Лекция 2.

Система сходящихся сил. Момент силы

*Если на точку действует несколько сил,
то она получает от них то же движение,
как если бы на нее действовала одна сила,
эквивалентная им всем.*

Леонард Эйлер

Леонард Эйлер

1707 (Базель) – 1727-1741 (Санкт-Петербург) –
1741-1766 (Берлин) – 1766-1783 (Санкт-Петербург)

На предыдущей лекции

- Статика – раздел теоретической механики
- Основные задачи статики
- Модели в механике
- Статика – наука аксиоматичная
- Аксиомы статики
- Силы, связи и их реакции

Цель лекции

- ***Решение задач статики для тел, на которые действует система сходящихся сил***
- ***Ввести понятие момента силы***

План лекции

2.1. Определение системы сходящихся сил (ССС)

2.2. Теорема о равнодействующей ССС

2.3. Условия равновесия

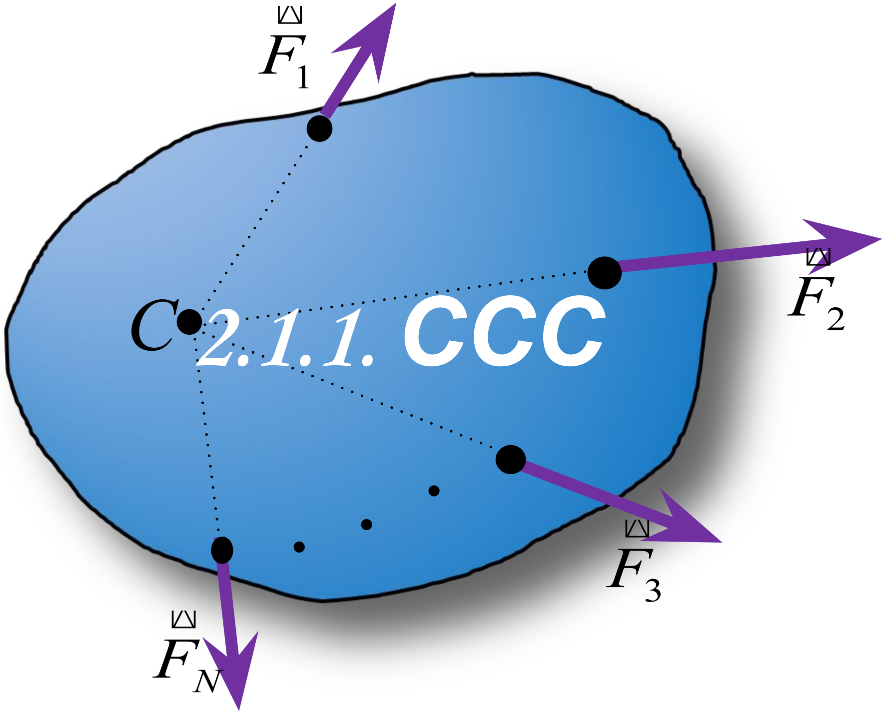
2.4. Решение задач статики

2.5. Момент силы

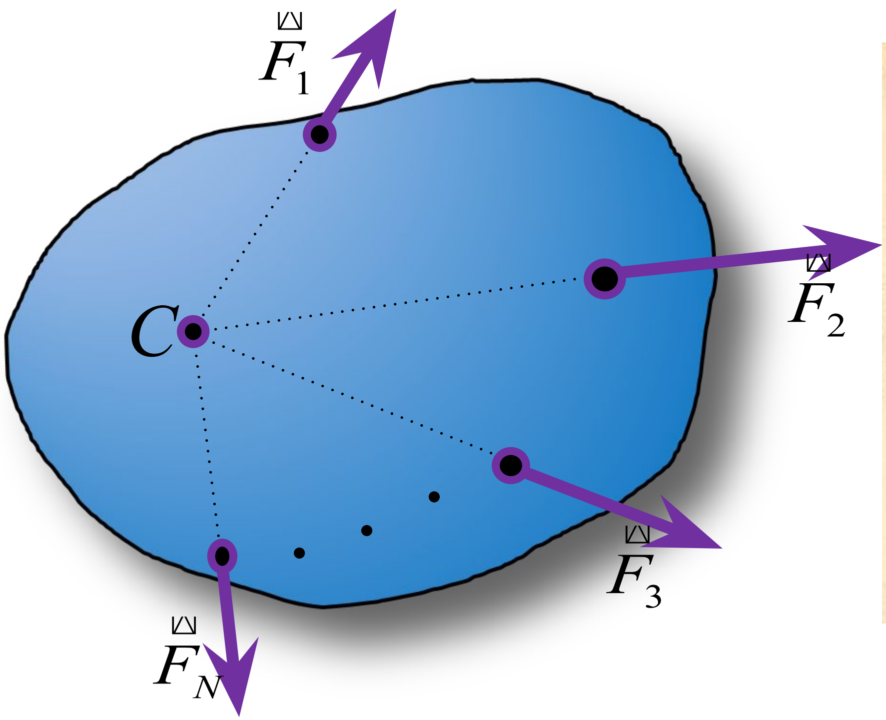
2.6. Заключение

2.1. Определение ССС

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется системой сходящихся сил (ССС)



