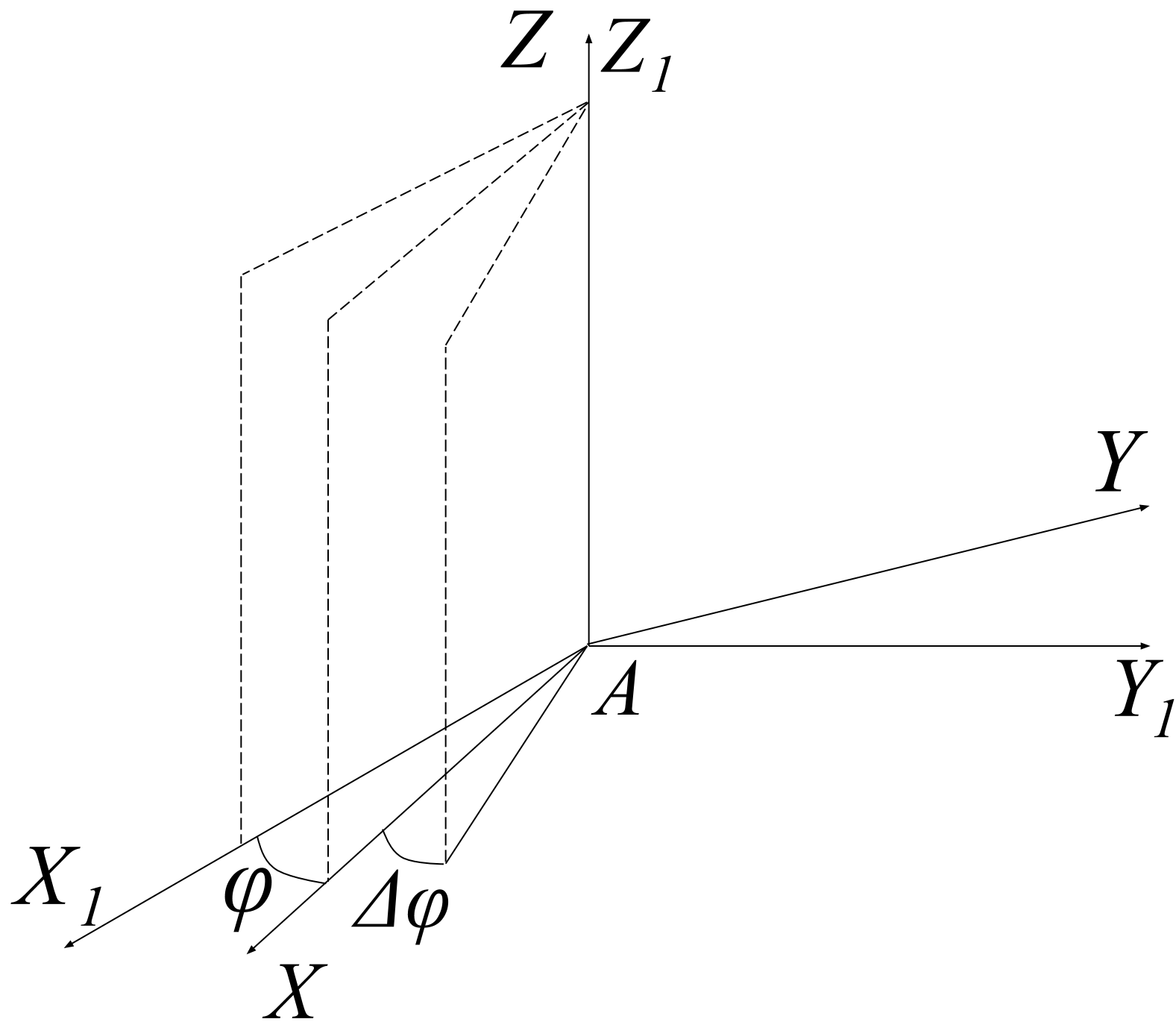


# Механика 2

# Вращательное движение твердого тела

- Вращательное движение твердого тела – это такое движение при котором какие-нибудь две точки остаются неподвижными.
- Проходящая через эти точки прямая называется осью вращения.



