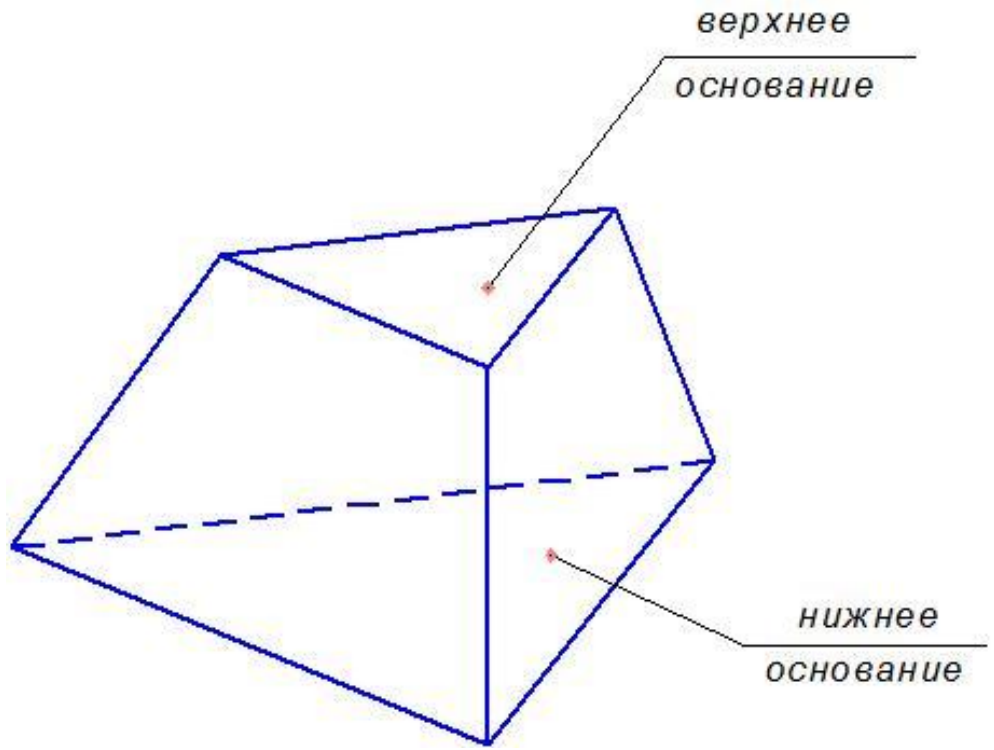
Треугольники S*AB*, *SBC*, *SAC* называются ***боковыми гранями*** пирамиды, точка S — ***вершиной*** пирамиды, треугольник ABC — **основанием.**



Стороны граней пирамиды называют ее ***ребрами,*** а точки пересечения ребер — ***вершинами.***

Ребра, не лежащие в основании пирамиды, называют ***боковыми*** ребрами.

Высотой пирамиды называется расстояние от ее вершины до основания, измеренное по перпендикуляру.



При пересечении пирамиды плоскостью, параллельной основанию, по лучается ***усеченная пирамида.***

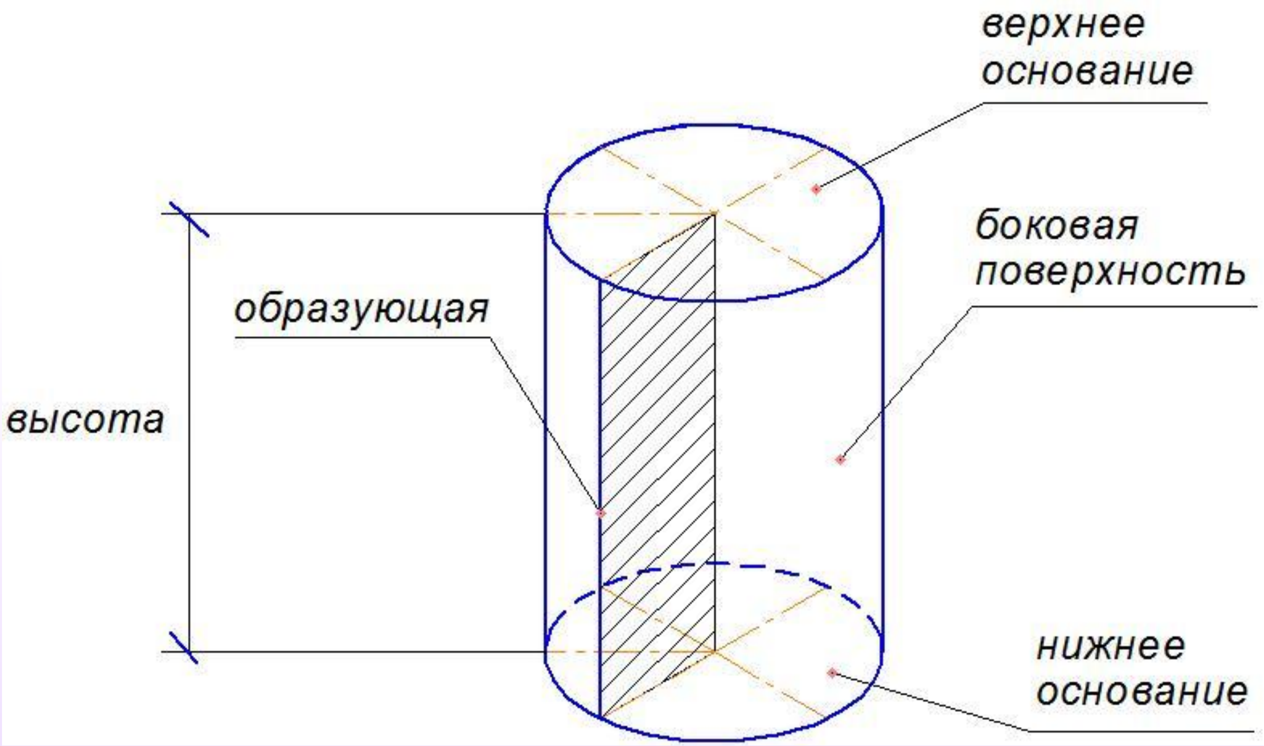
ПРОЕЦИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРА

Цилиндром называется пространственная фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону.

Прямым круговым называется цилиндр, образованный вращением пря моугольника вокруг одной из его сторон. Противоположная сторона опишет цилиндрическую поверхность, а смежные стороны — основания.

Боковая поверхность цилиндра – кривая поверхность, называемая цилиндрической.

Сторона прямоугольника, параллельная оси, называется ***образующей*** цилиндрической поверхности.