Система сил, линии действия которой пересекаются в одной точке, называются системой сходящихся сил (ССС)



2.2. Теорема о равнодействующей ССС

Однажды Лебедь, Рак, да Щука
Везти с поклажей воз взялись,
И вместе трое все в него впряглись;
Из кожи лезут вон, а возу все нет ходу!

Поклажа бы для них казалась и легка:
Да Лебедь рвется в облака,
Рак пятится назад,
а Щука тянет в воду.

Кто виноват из них,
кто прав, - судить не нам.
Да только воз и ныне там.

При каких условиях воз сдвинулся бы?

Система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме этих сил и проходящую через точку пересечения их линий действия

Доказательство

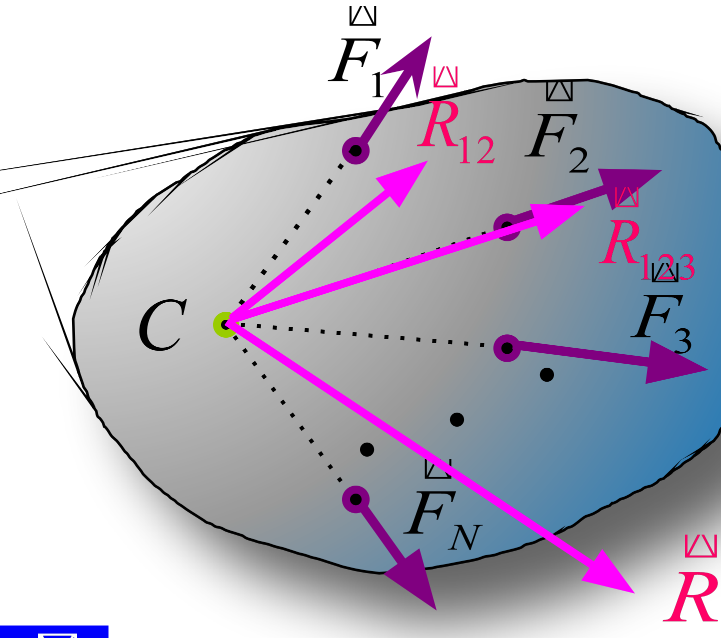
- Перенесем силы в точку пересечения линий действия
- Складывая затем силы попарно по правилу параллелограмма

$$\vec{R}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

$$\vec{R}_{123} = \vec{R}_{12} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3,$$

....

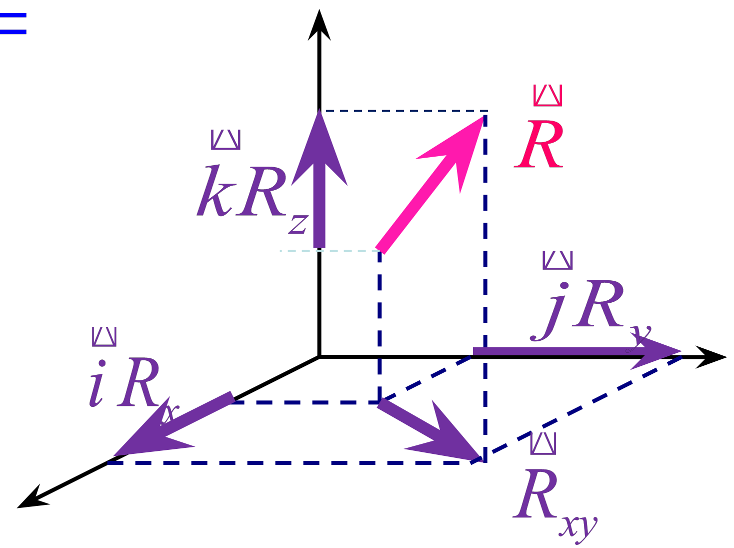
$$\boxed{\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}$$