# Вращательное движение твердого тела

$$\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$$

$$\left(\omega_z\right)_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{средняя угловая скорость}$$

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad \text{угловая скорость}$$

# Вектор угловой скорости и ускорения

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{k} = \omega_z \mathbf{k}$$

Вектор угловой скорости- это вектор численно равный первой производной по времени от закона изменения угла поворота, направленный по оси вращения в ту сторону, чтобы глядя с конца вектора угловой скорости вращение происходило бы против часовой стрелки.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt} \mathbf{k} = \varepsilon_z \mathbf{k}$$

Вектор углового ускорения- это вектор численно равный первой производной по времени угловой скорости,

# Скорость точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Рассмотрим векторное произведение для скорости, если начало координат лежит на оси вращения

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

Формула Эйлера

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

# Вектор угловой скорости и ускорение

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

Определение скорости, через вектор угловой скорости

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

Ускорение

$$\vec{a} = \left[ \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right] + [\vec{\omega}, \vec{v}]$$

$$[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B})$$

$$\vec{a} = [\vec{\epsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]$$

$$\vec{a} = [\vec{\epsilon}, \vec{r}] + \vec{\omega}(\vec{r}\vec{\omega}) - \vec{r}(\vec{\omega}\vec{\omega})$$

$$\text{если } \vec{r} \perp \vec{\omega}$$

$$\vec{a} = \tau * (\omega r) + n * (\omega^2 r)$$

$$|\vec{r}| = r$$

# Первый закон Ньютона

Существуют такие инерциальные системы отсчёта, относительно которых материальные точки, когда на них не действуют силы (или действие сил уравновешено), находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.



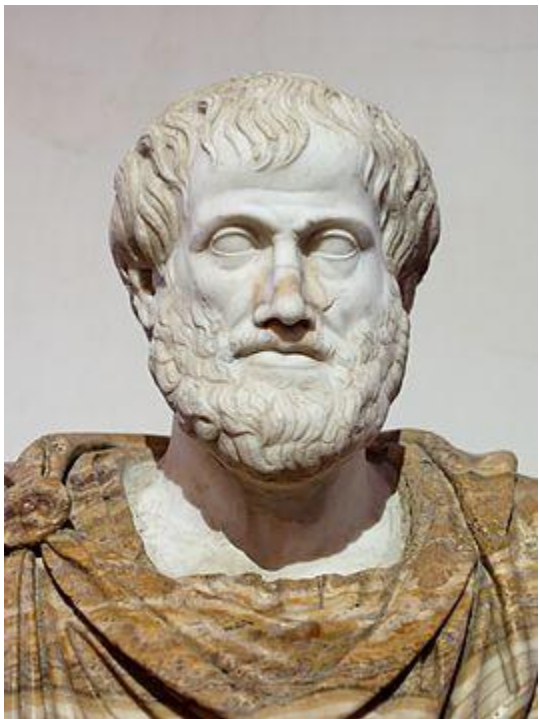
# Понятие силы

- Сила причина движения (Аристотель)
- Сила причина ускорения (Галилей)

Сила — это векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры.

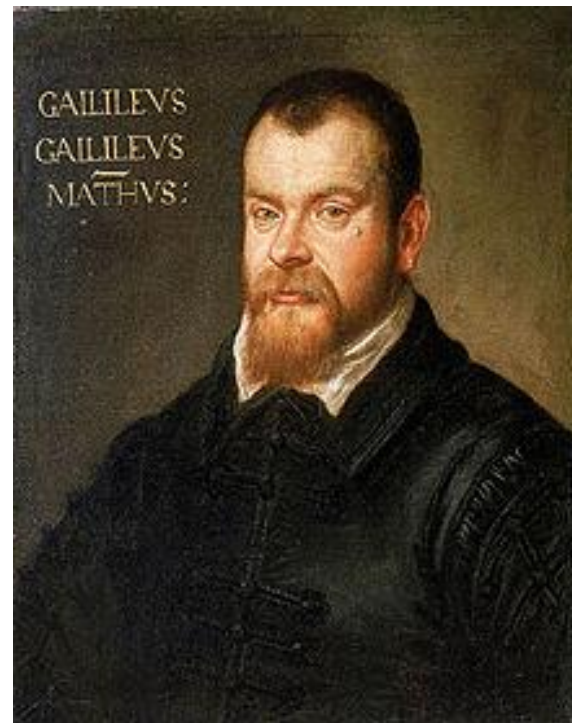
$$[H] = [L / T^2 M]$$

# Классики механики



Аристотель 382-322 д.н.

