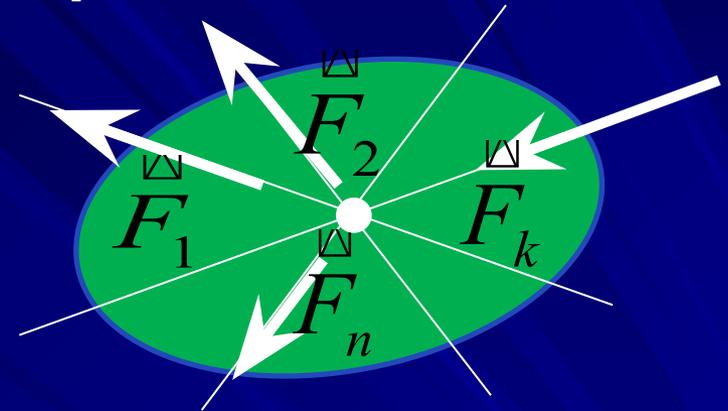


2. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

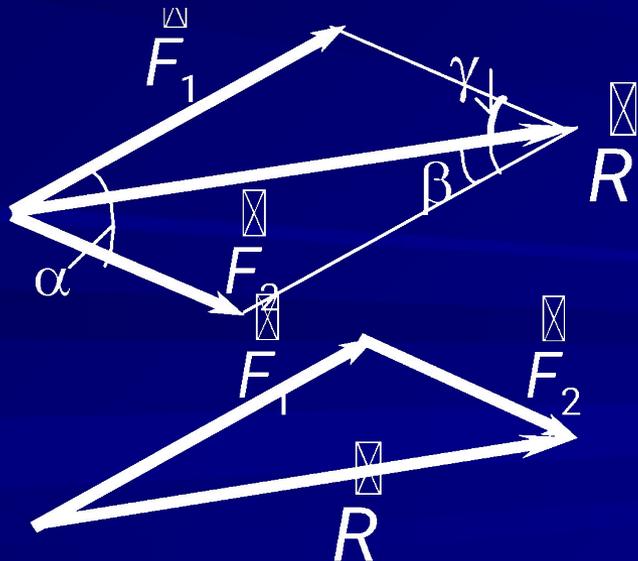
Системой сходящихся сил (ССС) называют такую систему сил, линии действия которых пересекаются в одной и той же точке



2.1. Геометрический способ сложения сил

Главным вектором называется вектор, получаемый путем геометрического сложения СССР

Сложение двух сил



$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

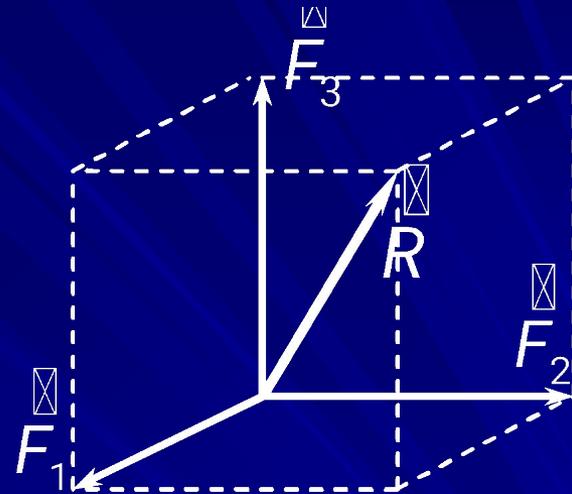
$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180 - \alpha)$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$$

