ТЕМА 1. ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ ПЛАН

1. Логика финансовых вычислений.
2. Формула наращения.
3. Практика расчета процентов для краткосрочных ссуд.
4. Переменные ставки.
5. Реинвестирование по простым ставкам.
6. Дисконтирование по простым процентным ставкам.
7. Учет векселей.
8. Наращение по учетной ставке.

1. Логика финансовых вычислений.

Финансовая математика изучает методы и методики определения стоимостных и вре-

менных параметров финансовых операций. **Объект** финансовой математики – финансо-

вые операции и их обоснование, направленное на извлечение прибыли. **Предмет** фи-

нансовой математики – оценки показателей эффективности финансовых операций, а

также доходов отдельно взятых участников сделок, определяемых в виде процентных

ставок, доходов и дивидендов, курсов валют и прочее.

Финансовая математика охватывает определенный круг **методов вычислений**, необхо-

димость в которых возникает, когда оговаривают конкретные значения параметров

Методы финансовой математики чаще всего **применяют** при решении следующих

практических задач:

вычисление конечных сумм, находящихся во вкладах путем начисления процентов;

учет ценных бумаг;

установление взаимосвязи между отдельными параметрами сделки и определение

параметров сделки;

определение эквивалентности параметров сделки;

анализ последствий изменения условий финансовой операции;

разработка планов выполнения финансовых операций;

расчет показателей доходности финансовых операций.

К внутренним факторам относя те **факторы**, которые **определяют**:

основные характеристики финансового процесса;

контрактные характеристики сделки (например, способ начисления процентов в

сделках;

характеристики, определяющие начальные условия сделки (например, инвестируемый

капитал).

К внешним относят факторы, определяющие рыночную среду, т.е. условия, в которых

протекает финансовый процесс (например, фактор времени, текущие и будущие

рыночные цены, инфляция, конкуренция на рынке финансовых ресурсов,

фактор риска).

2. Формула наращения.

В основе финансовой математики лежит понятие **временной стоимости**, т.е. **принцип**

неравноценности денег, относящихся к различным моментам времени.

Явление неравноценности двух одинаковых по величине, но различных во времени по-

лучения денежных сумм обусловлено рядом причин. Например, даже при небольшой

инфляции покупательная способность денег со временем снижается; или любая имею-

щаяся в наличии денежная сумма может быть инвестирована и спустя некоторое время

принести доход.

В финансовых расчетах учет фактора времени осуществляется с помощью методов

Процесс, в котором по **первоначальной** сумме и процентной ставке необходимо найти

ожидаемую в будущем к получению сумму, называют **процессом наращения**.

Процесс, в котором по **заданной ожидаемой в будущем** к получению сумме и процент-

ной ставке необходимо найти **первоначальную** сумму, называют **процессом**

дисконтирования.

Под **наращенной** суммой ссуды (долга, депозита и других видов выданных в долг или

инвестированных денег) понимают **первоначальную** ее сумму **с** начисленными **процен**-

тами к концу срока начисления.

К **наращению по простым процентам** обычно прибегают при выдаче **краткосрочных**

ссуд (на срок до 1 года) **или в случае, когда проценты не присоединяются к**

Примем **обозначения**:

I – проценты за весь срок ссуды

P – первоначальная сумма

S – наращенная сумма, т.е. сумма к концу срока

i – ставка наращения процентов (выражается десятичной дробью)

n – срок ссуды

Обычно **срок** измеряется в **годах**, поэтому **«i»** обозначает **годовую процентную ставку**.

Под **процентными деньгами или процентами** понимается **величина дохода**, полу-

чаемая в результате финансовой операции, т.е. $I = S - P$

Ставка наращения процентов «**i**» определяется отношением процентных денег к

величине первоначального капитала, т.е.

$$i = \frac{S - P}{P}$$

Ставку наращения процентов называют **процентной ставкой**.

Каждый год приносит проценты в сумме « **Pi** ». Если «**n**» - срок начисления, то начис-

ленные за весь срок проценты составят **I = Pni**.

Наращенная сумма находится так:

$$\mathbf{S = P + I = P + Pni = P(1 + ni)}$$

или **S = P(1 + ni)** ....(1)

Это выражение называют формулой наращения по простым процентам

(или формулой простых процентов).

Множитель **(1 + ni)** называют **множителем наращения простых процентов**.

Пример.

Вкладчик положил в банк, выплачивающий в год простые проценты по ставке 20%

годовых, сумму 7000 руб. Какая сумма будет на его счету через: а) год? б) полгода?

в) три года? г) пять лет и три месяца?