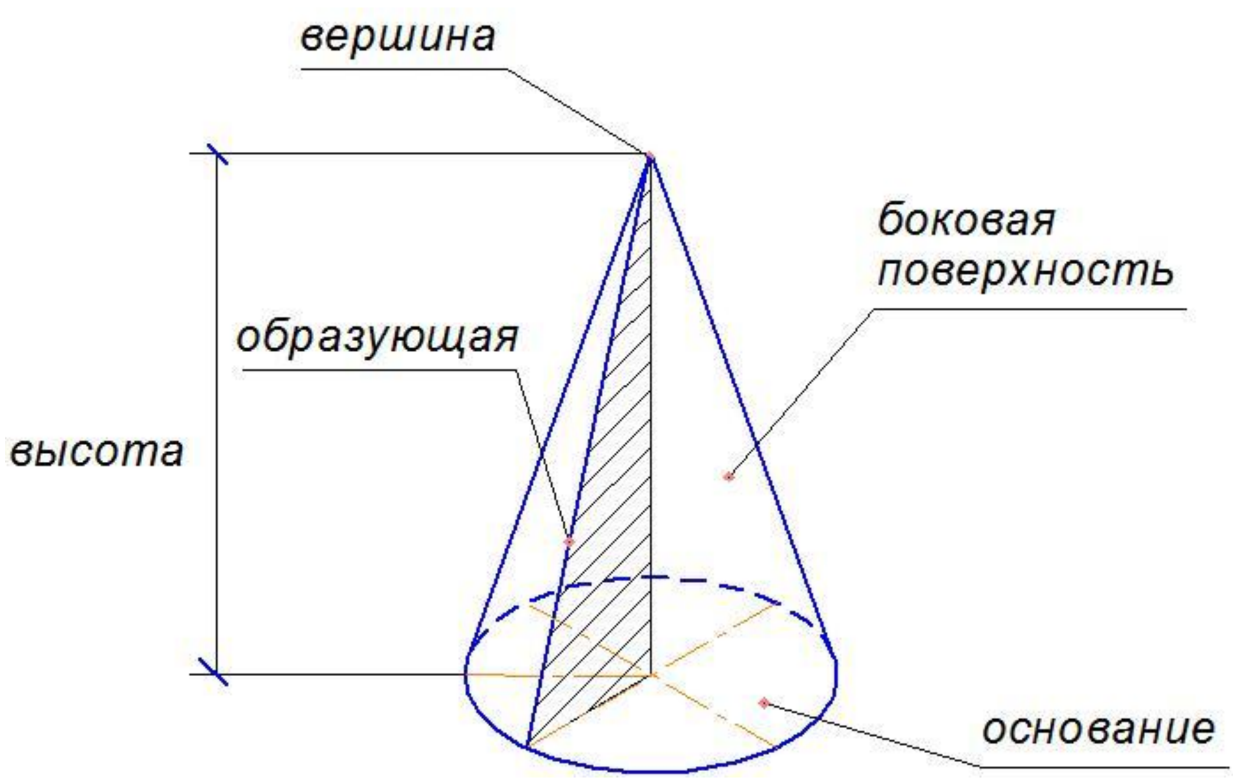


Основания цилиндра — параллельные плоскости, ограниченные конгруэнтными окружностями.

Расстояние по перпендикуляру между двумя основаниями есть ***высота цилиндра***.

ПРОЕЦИРОВАНИЕ КОНУСА

Прямым круговым конусом называется пространственная фигура (множество точек), полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет.



Катет, принадлежащий оси, называется ***высотой конуса***.

Второй катет описывает круг, который называется ***основанием*** конуса.

Гипотенуза называется ***образующей*** конуса.

Поверхность, описываемая образующей, называется ***боковой поверхностью конуса.***

ПРОЕЦИРОВАНИЕ СФЕРЫ

Множество всех точек пространства, находящихся на положительном расстоянии R от заданной точки, ***называется сферой.***

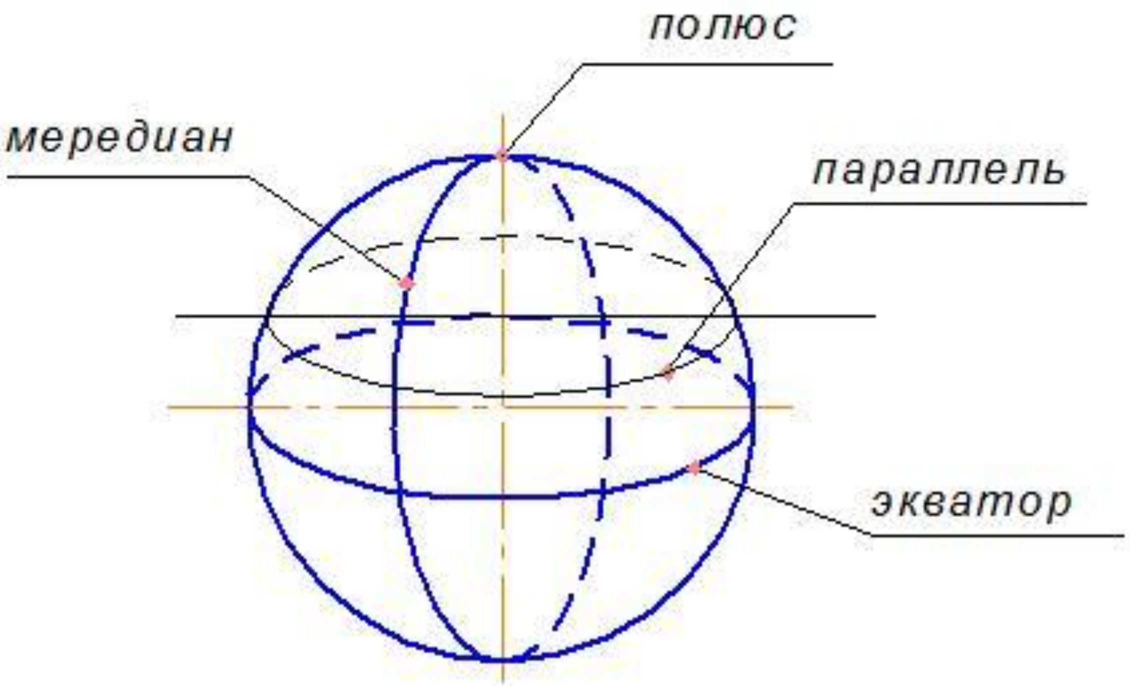
Данная точка называется центром сферы.

Отрезок, соединяющий центр сферы с одной из ее точек, называется ***радиусом сферы***.

Множество всех точек пространства, расстояние от каждой из которых до данной точки не больше положительного расстояния R, называется ***шаром.***

Фигура, полученная при вращении полуокружности, есть сфера — поверхность этого шара. Все точки шара, не принадлежащие его поверхности, называют внутренними точками шара.

На ***сфере выделяют два семейства линий:***



а) параллели — окружности, получаемые при пересечении сферы плоскостями, перпендикулярными к оси вращения;

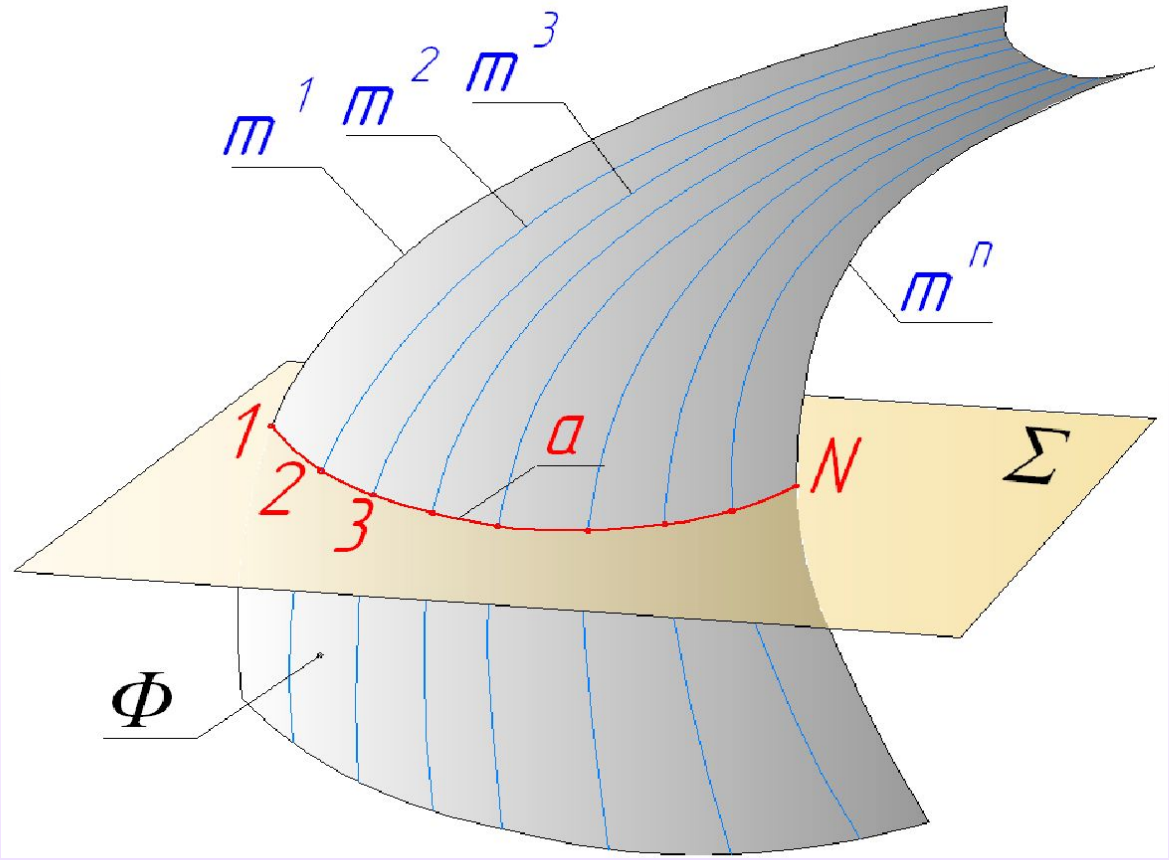
б) меридианы — окружности, получаемые при пересечении сферы плоскостями, проходящими через ось вращения.