Теорема доказана

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\vec{i} F_{kx} + \vec{j} F_{ky} + \vec{k} F_{kz} \right) =$$

$$= \vec{i} R_x + \vec{j} R_y + \vec{k} R_z$$



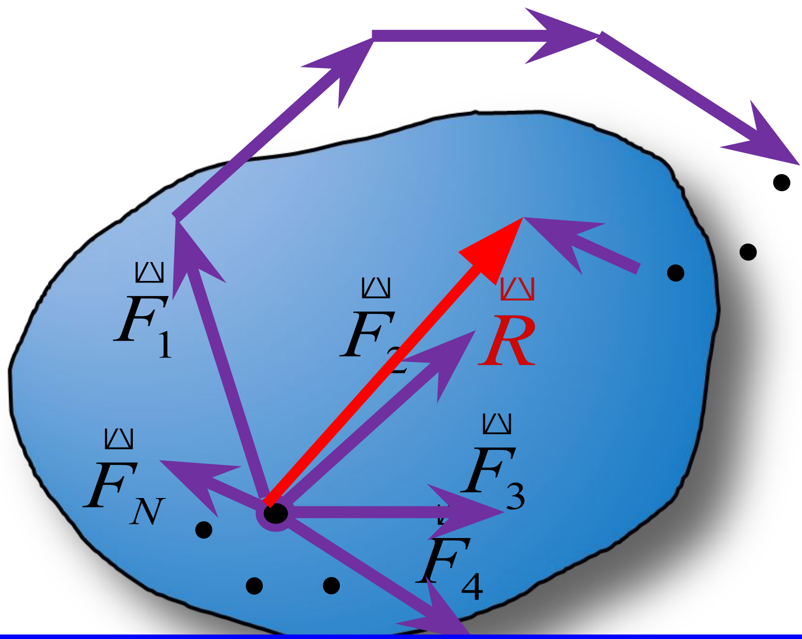
Где R_x, R_y, R_z – проекции равнодействующей на оси x, y, z

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \quad R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \longrightarrow \left| R \right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\cos(\vec{R}, x) = \frac{R_x}{\left| R \right|}, \qquad \cos(\vec{R}, y) = \frac{R_y}{\left| R \right|}, \qquad \cos(\vec{R}, z) = \frac{R_z}{\left| R \right|}$$

- **Равнодействующая может быть найдена геометрически**
- **Она является замыкающей стороной силового многоугольника, построенного на данных силах**

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$



2.3. Условия равновесия

2.3.1. Условия Равновесия ССС

Действие на тело произвольной ССС эквивалентно действию одной силы, равнодействующей

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_1\} \sim \vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Но если тело находится в равновесии под действием одной силы, то эта сила равна нулю

$$\boxed{\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0}$$

Геометрически это условие означает замкнутость силового многоугольника сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_1\}$

2.3.2. Уравнения Равновесия ССС

Тело под действием ССС находится в равновесии, если

$$\vec{R} \equiv \vec{i}\,R_x + \vec{j}R_y + \vec{k}R_z = 0$$

Это векторное уравнение содержит сумму трех взаимно перпендикулярных векторов. Поэтому оно удовлетворяется только, если нулю равен каждый из слагаемых

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0$$

Если на тело действует плоская ССС, скажем, в плоскости *xy*, то данная система уравнений сводится к следующей