Решение

а) $n = 1$, $P = 7000$, $i = 20\%$ $S = P(1 + i) = 7000\,(1 + 0{,}2) = 8400$ руб.

б) $n = 0{,}5$, $P = 7000$, $i = 20\%$ $S = P(1 + i) = 7000\,(1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2) = 7700$ руб.

в) $n = 3$, $P = 7000$, $i = 20\%$ $S = P(1 + i) = 7000\,(1 + 3 \cdot 0{,}2) = 11200$ руб.

г) $n = 5{,}25$, $P = 7000$, $i = 20\%$ $S = P(1 + i) = 7000\,(1 + 5{,}25 \cdot 0{,}2) = 14350$ руб.

3. Практика расчета процентов для краткосрочных ссуд.

Так как процентная ставка, как правило, устанавливается в расчете за год, то при сроке

ссуды менее года необходимо определить, какая часть годового процента уплачивает-

ся кредитору. Возможны случаи, когда срок ссуды меньше периода начисления.

Рассмотрим наиболее распространенный в практике случай – с годовыми периодами

начисления. Тогда срок ***n*** вычисляется по формуле:

$$n = \frac{t}{K}$$

t – число дней ссуды; **К** – число дней в году (или временная база начисления

процентов).

При расчете процентов применяют две временные базы:

К = 360 дней (12 месяцев по 30 дней)

На практике используют **три варианта расчета простых** процентов:

1. Английский: точные проценты с точным числом дней ссуды.

Обозначается **365/365**. Данный способ применяется центральными банками многих

стран и крупными коммерческими банками, например, Великобритании, США.

2. Французский: обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды.

Обозначается **365/360**. Этот вариант распространен в ссудных операциях коммерчес-

ких банков между странами, а также внутри стран Франции, Бельгии, Швейцарии.

3. Немецкий: обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.

Обозначается **360/360**. Этот вариант применяется, например, при промежуточных

Пример.

Ссуда в размере **500000** руб. выдана **20 января** до **5 октября** включительно под **18%** го-

довых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока при начислении **простых**

процентов? При решении применить все три варианта расчета процентов.

Решение

Определим число дней ссуды. **Точное**: **258**, так как в таблице «Порядковые номера

дней в году» **20 января имеет номер «20», а 5 октября – номер «278»**. Значит, всего

дней **278 – 20 = 258 дней**.

Приближенное: 255. Считаем так: с **20 января по 20 сентября всего 8 месяцев**, т. е.

30 • 8 = 240 дней; с **21 сентября по 5 октября – всего 15 дней**.

Значит, получим – **240 + 15 = 255 дней**

1. **365/365** – **точные проценты с точным числом дней** ссуды

$$S = 500000(1 + \frac{258}{365} \bullet 0,18) = 563616$$

2. **365/360** – **обыкновенные проценты с точным числом дней** ссуды

$$S = 500000(1 + \frac{258}{360} \bullet 0,18) = 564500$$

3. **360/360** – **обыкновенные проценты с приближенным числом дней** ссуды

$$S = 500000(1 + \frac{255}{360} \bullet 0,18) = 563750$$

Примечание.

Если срок ссуды захватывает два смежных календарных года и есть необходимость,

например, в определении годовых сумм дохода, то общая сумма начисленных

процентов составит сумму процентов, полученных в каждом году:

$\boldsymbol{I = I_1 + I_2 = Pn_1i + Pn_2i}$, где $\boldsymbol{n_1}$, $\boldsymbol{n_2}$ – части срока ссуды, приходящиеся на каждый год.

4. *Переменные ставки.*

В условиях меняющегося состояния финансового рынка при заключении финансового

соглашения может быть установлена не только постоянная на весь период процентная

ставка, но и переменная, изменяющаяся во времени.

Предположим, что в течение периода n_1 установлена ставка простых процентов i_1,

тогда приращение капитала за этот период составит Pn_1i_1.

Если в течение периода n_2 действует ставка простых процентов i_2, то начисленные

за этот период проценты составят Pn_2i_2.

Пусть число периодов начисления процентов равно m. Тогда при установлении

переменной, т.е. дискретно изменяющейся во времени, процентной ставки

$$S = P + Pn_1 i_1 + Pn_2 i_2 + \ldots\ldots + Pn_m i_m = P\,(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots\ldots + n_m i_m),$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_m$ – ставки простых процентов

$n_1, n_2, \ldots, n_m$ – продолжительность периода с постоянной ставкой.

Пример.

Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов:

первый год – 16%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%.

Определить множитель наращения за 2,5 года.