Наибольшая параллель называется *экватором*. Она лежит в плоскости, проходящей через центр шара. Фронтальный и профильный меридианы являются главными.

Пересечение поверхности плоскостью частного положения

При пересечении поверхности плоскостью форма линии пересечения определяется формой самой поверхности и положением секущей плоскости относительно отдельных элементов поверхности.

Линию пересечения поверхности плоскостью следует рассматривать как множество точек пересечения секущей плоскости с линиями, принадлежащими поверхности.



$\Sigma \cap \Phi = a$

$\Phi\{m^1, m^2, \ldots, m^n\}$

$a\{1, 2, \ldots, N\}$

$1 = m^1 \cap \Sigma$

$2 = m^2 \cap \Sigma$

....

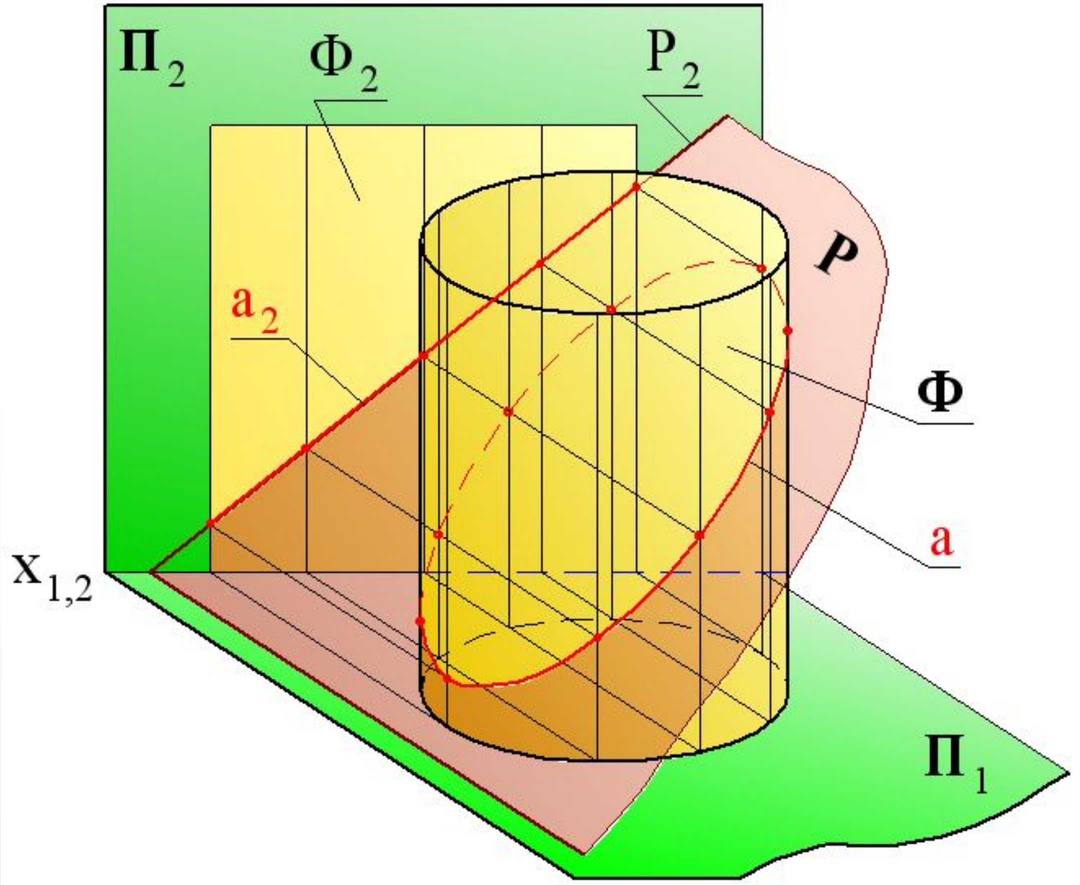
$N = m^n \cap \Sigma$

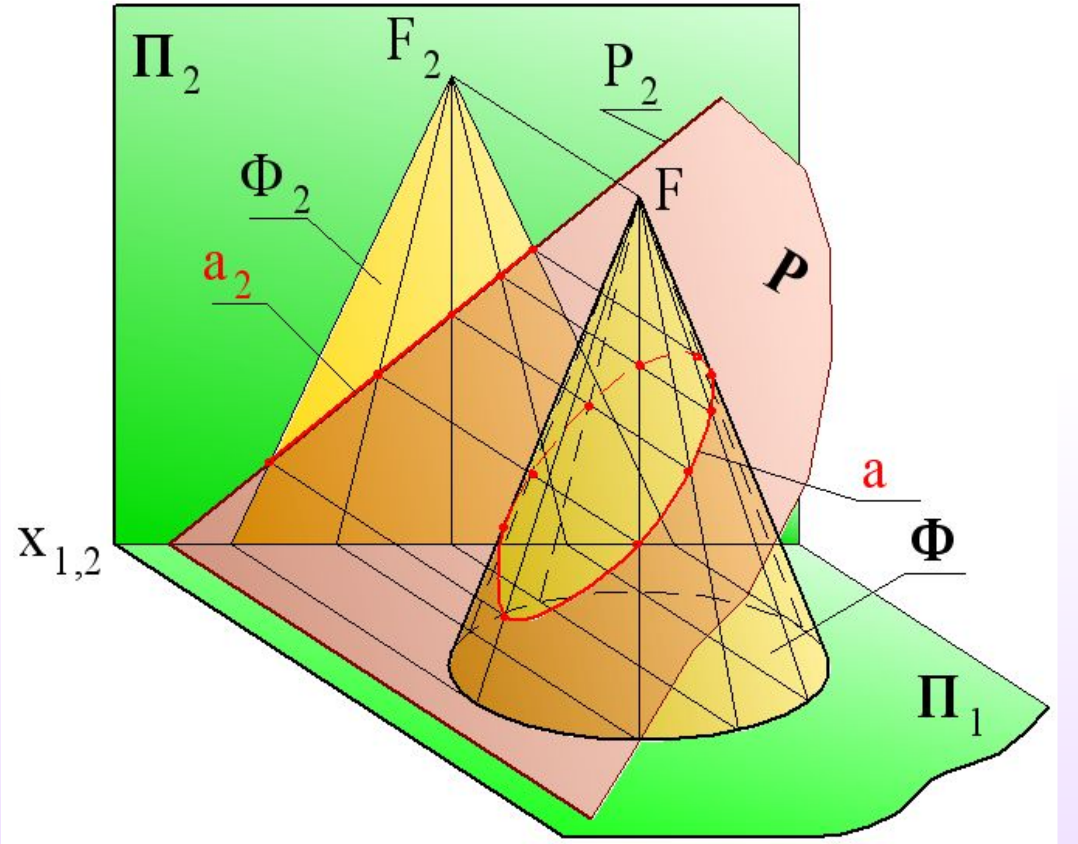
Количество точек, используемых для построения линии пересечения, определяется формой поверхности и точностью построения.