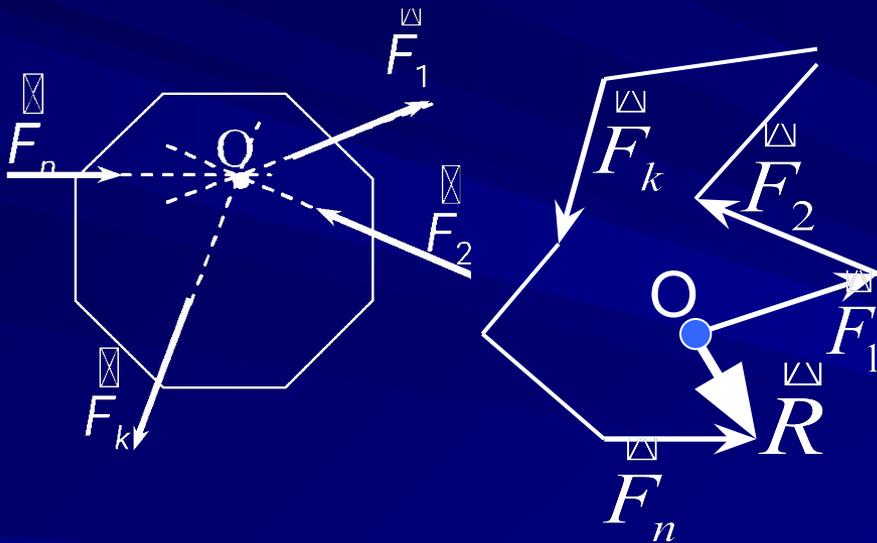
$$\frac{F_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \alpha}$$

Сложение трех сил, не лежащих в одной плоскости

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$$



Сложение произвольного числа сил



$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \dots + \bar{F}_k + \dots + \bar{F}_n = \sum_n \bar{F}_k$$

Силовой многоугольник строится от произвольной точки, путем последовательного приложения начала последующего вектора к концу предыдущего, при соблюдении их длин (модулей) в масштабе и направлений. Результат сложения – **равнодействующая R** - вектор, соединяющий начало первого вектора с концом последнего.

последовательность построения силового многоугольника на конечный результат не влияет

2.2. Разложение сил

Проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная длине отрезка, с соответствующим знаком, заключенного между проекциями начала и конца вектора силы на ту же ось

Из формулы видно, что проекция силы имеет знак «+», когда $\alpha < 90^\circ$ и знак «-», когда $\alpha > 90^\circ$.

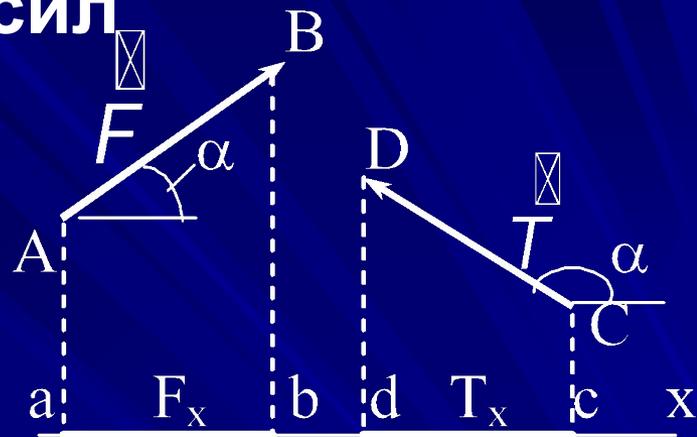
Угол α образуется положительными направлениями вектора и оси, на которую проектируется вектор.

Разложить силу на составляющие

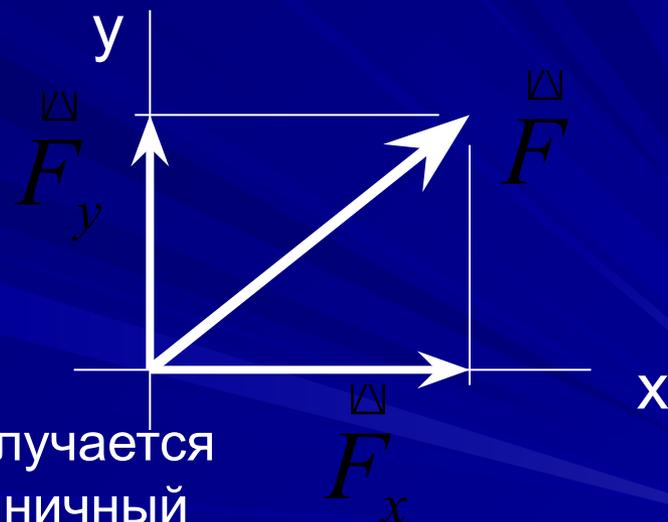
- это означает найти такую систему сходящихся сил, главным вектором которой является исходная сила