Решение

$$1 + 1 \cdot i_1 + 0{,}5 \cdot i_2 + 0{,}5 \cdot i_3 + 0{,}5 \cdot i_4 =$$

$$= 1 + 1 \cdot 0{,}16 + 0{,}5 \cdot 0{,}17 + 0{,}5 \cdot 0{,}18 + 0{,}5 \cdot 0{,}19 =$$

$$= 1 + 0{,}16 + 0{,}085 + 0{,}09 + 0{,}095 = 1{,}43$$

5. Реинвестирование по простым процентам.

Если по истечении некоторого периода зафиксированная к данному моменту наращен-

ная сумма инвестируется вновь, то такую операцию называют **реинвестированием**

(**повторным инвестированием или капитализацией**), полученных на каждом этапе

наращения средств. В этом случае проценты начисляют на наращенные в предыду-

щем периоде суммы, т.е. происходит многоразовое наращение.

Предположим, что в течение периода времени n_1 установлена ставка простых процен-

тов i_1 , тогда к концу этого периода наращенная сумма составит

$$P + Pn_1i_1 = P(1 + n_1i_1)$$

Затем эта сумма будет помещена на следующий срок n_2 под ставку простых

Таким образом, итоговую наращенную сумму определяют по формуле:

$$P\,(1 + n_1 i_1)\,(1 + n_2 i_2)\ldots\ldots(1 + n_m i_m),$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_m$ – продолжительность периодов наращения

$i_1, i_2, \ldots, i_m$ - процентные ставки, по которым производится реинвестирование.

Если сроки начисления и ставки не изменяются во времени , то

$$P\,(1 + ni)^m\ ,$$

где m **–** количество повторений реинвестирования.

<u>Пример.</u>

100000 руб. положены 1 января на месячный депозит под 20%. Найти наращенную сум-

му, если операция повторяется три раза. Использовать английский и немецкий

способы расчета.

Решение

Если начислять **точные** проценты (365/365), то

$$S = 100000(1+\frac{31}{365}\bullet 0,2)(1+\frac{28}{365}\bullet 0,2)(1+\frac{31}{365}\bullet 0,2) = 100000\bullet 1,017\bullet 1,015\bullet 1,017 = 104980$$

Если начислять **обыкновенные** проценты (360/360), то

$$S = 100000(1+\frac{30}{360}\bullet 0,2)^3 = 105153$$

<u>Пример.</u>

Клиент поместил в банк **500000**руб. Чему равна **наращенная** сумма вклада за **три**

месяца, если за **первый** месяц начисляют проценты в размере **10%** годовых, а **каждый**

последующий месяц **процентная ставка возрастает на 5% с одновременным**

реинвестированием дохода?

Решение

P = 500000 руб., $n_1 = 1$ ***месяц*** $= 1/12$ $\quad i_1 = 0{,}1,$

$n_2 = 1/12, \quad i_2 = 0{,}15$

$n_3 = 1/12, \quad i_3 = 0{,}2$

Тогда $S = P\ P\,(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2)(1 + n_3 i_3) = 500000\,(1 + 1/12 \cdot 0{,}1)(1 + 1/12 \cdot$

$\cdot 0{,}15)(1 + 1/12 \cdot 0{,}2) = 500000 \cdot 1{,}00833 \cdot 1{,}0125 \cdot 1{,}011667 = 518977$

6. Дисконтирование по простым процентным ставкам.

В финансовой практике часто приходится решать задачу, обратную вычислению нара-

щенной суммы, которая может быть сформулирована так:

Требуется определить сумму P, которую необходимо инвестировать в данный момент

времени, с тем чтобы через некоторый период ***n*** получить при установленной

Для решения этой задачи применяют операцию **дисконтирования**.

Дисконтирование позволяет по известным значениям наращенной суммы, процент-

ной ставки и срока финансовой операции определить стоимость этой наращенной

суммы в настоящий момент. Другими словами, **дисконтирование** позволяет опреде-

лить, какую первоначальную сумму нужно дать в долг, чтобы получить в конце срока

сумму ***S*** при условии, что на долг начисляют проценты по ставке ***i*** .

Величину ***P***, найденную с помощью **дисконтирования**, называют **современной**

стоимостью (иногда **текущей** стоимостью).

В зависимости от вида процентной ставки применяют **два вида дисконтирования**:

математическое дисконтирование; банковский (коммерческий) учет.

Рассмотрим, как проводят математическое дисконтирование.

Выразив из формулы **$S = P(1 + ni)$** величину **P,** получим формулу математического

дисконтирования:

$$P = S /1 + ni,$$

где **P –** современная стоимость наращенной суммы **S**

n – срок проведения финансово операции

i – процентная ставка

$1/1 + ni$ – дисконтный множитель, который показывает, какую часть составляет

первоначальная сумма **P** в окончательной сумме **S.**

(Термин «современная стоимость» не носит абсолютного характера. Современным в

расчетах может быть взят любой момент времени).