Но из всего множества точек линии пересечения **обязательно** должны быть построены следующие точки:

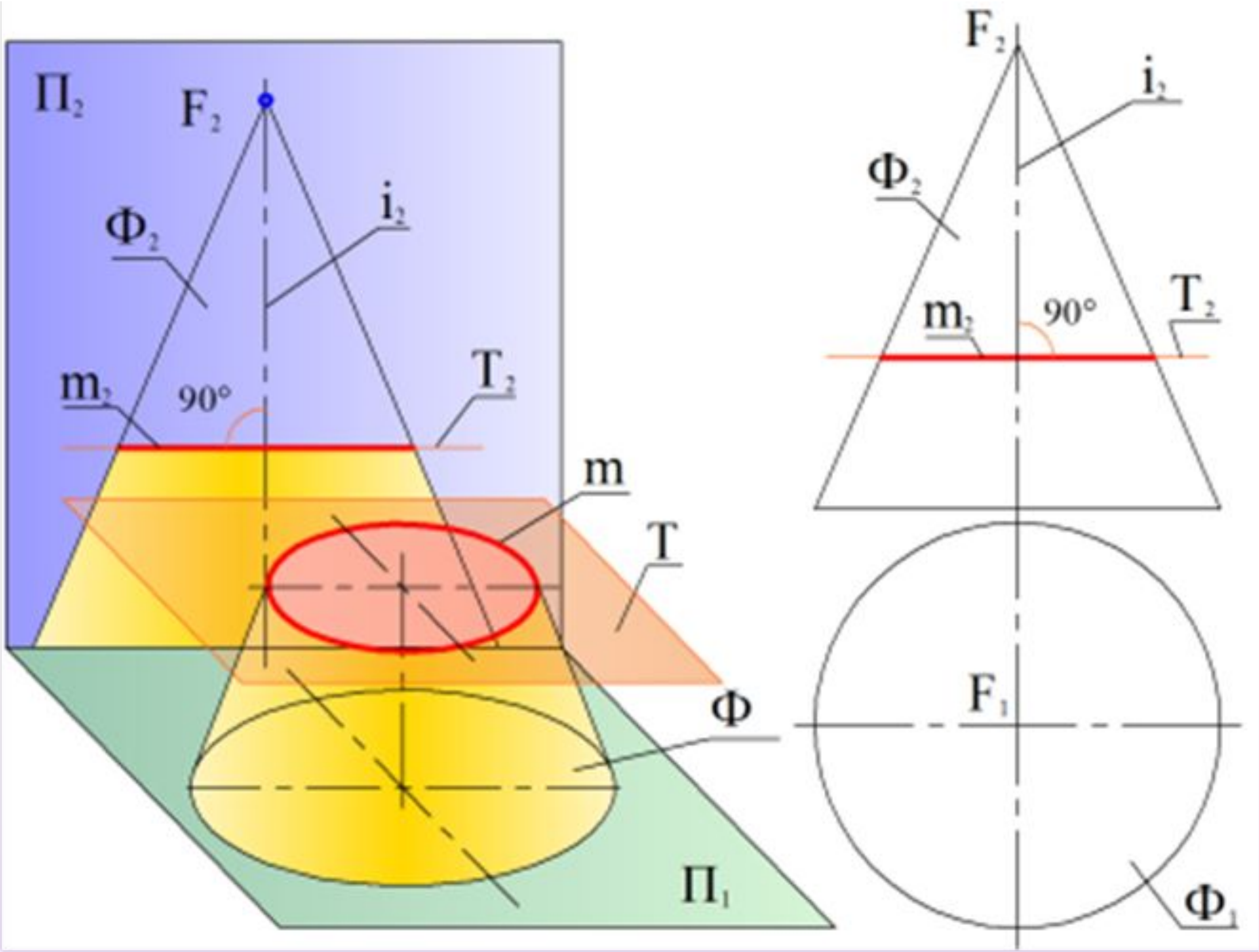
- точки, определяющие габариты фигуру сечения;
- точки фигуры сечения наиболее и наименее удаленные от плоскостей проекций;
- точки, определяющие видимость фигуры сечения на проекциях.

В общем случае решение задачи на построение линии пересечения сводится к определению точек пересечения поверхности с принятой секущей плоскостью.