Э



Galileo Galilei 1562-1642

# Силы в природе

## Фундаментальные взаимодействия

Тип взаимодействия	Источник	Константа взаимодействия	Радиус действия (м)
Гравитационное	Масса	$10^{-38}$	$\infty$
Электромагнитное	Электрически заряженные частицы	$10^{-2}$	$\infty$
Сильное	Частицы, входящие в состав ядер (протоны, нейтроны)	1	$10^{-15}$
Слабое	Элементарные частицы	$10^{-14}$	$10^{-18}$

# Неинерциальность систем отсчета

Ускорения из-за вращения земли вокруг оси  $a_{земля} = R_{сут} \omega^2 \sim 0.032 \text{ m/s}^2$

$$\omega_{сут} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 * 3600} = 7.3 * 10^{-5} \text{ c}^{-1} \quad R_{земля} = 6500$$

Ускорения из-за вращения земли вокруг солнца  $a_{орб} = R_{год} \omega^2 \sim 0.0055 \text{ m/s}^2$

$$R_{орб} \approx 150 \text{ км}$$

Ускорения из вращения нашей галактики  $< 0.000001 \text{ m/s}^2$

# Понятие группы Галилея

Набор преобразований какого-либо множества называется группой, если вместе с любыми двумя преобразованиями он содержит результат их последовательного применения, а вместе с каждым преобразованием — обратное преобразование.

Преобразование Галилея будет:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t$$

$$t = t'$$

$\vec{r}$  - радиус вектор в неподвижной инерциальной системе отсчета (ИСО).

$\vec{r}'$  - радиус вектор в движущейся ИСО.

$\vec{u}$  - скорость движущейся ИСО

# Второй закон Ньютона

В инерциальных системах отсчёта ускорение материальной точки прямо пропорционально действующей на нее силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально ее массе.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)}{m}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}{m}$$

-дифференциальное уравнение 2-ого  
порядка,  
-уравнение движения материальной точки .

# Масса

**Масса** тела — физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные (**инертная масса**) и гравитационные (**гравитационная масса**) свойства.

Обобщенный закон  
Галилея -

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_{gr}}{m_{in}} \propto \frac{m_{gr}}{m_{in}}$$

$$[kg] = [M]$$



Friedrich Bessel  
1784 -1846

# Импульс

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{p}_{sum} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

Импульс системы (суммирование по i)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Общая форма второго закона  
Ньютона

$$[кг * м / с] = [M \frac{L}{T}]$$



# Третий закон Ньютона

Силы , которые действуют между материальными точками равны по модулю, противоположны по направлению и параллельны прямой, которая их соединяет.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

# Закон сохранения импульса

- Для системы из двух материальных

$$\frac{dp_1}{dt} = F_{12} + f_1$$

$$\frac{dp_2}{dt} = F_{21} + f_2$$

$F_{12}$  – сила, действующая на материальную точку с стороны точки 2

$F_{21}$  – сила, действующая на материальную точку с стороны точки 1

$f_1$  и  $f_2$  – внешние силы

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = f_1 + f_2$$

$$f_1 = f_2 \equiv 0 \rightarrow$$

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = 0 \quad \frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = 0$$

$$F_{12} = -F_{21}$$

$$p_1 + p_2 = p_{const}$$

# Закон сохранения импульса

- Для системы из N материальных точек

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1N} + \vec{f}_1$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{22} + \dots + \vec{F}_{2N} + \vec{f}_2$$

.....

$$\frac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \dots + \vec{F}_{NN-1} + \vec{f}_N$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i$$

$$\vec{f}_1 = \vec{f}_2 = \dots = \vec{f}_N \equiv 0$$



$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \text{const}$$

# Теорема о движении центра масс

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i m_i}{M}$$

Центр масс  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  масса системы

$$M \vec{a} = \sum_{i=1}^N \vec{a}_i m_i$$

- Ускорение центра масс

$$M \vec{a} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

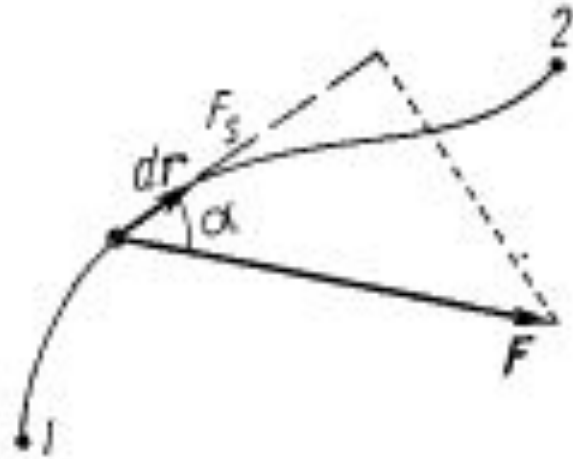
$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i$$

- с прошлого слайда

$$M \vec{a} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i$$

*Центр масс механической системы движется, как материальная точка с массой, равной массе системы, под действием только суммы внешних сил*