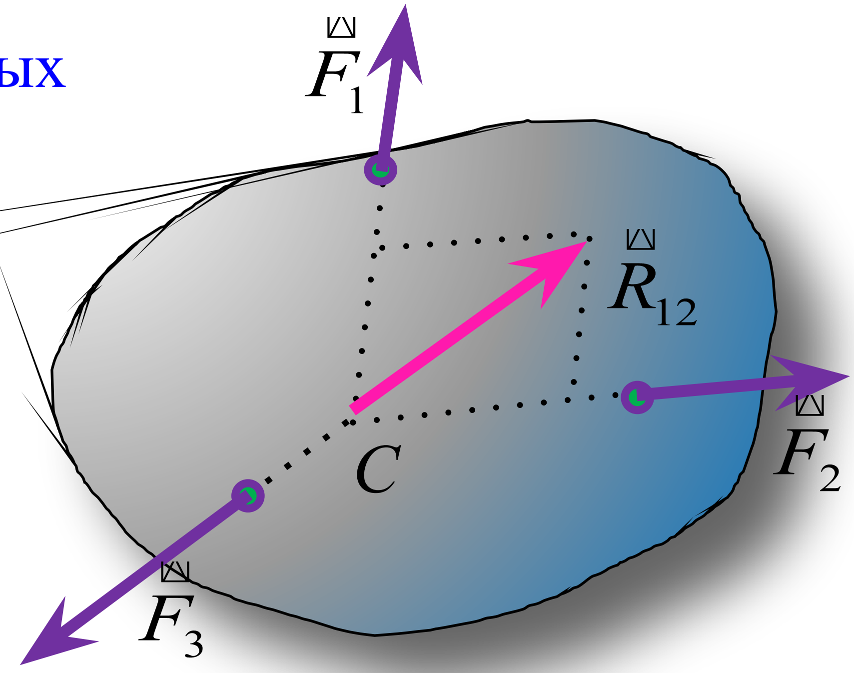
$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$$

Если твердое тело находится в равновесии под действием трех сил, причем линии действия двух из них пересекаются, то эти силы образуют ССС

Доказательство

Пусть линии действия двух первых сил пересекаются

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim (\vec{R}_{12}, \vec{F}_3)$$



Но согласно А1 эти силы должны быть равны по величине и противоположно направлены

Линия действия силы проходит через *C*. **Теорема доказана**

2.4. Решение задач статики

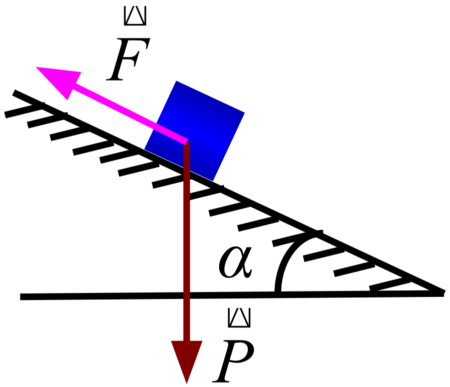
2.4.1. **Алгоритм Решения Задач Статики**

1. Установить, исследование равновесия какого тела (точки, системы тел) следует рассмотреть
2. Освободить тело от связей и изобразить действующие на него активные силы и силы реакций отброшенных связей
3. Установить, какая система сил действует на тело, и сформулировать условия равновесия этой системы
4. Составить уравнения равновесия
5. Решить уравнения равновесия и определить искомые неизвестные

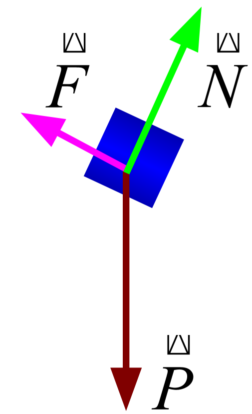
Замечание

Если число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия, то система называется ***статически определенной***, в противном случае – ***статически неопределенной***

2.4.2. Задача 2.1. Графическое Решение

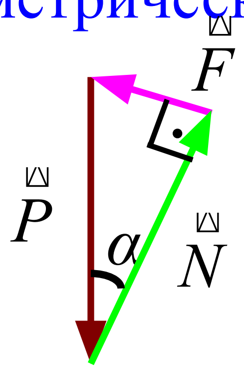


Груз весом P (точка) лежит на наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Определить силу давления груза на плоскость и величину силы F, которую нужно приложить параллельно плоскости, чтобы удержать груз в равновесии.