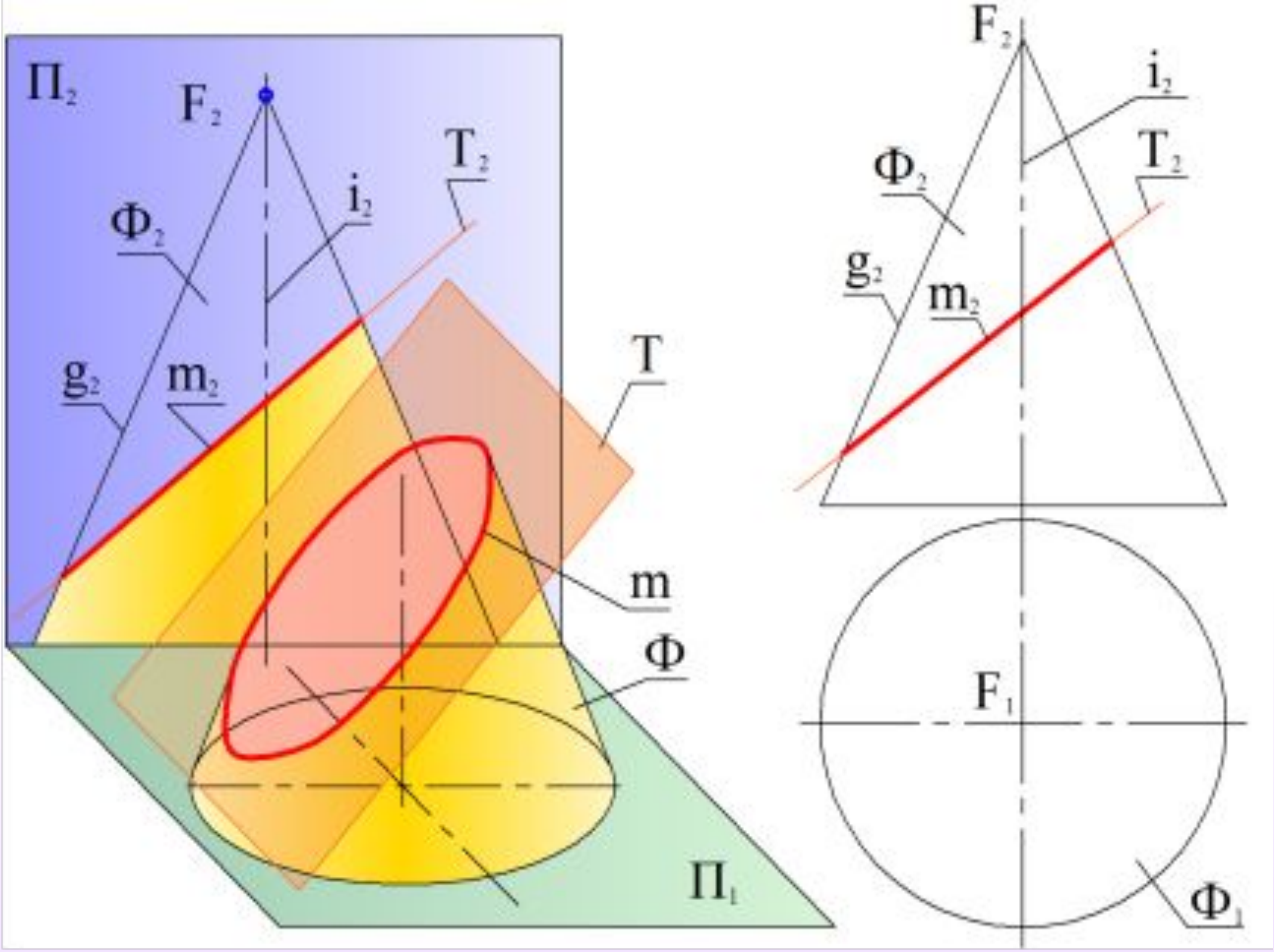


Пересечение конической поверхности плоскостью



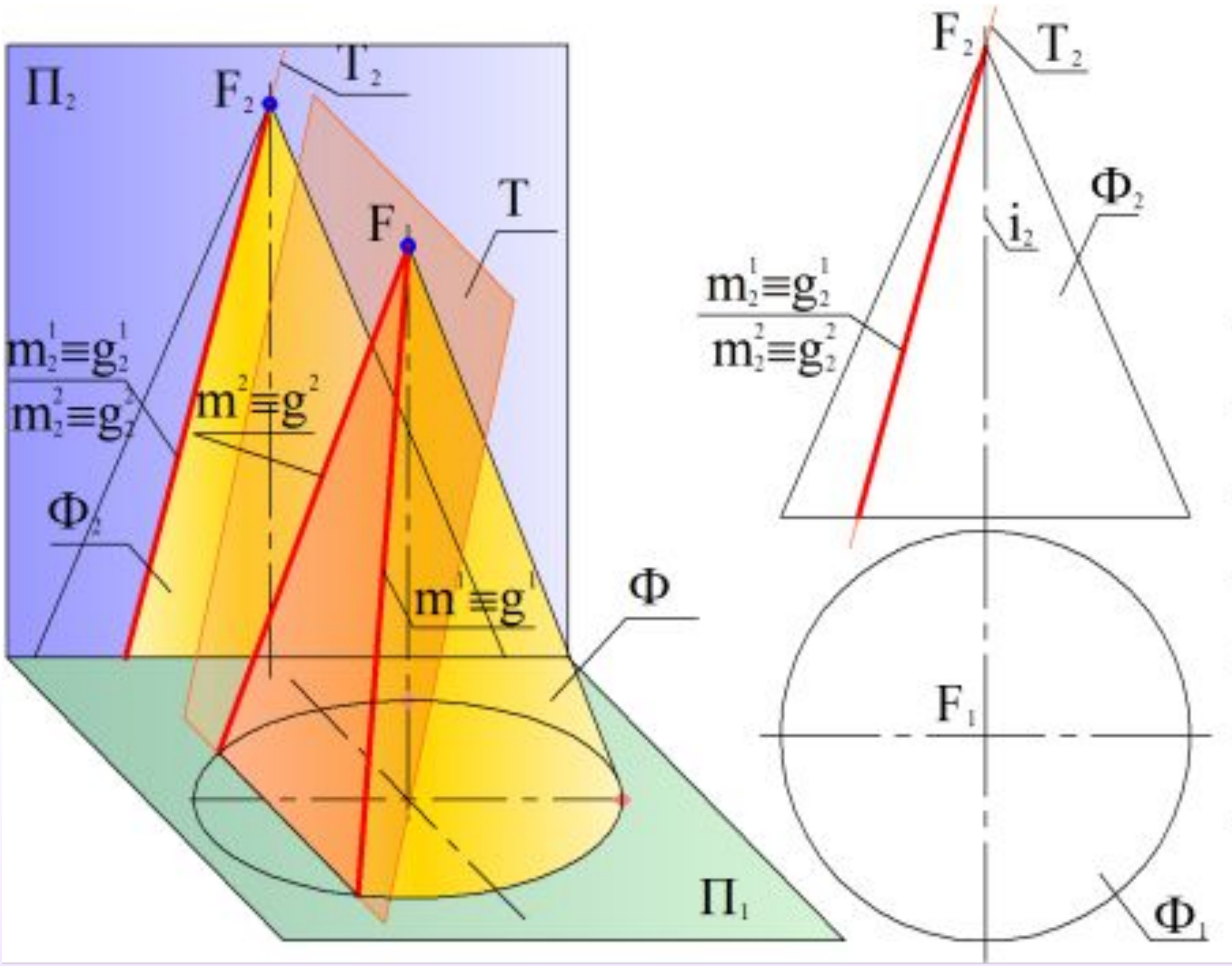
T $\perp$ ***i*****,** **m** $\cap$ ***g***^{n}, n=1,2,3,…, ∞

$\Rightarrow$ ***m*** – окружность



$T \perp \boldsymbol{i}$, $\mathbf{m} \cap \boldsymbol{g}^n$,
$n=1,2,3,\ldots,\infty$