# Механическая работа



$d\vec{r}$  – элементарное перемещение, в пределах которого сила  $\vec{F}$  постоянна  
 $F_s$  – проекция силы на направление перемещения

$$|d\vec{r}| = ds$$

Элементарная работа силы  $\vec{F}$  на перемещении  $d\vec{r}$

$$dA = (F \cdot dr) = F \cdot ds \cdot \cos \alpha = F_s ds$$

$$[A] = \text{Дж}$$

# Работа силы и кинетическая энергия материальной точки

Скалярное произведение силы на перемещение:

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$$

Пусть сила действует на материальную точку, найдем дифференциал работы:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v} = m \vec{v} \cdot d\vec{v} = d \frac{m\vec{v}^2}{2} = dK$$

Кинетическая энергия материальной точки называется:

$$K = \int dK = \frac{m\vec{v}^2}{2}$$

# Кинетическая энергия системы материальных точек

Одной материальной точки:

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

Системы N материальных точек:

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}$$

# Столкновения

Абсолютно упругий удар — столкновение двух тел, в результате которого полная кинетическая энергия сохраняется.

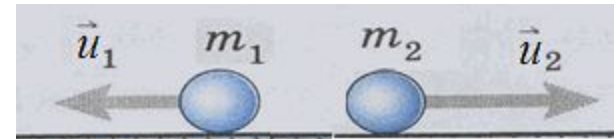
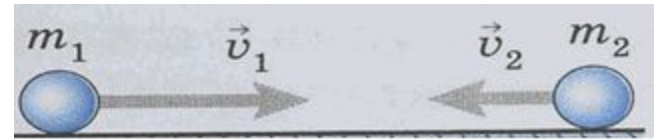
Центральный удар, когда тела после удара движутся по прямой, проходящей через их центры масс.

Абсолютно неупругий удар — столкновение двух тел, в результате которого тела приобретают одинаковую скорость (движутся, как единое целое).



# Примеры

Упругое центральное  
столкновение:



$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = -m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad \begin{matrix} \text{ЗС} \\ \text{И} \end{matrix}$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \quad \begin{matrix} \text{ЗС} \\ \text{Э} \end{matrix}$$

$$m_1 (v_1 + u_1) = m_2 (u_2 + v_2) \quad \begin{matrix} \text{ЗС} \\ \text{П} \end{matrix}$$

$$m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2) \quad \begin{matrix} \text{ЗС} \\ \text{Э} \end{matrix}$$

$$m_1 / m_2 (v_1 + u_1) = (u_2 + v_2) \quad (v_1 - u_1) = (u_2 - v_2)$$

$$u_1 = \frac{(2v_2 + v_1)m_2 - m_1 v_1}{(m_1 + m_2)}$$

$$u_2 = \frac{(2v_1 + v_2)m_1 - m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}$$

Случай равных  
масс:  $m_1 = m_2$

$$u_1 = v_2$$

$$u_2 = v_1$$

Случай столкновения с  
движущейся стенкой:

$$m_2 \rightarrow \infty$$

$$u_1 = 2v_2 + v_1$$

$$|\Delta p| = |2v_2 + 2v_1| m_1$$

$$u_2 = -v_2$$

# Пример

Упругое не центральное столкновение двух одинаковых шаров

$$m\vec{V}_1 = m\vec{U}_1 + m\vec{U}_2 \quad \begin{array}{l} \text{ЗС} \\ \text{И} \end{array}$$

$$\frac{m\vec{V}_1^2}{2} = \frac{m\vec{U}_1^2}{2} + \frac{m\vec{U}_2^2}{2} \quad \begin{array}{l} \text{ЗС} \\ \text{Э} \end{array}$$