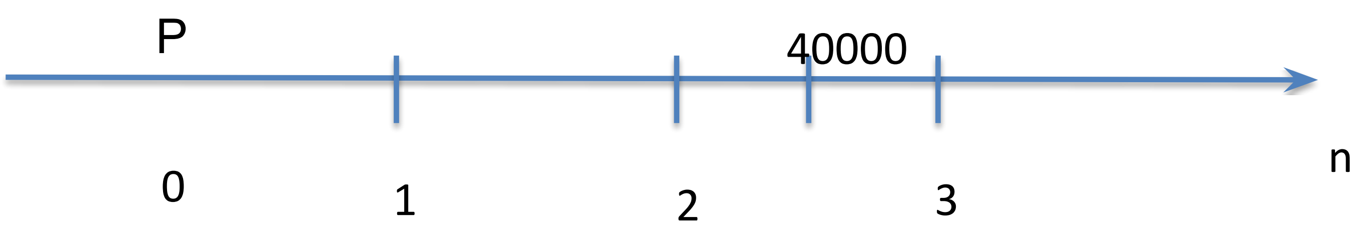
Пример.

Вкладчик желает получить через 2 года 6 месяцев 40000 руб. при 6% ставке. Какая

сумма должна быть положена на счет?

Решение

Изобразим ось времени и над осью времени будущую сумму **S:**



$$P = \frac{40000}{1 + 2,5 \bullet 0,06} = \frac{40000}{1,15} = 34783$$

Операцию предварительного начисления процентов называют дисконтированием

по **учетной ставке**, или **банковским** (**коммерческим**) **учетом**. Это доход, вычитаемый

из ссуды в момент выдачи:

$$P = S - Snd = S\ (\ 1 - nd\ )$$

1 – nd - дисконтный множитель

S – сумма, которая должна быть возвращена

P – сумма, получаемая заемщиком

n – срок ссуды

d – годовая учетная ставка

Snd – дисконт (доход банка)

Пример.

Кредит в 7000 руб. Выдается на 0,5 года по простой учетной ставке 11% годовых.

Какую сумму получит заемщик?

Решение

S = 7000 руб., n = 0,5 d = 11%

$P = S(1 - nd) = 7000(1 - 0{,}5 \cdot 0{,}11) = 6615$ руб.

7. Учет векселей.

Банковский учет используют при операциях с векселями (это ценная бумага, представ

ляющая собой подписанное долговое обязательство: уплатить определенную сумму

в определенный срок) и другими обязательствами.

Суть операции заключается в следующем: банк покупает вексель на сумму ***S*** у его вла-

Цена ***P*** рассчитывается по формуле:

$$P = S - Snd = S\,(1 - nd)$$

S – стоимость векселя

P – цена продажи

n – срок (в годах) от момента продажи до срока погашения

d – годовая учетная ставка

Snd – дисконт (или сумма учета)

<u>Пример.</u>

Вексель 50000 руб. сроком на 3 года учтен в банке через 1 год по учетной ставке 8%.

Определить цену продажи (т.е. сумму, которую получил владелец векселя).

Решение

(n = 2 – время от момента продажи до срока погашения)

S = 50000 руб., n = 2, d = 8%

P = S (1 – nd) = 50000 (1 – 2 • 0,08) = 42000 руб.

В формуле ***P = S – Snd = S (1 – nd)*** выражение ***1 – nd*** называется банковским

дисконтным множителем. Операция учета векселя имеет смысл только в случае, если

1 – nd ≥ 0, – nd ≥ – 1, nd ≤ 1, n ≤ 1/d. При учете векселя задолго до срока пла-

тежа и при высоком уровне учетной ставки дисконт может стать настолько

(при $n = 1/d$) или даже становится отрицательной ***($n > 1/d$).*** Понятно, что в этих случаях операция учета лишена смысла.

8. Наращение по учетной ставке.

Простая учетная ставка может быть использована при расчете суммы, которую получит

владелец векселя при его погашении в момент наступления срока платежа. В этом слу-

чае используют формулу определения наращенной по простой учетной ставке суммы:

S = P/(1 – nd), где **1/1 – nd –** множитель наращения

Пример.

Вексель учтен в банке по учетной ставке **18%** годовых за **150** дней до его погашения.

При этом владелец векселя получил **92500** руб. Определить **номинал** векселя.

Решение

Номинал – это сумма, указанная на векселе, которую получит владелец векселя