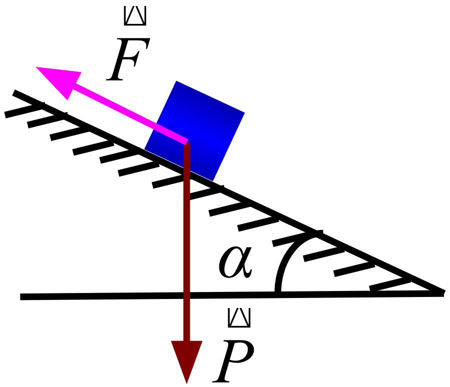


Решение

- Освобождаемся от связей и рисуем все силы, под действием которых груз (точка) находится в равновесии
- Геометрическое решение задачи

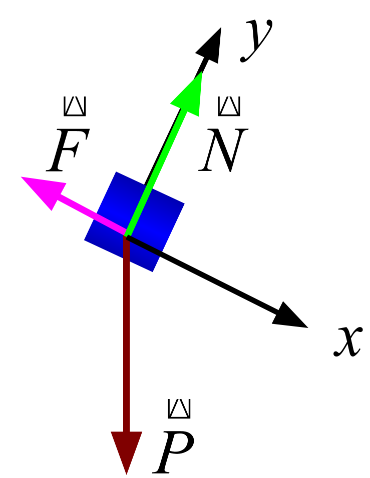


$F = P\sin\alpha,$ $N = P\cos\alpha$



Груз весом P (точка) лежит на наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Определить силу давления груза на плоскость и величину силы F, которую нужно приложить параллельно плоскости, чтобы удержать груз в равновесии.

Аналитическое решение задачи



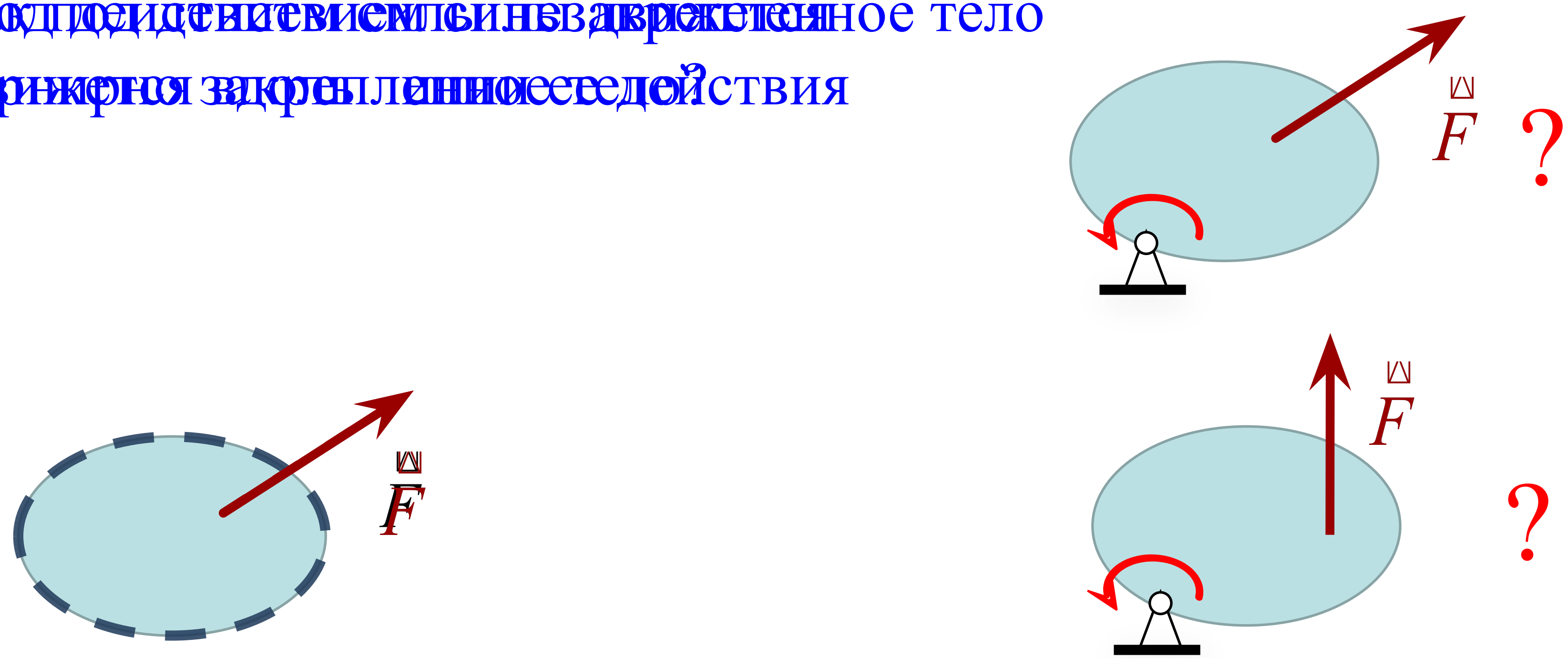
- Введем систему координат
- Тело находится в равновесии по действием ССС. Составим уравнения равновесия