Составляющая силы – это вектор, который получается путем умножения модуля проекции силы на единичный вектор соответствующей оси:

$$\bar{F}_x = F_x \cdot \bar{i}, \quad \bar{F}_y = F_y \cdot \bar{j}, \quad \bar{F}_z = F_z \cdot \bar{k}$$



$$F_x = F \cos \alpha$$



2.3. Аналитический способ сложения сил

Теорема о проекции вектора суммы:

проекция вектора суммы на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось

Под “вектором суммы”, понимается вектор, например: \mathbf{R} , который получен в результате суммирования других векторов, т.е. $\bar{R} = \sum_n \bar{F}_k$,

В соответствии с теоремой проекции \mathbf{R} на координатные оси будут равны:

$$R_x = \sum_n F_{kx}, \quad R_y = \sum_n F_{ky}, \quad R_z = \sum_n F_{kz}.$$

Данная теорема позволяет предложить алгоритм решения задачи о сложении системы сходящихся сил, т.е. нахождение равнодействующей \mathbf{R} :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_1 \\ \vdots \\ \vec{F}_n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{проекция} \\ \text{сил на оси} \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_{1x}, \dots, F_{nx} \\ F_{1y}, \dots, F_{ny} \\ F_{1z}, \dots, F_{nz} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_x = \sum_n F_{kx} \\ R_y = \sum_n F_{ky} \\ R_z = \sum_n F_{kz} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \\ \cos \alpha = R_x / R \\ \cos \beta = R_y / R \\ \cos \gamma = R_z / R \end{array} \right.$$

2.4. Равновесие системы сходящихся сил

Для равновесия ССС необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил была равна нулю, т.е. $R=0$

Геометрическая интерпретация: силовой многоугольник, построенный из этих сил, должен быть замкнутым

Это означает, что при построении силового многоугольника конец последнего откладываемого вектора приходится в начало первого вектора, т.е. длина замыкающего вектора (модуль) равнодействующей $R = 0$.

Аналитическая интерпретация: для равновесия ССС необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил относительно координатных осей были равны нулю

Действительно, $R=0$ в том случае, если все ее проекции по осям будут равны нулю, т.е. $R_x=R_y=R_z=0$. Используя теорему о проекции вектора суммы на ось, перейдем к проекциям сил данной ССС, т.е.

$$\sum_n F_{kx} = 0, \quad \sum_n F_{ky} = 0, \quad \sum_n F_{kz} = 0$$

2.5. Теорема о трех силах

Если свободное твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке

Доказательство

Пусть на АТТ действуют три непараллельные силы, лежащие в одной плоскости.