$\Rightarrow$ ***m*** – эллипс

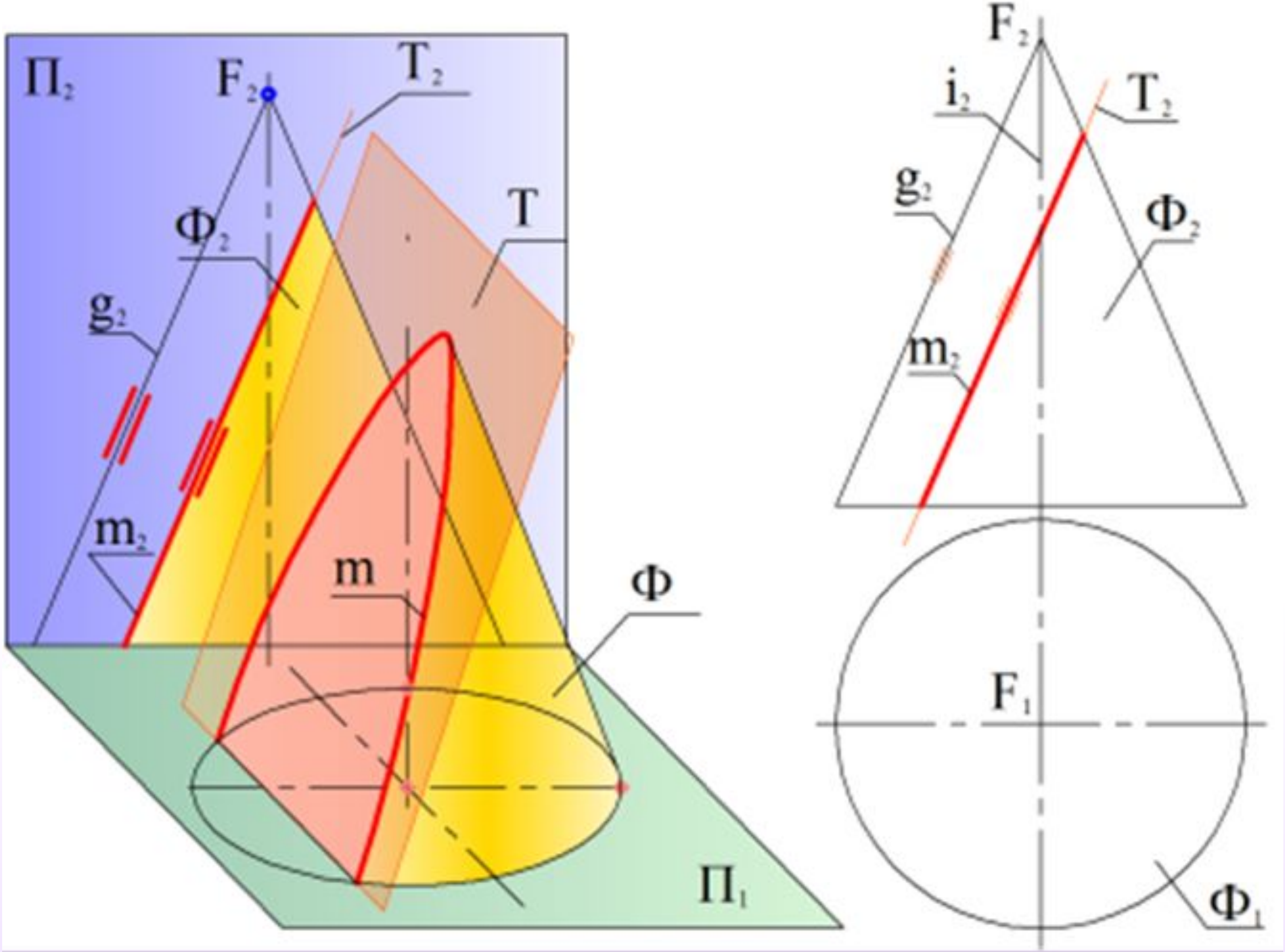


$F \in T$

⇒ ***m*** – две образующие

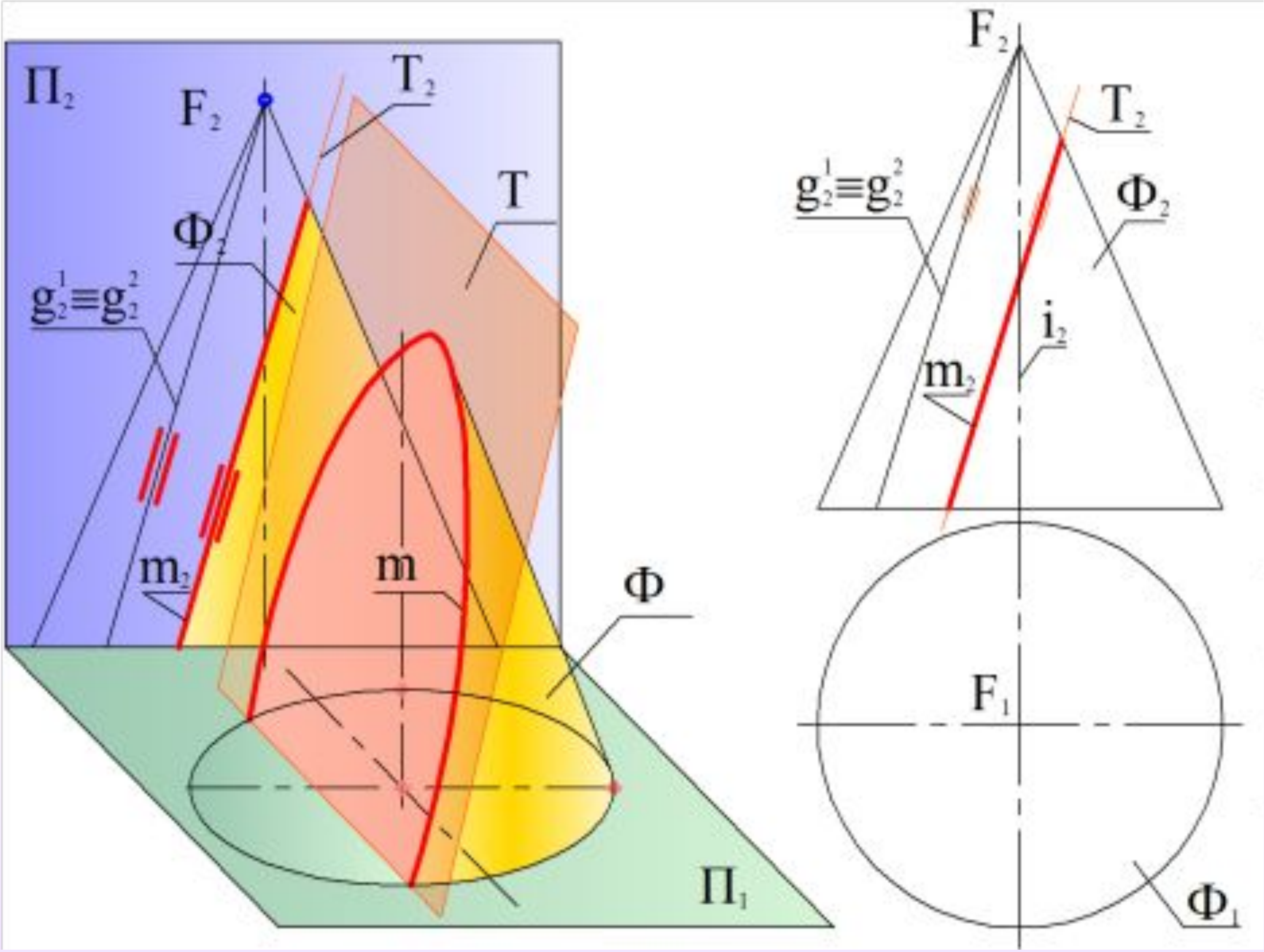
⇒ две прямые -

$m^1 \equiv g^1$ и $m^2 \equiv g^2$



