

СТАТИСТИКА.

Описательная статистика.

Лекция 2. Показатели вариации и способы их вычисления.

Автор: Равичев Л.В.

РХТУ им. Д.И.Менделеева

Кафедра управления технологическими инновациями

Москва - 2013

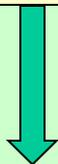
Размах (амплитуда) колебаний

Размах (амплитуда) колебаний (размах вариации) - это разность между наименьшей и наибольшей вариантой.

$$R = X_{\max} - X_{\min}$$

Пример. Даны два ряда набора чисел:

6, 10, 14, 26, 34



$$x_1 = \frac{90}{5} = 18$$

$$R_1 = 34 - 6 = 28$$

14, 16, 18, 20, 22.



$$x_2 = \frac{90}{5} = 18$$

$$R_2 = 22 - 14 = 8$$

Квартильное отклонение

Квартильное отклонение применяется вместо размаха вариации, чтобы избежать недостатков, связанных с использованием крайних значений.

$$d_k = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

где Q_1 и Q_3 – соответственно третья и первая квартили распределения.

Среднее линейное отклонение

Для несгруппированных данных:

$$\bar{d} = \pm \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$$

где

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Взвешенное линейное отклонение:

$$\bar{d} = \pm \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

где

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

Среднее квадратическое отклонение

Простое квадратическое отклонение:

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

где

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Взвешенное квадратическое отклонение:

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}}$$

где

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

Среднее квадратическое отклонение

Пример. Имеются следующие данные о распределении кип шерсти по весу при отгрузке:

Вес одной кипы, кг.	Количество отгруженных кип, шт.
86	10
90	20
94	10
96	30
100	15
110	15
ИТОГО	100

Требуется определить среднюю арифметическую простую и взвешенную, среднее квадратическое отклонение простое и взвешенное.

Среднее квадратическое отклонение (простое)

1. Средний вес одной кипы:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{86 + 90 + 94 + 96 + 100 + 110}{6} = 96 \text{ кг}$$

2. Среднее квадратическое простое отклонение:

Данные для расчета квадратичного отклонения

Вес одной кипы, кг.	Отклонение от среднего значения	Квадраты отклонений
86	-10	100
90	-6	36
94	-2	4
96	0	0
100	4	16
110	14	196
	-	Сумма = 352

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{352}{6}} = \pm 7,66 \text{ кг}$$

$$\text{Вес кипы} = 96 \pm 7,66 \text{ кг}$$

Среднее квадратическое отклонение (взвешенное)

Данные для расчета взвешенного квадратичного отклонения

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}}$$

Вес одной кипы, кг.	Количество	Общий вес, кг.	Отклонение от средней взвешенной	Квадраты отклонений	Произведение квадратов отклонений на количество
86	10	860	-10,3	106,09	1060,9
90	20	1800	-6,3	39,69	793,8
94	10	940	-2,3	5,29	52,9
96	30	2880	-0,3	0,09	2,7
100	15	1500	3,7	13,69	205,4
110	15	1650	13,7	187,69	2815,4
Сумма	100	9630	-	-	4931,1

Среднее квадратическое отклонение (взвешенное)

1. Средний вес одной кипы (взвешенный):

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{9630}{100} = 96,3 \text{ кг}$$

2. Среднее квадратическое отклонение (взвешенное):

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{4931,1}{100}} = \pm 7,02 \text{ кг}$$

$$\text{Вес кипы} = 96,3 \pm 7,02 \text{ кг}$$

Относительные показатели вариации

Коэффициент осцилляции:

$$K_R = \frac{R}{X} 100\%$$

Относительное линейное отклонение:

$$K_d = \frac{d}{X} 100\%$$

Относительный показатель квартильной вариации:

$$K_{d_k} = \frac{d_k}{M_e} 100\%$$



$$K_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2Q_2} 100\%$$

Коэффициент вариации

Коэффициент вариации представляет собой отношение среднего квадратического отклонения к средней арифметической и показывает величину отклонения (в процентах) от средней величины.