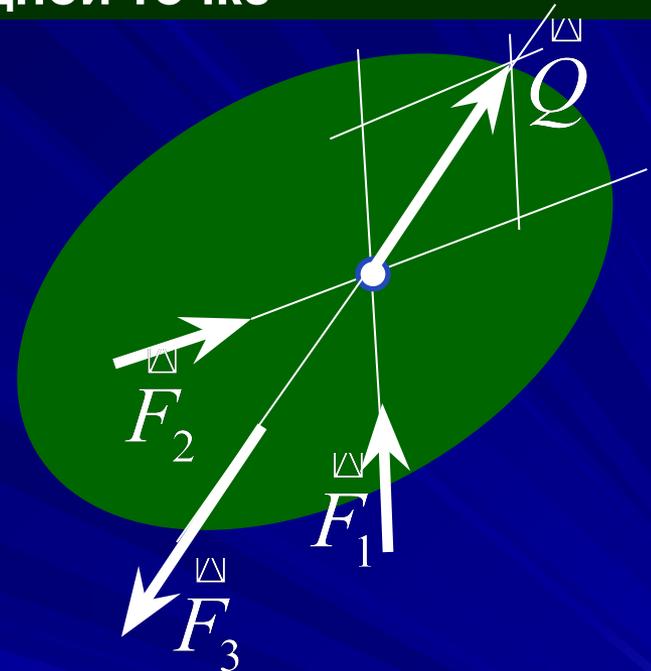
Покажем две из них F_1 и F_2 .

Используя следствие Аксиомы 2, перенесем эти силы в точку пересечения их линий действия.

Сложим эти силы, используя Аксиому 3 (правило параллелограмма). Вектор суммы, Q , равен:

$\vec{Q} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Напомним, что изначально к АТТ были приложены 3 силы, две из которых были заменены силой Q .

Таким образом, на АТТ в данный момент действуют две силы Q и F_3 , под действием которых тело находится в равновесии, а это возможно, согласно Аксиоме 1, когда эти силы имеют общую линию действия, что говорит о том, что линия действия силы F_3 проходит через точку пересечения линий действия сил F_1 и F_2 , что и требовалось доказать.



2.6. Момент силы относительно точки

Моментом силы относительно центра O , называется величина, равная взятому с соответствующим знаком, произведению модуля силы, F , на длину ее плеча, h .

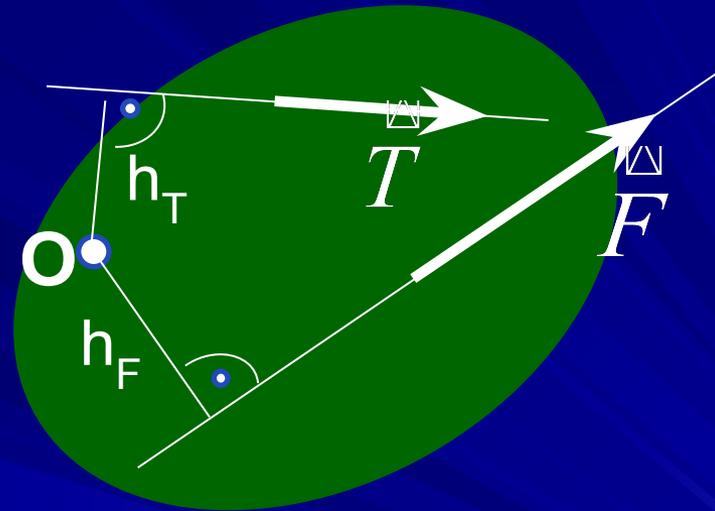
h - плечо силы равно кратчайшему расстоянию от центра O до линии действия силы.

Другими словами это длина перпендикуляра, опущенного из точки, относительно которой определяется момент силы, на ее линию действия

Величина момента считается положительной, если сам вектор силы “вращается” относительно центра против часовой стрелки и отрицательной - по часовой стрелке.

На рисунке момент силы F положительный, а силы T отрицательный.

$$m_o(\vec{F}) = \pm F \cdot h$$



Свойства момента силы относительно центра:

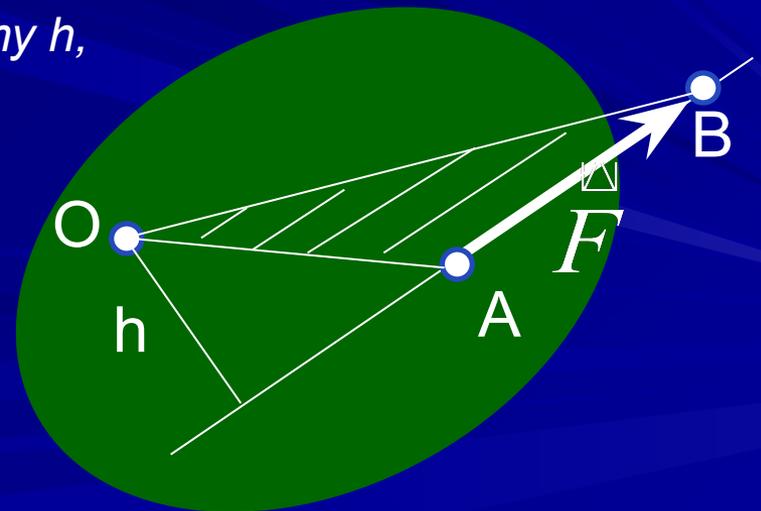
- 1. Величина момента силы не изменится, если ее точку приложения перенести по линии действия.**
Действительно, при этом не меняется ни модуль и направление силы, ни ее плечо, т.е. их произведение не меняется.
- 2. Момент силы равен нулю, когда ее линия действия пересекает данный центр.**
Действительно, если линия действия пересекает точку, относительно которой определяется момент силы, то плечо равняется нулю
- 3. Момент силы численно равен удвоенной площади треугольника OAB, построенного на силе и центре**

$$m_o \left(\overset{\Delta}{F} \right) = 2S_{\Delta OAB}$$

Действительно, площадь треугольника равна половине произведения основания AB (или F) на высоту h, т.е.

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} F \cdot h$$

Умножив обе стороны равенства на 2, получим аналитическое выражение Свойства 3



2.7. Теорема Вариньона

Момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно любого центра, лежащего в той же плоскости, равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно того же центра

Рассмотрим плоскую систему n сил $(F_1 \dots F_n)$, все линии действия которых пересекаются в одной точке A , т.е. систему сходящихся сил (ССС).

Используя следствие Аксиомы 2, перенесем все силы по их линиям действия в эту точку A .

Пусть R является равнодействующей данной ССС

$$\bar{R} = \sum_n \bar{F}_k$$

Выберем произвольно в этой же плоскости точку O

Соединим точки A и O и проведем через точку O линию, нормальную отрезку OA .

Превратим эту прямую в ось x , указав положительный отсчет таким образом, чтобы в результате этого знаки проекции любой силы на эту ось и ее момента совпадали, т.е. были бы оба положительными, либо оба отрицательными.

Это возможно только при положительном направлении оси вверх.

Действительно, для сил F_1 и F_k будут плюсы, а для силы F_n будут оба минуса.

Проверьте что будет, если положительный отсчет оси направить вниз.



Спроектируем силу F_k на ось x , получим проекцию силы F_{kx}

В соответствии со **Свойством 3 момента силы**, момент любой силы относительно точки O можно представить как удвоенную площадь треугольника OAB , т.е. для силы F_k :

$$2S_{\Delta OAB} = OA \cdot Ob = OA \cdot F_{kx}$$

Спроецируем обе части выражения $\bar{R} = \sum_n \bar{F}_k$ на ось ox и умножим обе части на OA , получим:

$$OA \cdot R_x = \sum_n (OA \cdot F_{kx})$$

Следует обратить внимание на то, что величина OA является постоянной для всех сил системы, т.к. у этих сил, вне зависимости от их индекса, расстояние от общей точки приложения до точки O не меняется. По этой причине величина OA была внесена под знак суммы, как константа

Сравнивая обе части последнего выражения с правой частью выражения Свойства 3 момента силы, приходим к выводу, что в обеих частях последнего выражения записаны величины моментов сил:

$$m_o(\bar{R}) = \sum m_o(\bar{F}_k)$$

слева – момент R , а справа – момент силы F_k .
Что и соответствует выражению теоремы Вариньона