T || *g*

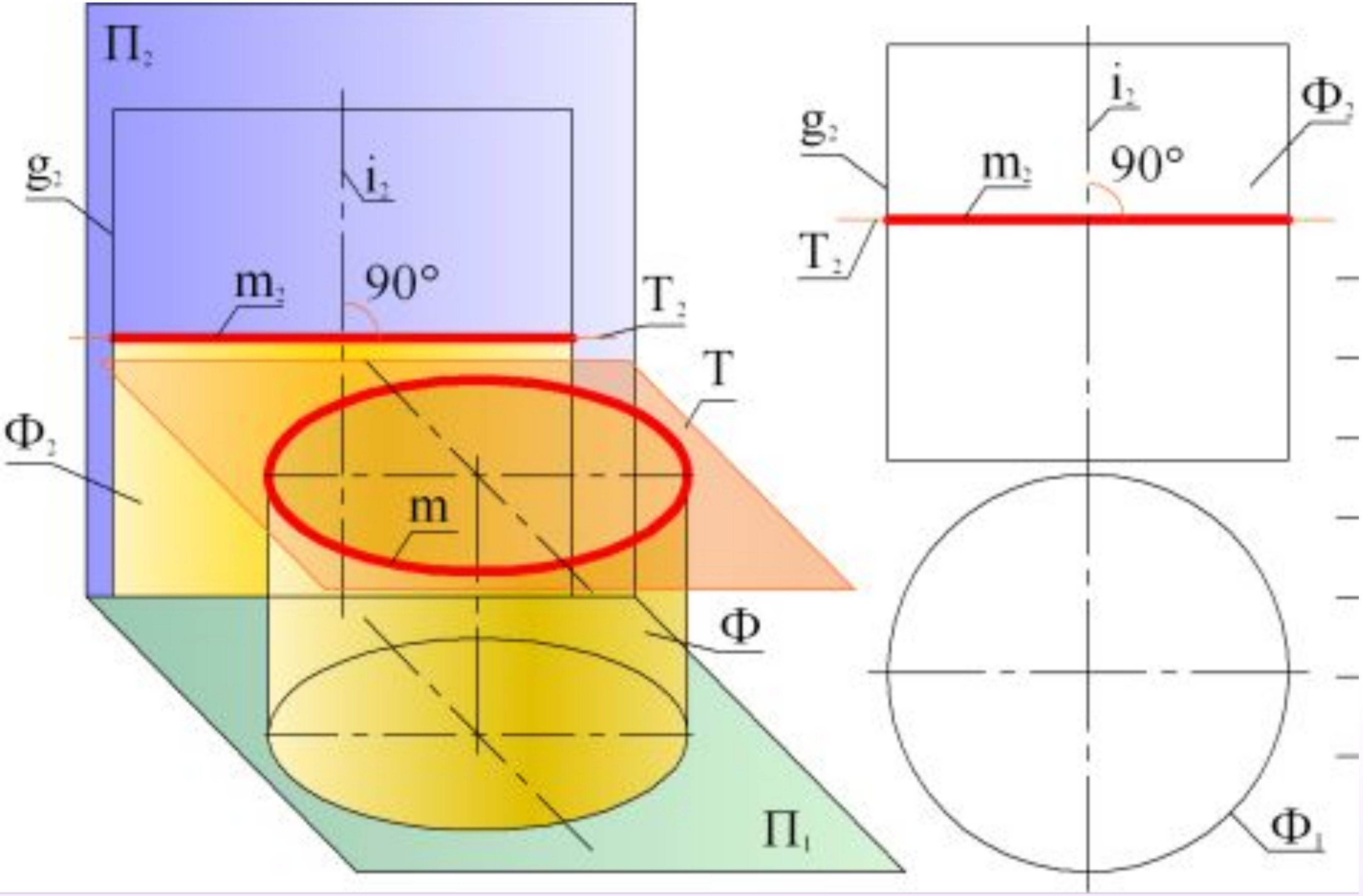
⇒ ***m*** – парабола



T || g^1 и T || g^2

⇒ ***m*** – гипербола

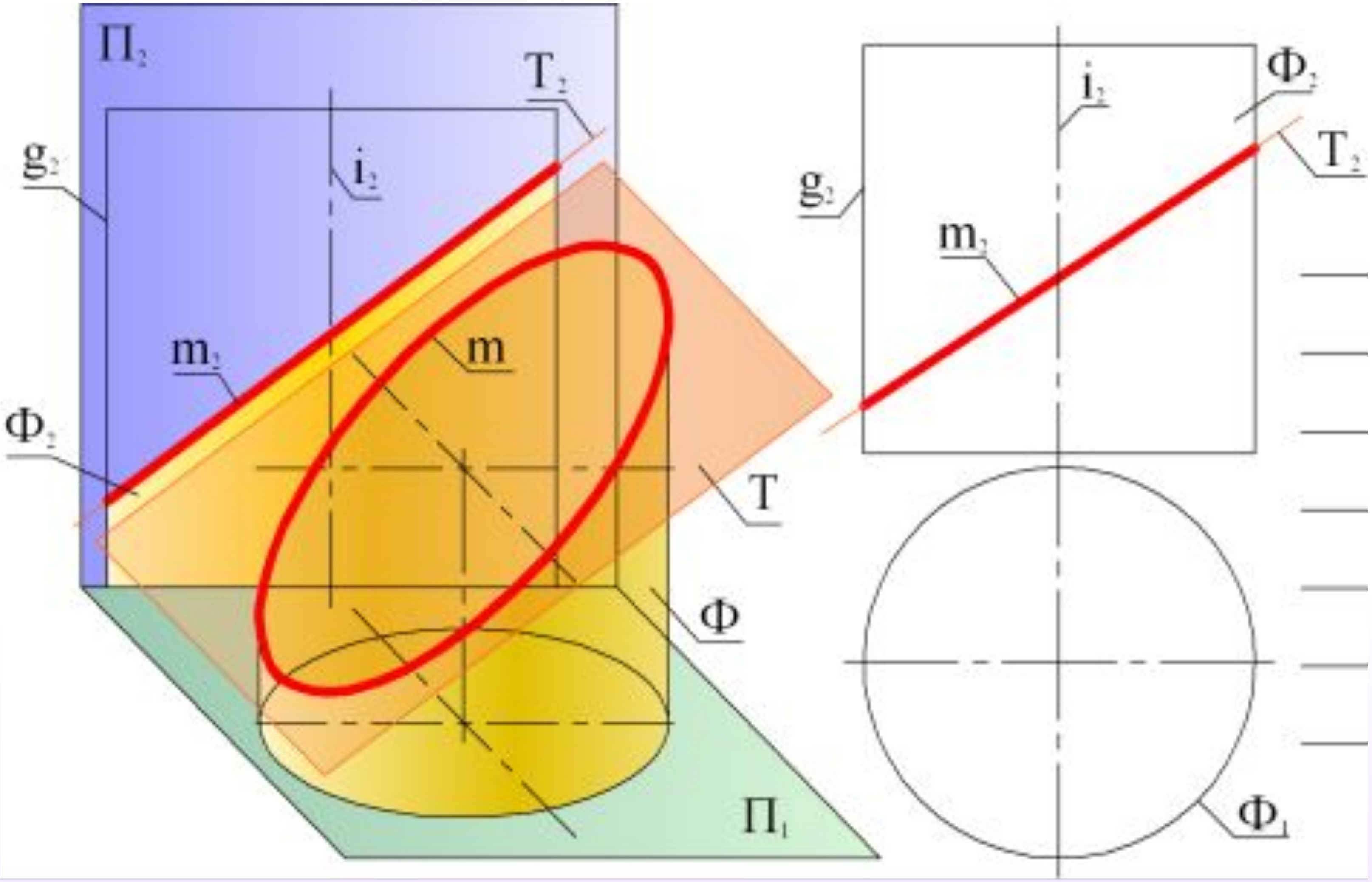
Пересечение цилиндрической поверхности плоскостью