Простое квадратическое отклонение:

$$V_1 = \frac{\sigma}{x} 100\% \longrightarrow V_1 = \frac{7,66}{96} 100\% = 8,02\%$$

Взвешенное квадратическое отклонение:

$$V_2 = \frac{\sigma}{x} 100\% \longrightarrow V_2 = \frac{7,02}{96,3} 100\% = 7,29\%$$

Дисперсия

Дисперсия – это средний квадрат отклонения всех значений признака ряда распределения от средней арифметической



Общая дисперсия

Общая дисперсия характеризует вариацию признака под влиянием всех факторов, формирующих уровень признака у единиц данной совокупности.

$$D_x = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

где \bar{x} - общая средняя для всей изучаемой совокупности.

Межгрупповая дисперсия

Межгрупповая дисперсия отражает те различия в величине изучаемого признака, которые возникают под влиянием фактора, положенного в основу группировки.

$$D_{mg} = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - \bar{x})^2 m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

где \bar{x}_i - средняя по отдельной группе; m_i - число единиц в определенной группе.

Средняя внутригрупповая дисперсия

Средняя внутригрупповая дисперсия характеризует случайную вариацию, возникающую под влиянием других, неучтенных факторов, и не зависит от условия, положенного в основу группировки.

$$\overline{D}_{вг} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

где σ_i^2 - дисперсия по отдельной группе.

Правило сложения дисперсий

Величина общей дисперсии равна сумме межгрупповой дисперсии и средней внутригрупповой дисперсии.

$$D_X = D_{MG} + \bar{D}_{BG}$$

Пример №1. Имеются следующие данные о времени простоя автомобиля под разгрузкой:

№ пункта разгрузки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число грузчиков	3	4	4	3	3	4	4	4	3	4
Время простоя, мин.	12	10	8	15	19	12	8	10	18	8

Проверить закон сложения дисперсий.

Правило сложения дисперсий

Решение:

$$D_x = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

Время простоя под погрузкой, мин., x	Число выполненных разгрузок, f	$x \cdot f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$
8	3	24	-4	16	48
10	2	20	-2	4	8
12	2	24	0	0	0
15	1	15	3	9	9
18	1	18	6	36	36
19	1	19	7	49	49
Сумма	10	120	-	-	150

$$\bar{x} = \frac{120}{10} = 12 \text{ мин.}$$



$$\sigma^2 = \frac{150}{10} = 15$$

Правило сложения дисперсий

Расчет внутригрупповой дисперсии по первой группе
(число грузчиков, участвующих в разгрузке – 3)

Время простоя под погрузкой, мин., x	Число выполненных разгрузок, f	$x \cdot f$	$x - \bar{x}_1$	$(x - \bar{x}_1)^2$	$(x - \bar{x}_1)^2 \cdot f$
12	1	12	-4	16	16
15	1	15	-1	1	1
18	1	18	2	4	4
19	1	19	3	9	9
Сумма	4	64	-	-	30

$$\bar{x} = \frac{64}{4} = 16$$



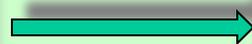
$$\sigma_1^2 = \frac{30}{4} = 7,5$$

Правило сложения дисперсий

Расчет внутригрупповой дисперсии по второй группе
(число грузчиков, участвующих в разгрузке – 4)

Время простоя под погрузкой, мин., x	Число выполненных разгрузок, f	$x \cdot f$	$x - \bar{x}_2$	$(x - \bar{x}_2)^2$	$(x - \bar{x}_2)^2 \cdot f$
8	3	24	-1,33	1,77	5,31
10	2	20	0,67	0,45	0,90
12	1	12	2,67	7,13	7,13
Сумма	6	56	-	-	13,34

$$\bar{x}_2 = \frac{56}{6} = 9,33 \text{ мин.}$$



$$\sigma_2^2 = \frac{13,34}{6} = 2,22$$

Правило сложения дисперсий

Средняя внутригрупповая дисперсия:

$$\overline{D}_{вг} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{7,5 \cdot 4 + 2,22 \cdot 6}{10} = 4,33$$