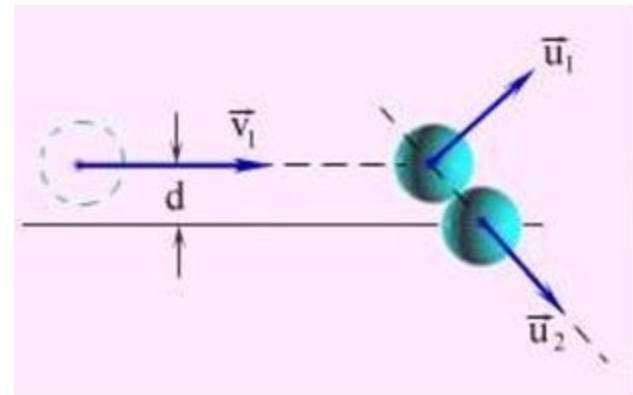


$$\vec{V}_1 = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$$

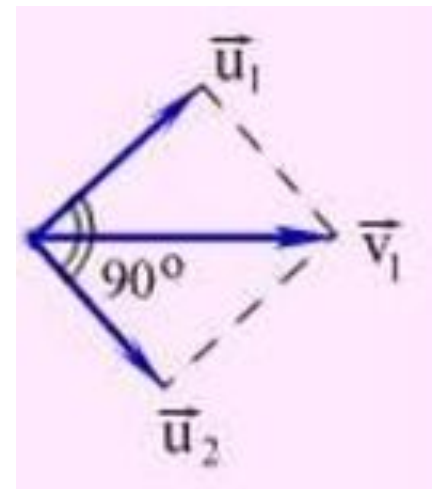
$$\vec{V}_1^2 = \vec{U}_1^2 + \vec{U}_2^2$$

Вектора образуют треугольник

Этот треугольник прямоугольный



Один шар налетает на другой



# Кинетическая энергия системы материальных точек

Одной материальной точки:

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

Системы N материальных точек:

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}$$

# Теорема Кёнига

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i'^2}{2} + \frac{M v_M^2}{2}$$

$$v_i = v_i' + v_M$$

$v_M$  - скорость движения центра масс

$v_i'$  - скорость точки  $i$  в системе центра масс

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad \text{- полная масса}$$

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i (v_i' + v_M)^2}{2}$$

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i'^2}{2} + \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_M^2}{2} + 2 \sum_{i=1}^N \frac{(v_M m_i v_i')}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i'^2}{2} + \frac{M v_M^2}{2}$$

$$2 \sum_{i=1}^N \frac{(v_M \cdot m_i v_i')}{2} = (v_M \cdot \sum_{i=1}^N m_i v_i') \equiv 0$$



Johann König  
1712 - 1757

# Мощность

Мощность – скалярная величина, равная работе силы, совершаемой за единицу времени; (характеризует скорость, с которой совершается работа) .

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad [N] = \text{Дж/с} = \text{Вт (СИ)}$$

1 л.с. = 735 Вт

Средняя мощность работы постоянной силы:

$$N = (\vec{F} \cdot \vec{v}_{cp})$$

# Консервативные силы

Стационарное поле – поле сил, остающееся постоянным со временем.

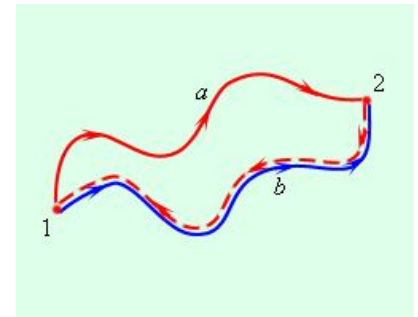
Консервативные силы – силы, работа которых не зависит от формы пути, по которому перемещается тело, а определяется только начальным или конечным положением тела 1 и 2.

Потенциальное поле – поле, в котором действуют консервативные силы.

Работа консервативных сил на замкнутом контуре равна нулю.

$$A_{12a} = A_{12b}; \quad A_{21a} = -A_{21b};$$

$$A_{\text{замкн}} = 0$$



# Центральные силы

Центральные силы – силы, зависящие только от расстояния между взаимодействующими частицами и направленные вдоль прямой, соединяющей эти частицы (гравитационные, кулоновские, упругие).

Все центральные силы являются консервативными! Т.е. работа центральных сил не зависит от формы пути, по которому перемещается тело.

# Потенциальная энергия

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F_s ds$$

Так как работа консервативных сил зависит только от начального и конечного положений тела, то существует скалярная функция, определяющая положение тел, убыль которой равна работе.

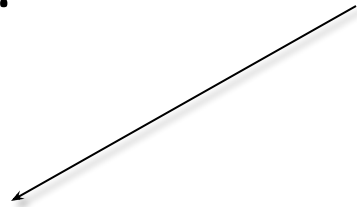
$$A = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

$U$  – потенциальная энергия.

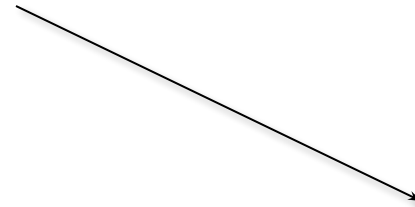


# Энергия

Энергия- скалярная физическая величина, характеризующая способность тел совершать работу.



Кинетическая энергия  
- энергия  
механического  
движения тела.



Потенциальная  
энергия – энергия,  
зависящая от  
положения тела в  
потенциальном поле  
сил.