T $\perp$ ***i*, m** $\cap$ ***g***^{n},

n=1,2,3,…,∞

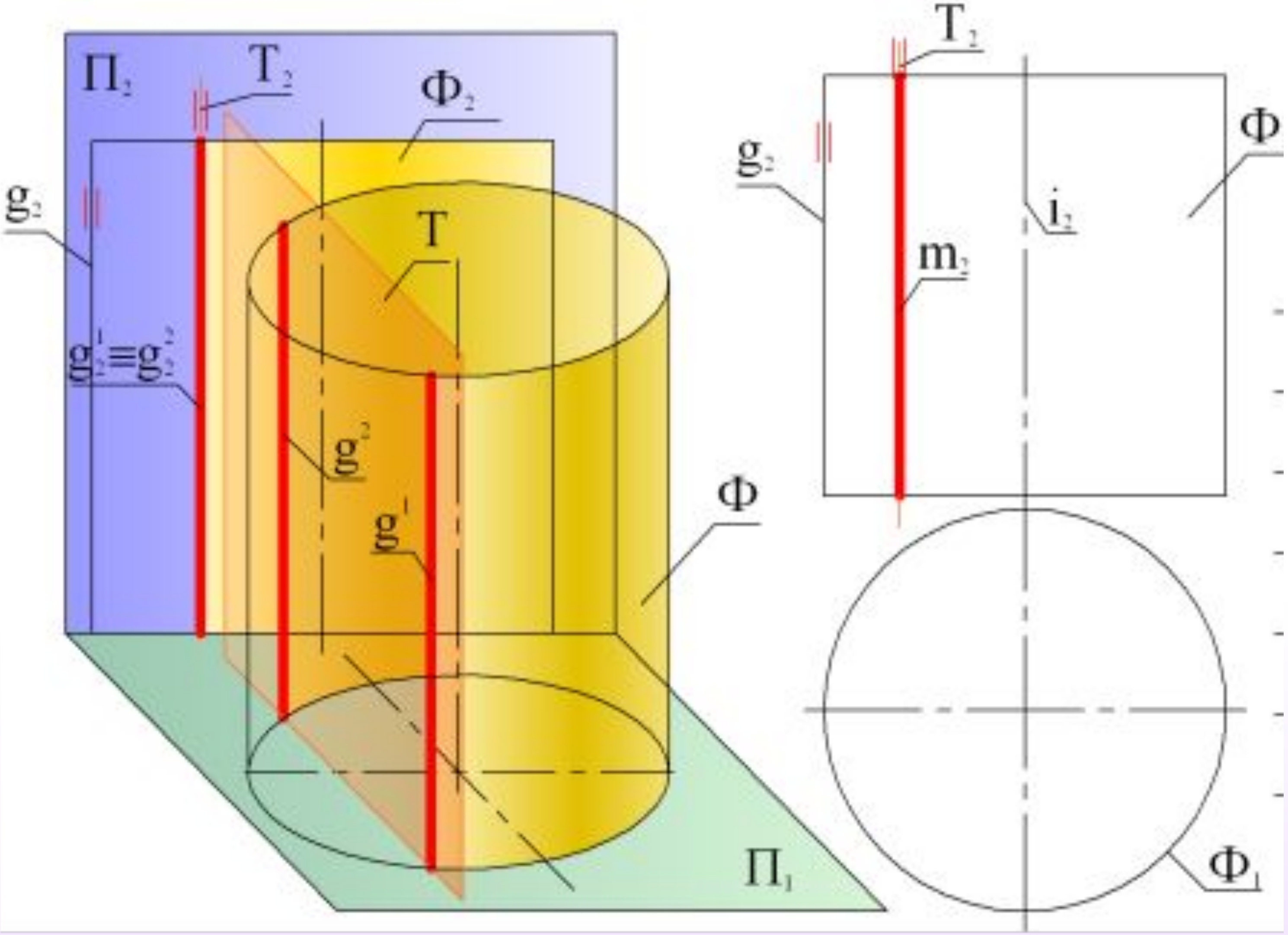
$\Rightarrow$ ***m*** – окружность



T $\perp$ ***i*** , **m** $\cap$ ***g***^{n},

n=1,2,3,…,∞

$\Rightarrow$ ***m*** – эллипс



$T \parallel g^n$, n=1,2,3,…,∞

⇒ ***m*** – две прямые – образующие

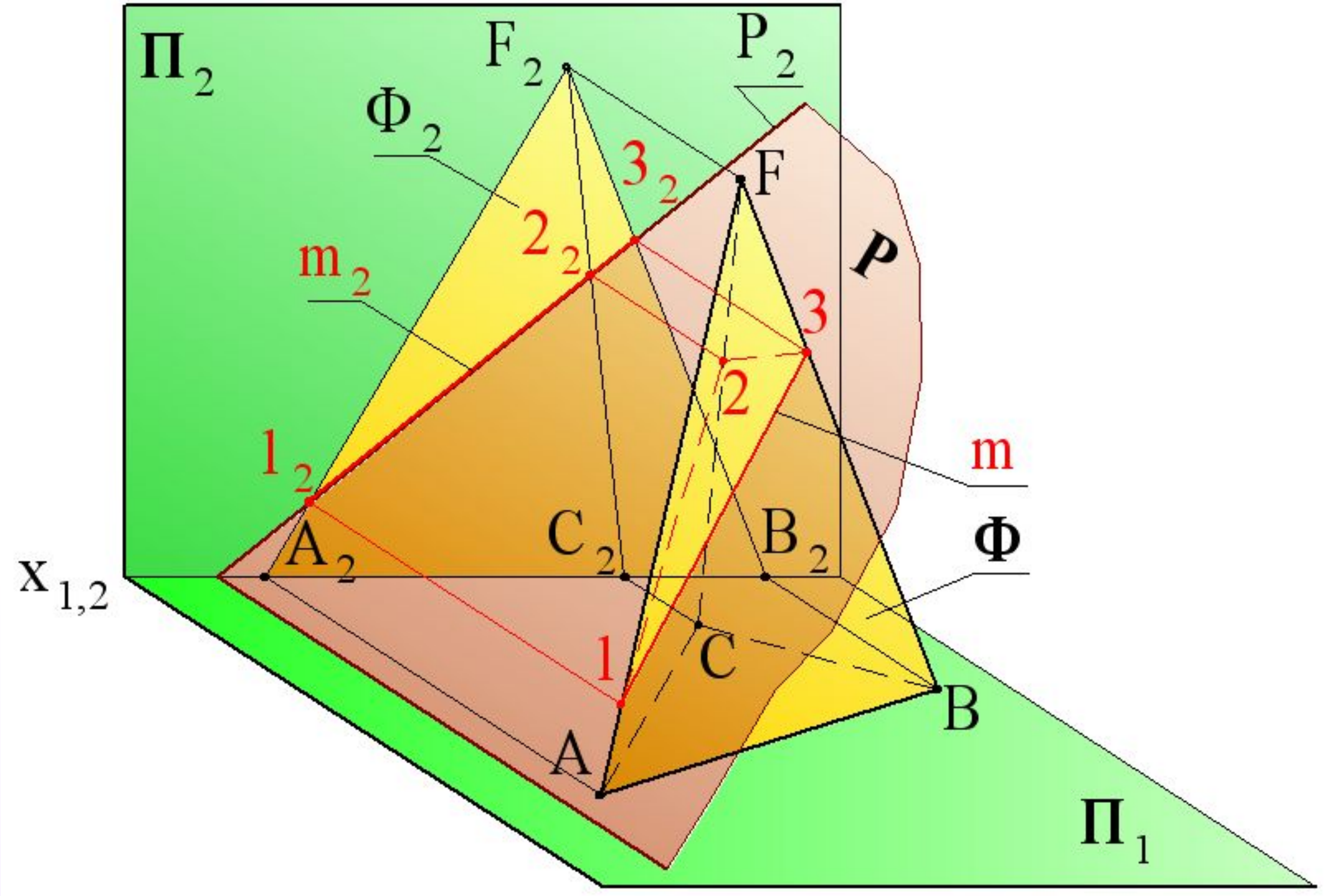
$m^1 \equiv g^1$ и ***$m^2 \equiv g^2$***

Пересечение гранной поверхности плоскостью

- При пересечении гранной поверхности плоскостью линия пересечения – это ломаная линия, каждый участок которой – отрезок прямой, представляющий собой линию пересечения грани поверхности с секущей плоскостью, а точки излома – точки пересечения ребер гранной поверхности (отрезков прямых) с той же секущей плоскостью.
- Следовательно, решение задачи на построение линии пересечения сводится к определению точек пересечения ребер гранной поверхности с принятой секущей плоскостью.

- Количество используемых точек линии пересечения плоскости с гранной поверхностью определяется количеством ребер гранной поверхности, пересекаемых секущей плоскостью.

- Часть этих точек являются габаритными точками и точками перехода видимости контура фигуры сечения на проекциях.



Π_2
F_2
P_2
Φ_2
3_2
F
2_2
P
m_2
3
2
m
1_2
Φ
A_2
C_2
B_2
$x_{1,2}$
1
C
B
A
Π_1