Межгрупповая дисперсия:

$$D_{мг} = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - \bar{x})^2 m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{(16 - 12)^2 \cdot 4 + (9,33 - 12)^2 \cdot 6}{10} = 10,67$$

Общая дисперсия:

$$D_x = D_{мг} + D_{вг} = 10,67 + 4,33 = 15,00$$

Правило сложения дисперсий

Пример №2. Имеются следующие данные о результатах обследования рабочих предприятия по размеру месячной заработной платы:

Группы рабочих по возрасту, лет	Число рабочих	Дисперсия заработной платы
До 20	100	300
20-30	120	400
30 и старше	150	500

Общая дисперсия заработной платы в обследованной совокупности рабочих составила 450. Определить, в какой степени вариация заработной платы рабочих предприятия зависит от возраста.

Правило сложения дисперсий

Решение.

Средняя внутригрупповая дисперсия характеризует случайную вариацию под влиянием неучтенных факторов:

$$\bar{D}_{вг} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{300 \cdot 100 + 400 \cdot 120 + 500 \cdot 150}{100 + 120 + 150} = 413,5$$

Межгрупповая дисперсия отражает систематическую вариацию под влиянием фактора, положенного в основу группировки (возраста рабочих):

$$D_{мг} = D_x - \bar{D}_{вг} = 450 - 413,5 = 36,5$$

Соотношение дисперсий:

$$\frac{D_{мг}}{D_x} = \frac{36,5}{450} = 0,08 \text{ (8\%)}$$

Преобразование формулы для расчёта общей дисперсии

Формула для расчёта общей дисперсии может быть преобразована:

$$D_x = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \xrightarrow{f_i = 1} D_x = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$D_x = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n [x_i^2 - 2x_i \bar{x} + (\bar{x})^2]}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n(\bar{x})^2}{n}$$

Учитывая, что $\sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$, и разделив полученное выражение на n , получаем:

$$D_x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2(\bar{x})^2 + (\bar{x})^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2$$

Преобразование формулы для расчёта общей дисперсии

Пример. Дисперсия признака равна 600. Объем совокупности равен 10. Сумма квадратов индивидуальных значений признака равна 6250. Найти среднюю величину.

$$D_x = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$$



$$\overline{x} = \sqrt{\overline{x^2} - D_x}$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = \frac{6250}{10} = 625$$



$$\overline{x} = \sqrt{625 - 600} = 5$$

Вариации альтернативного признака

Альтернативный признак – качественный признак, имеющий две взаимоисключающие разновидности. Альтернативный признак принимает всего два значения: 1 – наличие признака; 0 – отсутствие признака.

$$p + q = 1$$

где p - доли единиц, обладающих признаком; q - доли единиц, не обладающих признаком.

Среднее значение альтернативного признака:

$$\bar{x} = \frac{(1 \cdot p) + (0 \cdot q)}{p + q} = p$$

Дисперсия альтернативного признака:

$$D_{an} = \frac{(1 - p)^2 \cdot p + (0 - p)^2 \cdot q}{p + q} = p \cdot q$$

Вариации альтернативного признака

Пример. Удельный вес основных рабочих в трех цехах предприятия составил: 80, 75 и 90% общей численности рабочих. Определить дисперсию и среднее квадратическое отклонение доли основных рабочих по предприятию в целом, если численность всех рабочих трех цехов составила соответственно 100, 200 и 150 человек.

Решение.

1. Общая численность основных рабочих по предприятию:

$$\sum_{i=1}^n m_{oi} = 100 \cdot 0,8 + 200 \cdot 0,75 + 150 \cdot 0,9 = 365 \text{ чел.}$$

2. Доля основных рабочих по предприятию:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^n m_{oi}}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{365}{100 + 200 + 150} = \frac{365}{450} = 0,811$$

3. Дисперсия альтернативного признака:

$$D_{an} = p \cdot q = p \cdot (1 - p) = 0,811 \cdot (1 - 0,811) = 0,1533$$

4. Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D_{an}} = \sqrt{0,1533} = 0,3915$$