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} -F + P\sin\alpha = 0, \\ N - P\cos\alpha = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \boxed{F = P\sin\alpha,} \\ \boxed{N = P\cos\alpha} \end{aligned}$$

2.5. Момент силы

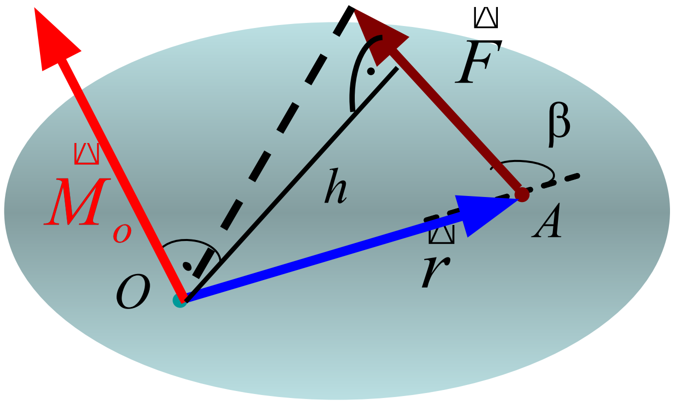
Под действием силы незакрепленное тело движется по линии действия

Как под действием силы движется шарнирно закрепленное тело?



Важнейшим понятием механики наряду с силой является момент силы, отражающее тот опытный факт, что шарнирно закрепленное тело под действием силы вращается

2.5.2. Момент Силы Относительно Точки



Моментом силы $\vec{F}$ **относительно точки** O **называется вектор** $\vec{M}_o(\vec{F})$**, равный векторному произведению радиус-вектора** $\vec{r}$ **точки приложения силы и силы:** $\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$

Момент силы направлен перпендикулярно плоскости векторов $\vec{r}$ **и** $\vec{F}$ **и в ту сторону, откуда вращение тела происходит против часовой стрелки**

$$|\vec{M}_o(\vec{F})| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\beta \longrightarrow h = |\vec{r}|\sin\beta \longrightarrow |\vec{M}_o(\vec{F})| = Fh$$

Плечо силы h **– это кратчайшее расстояние от точки относительно которой вычисляется момент до линии ее действия**

2.5.3. Момент Силы Относительно Точки

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

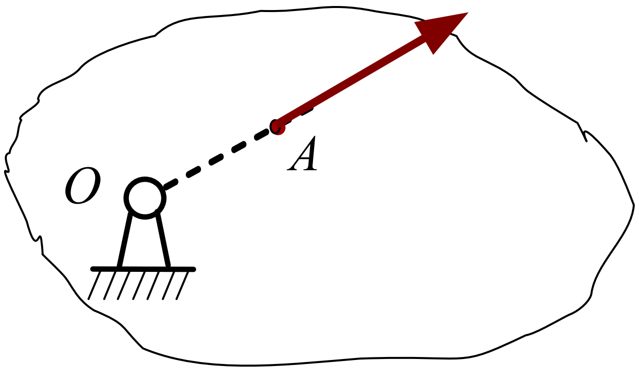
где x, y, z – координаты точки приложения силы, а F_x, F_y, F_z – проекции силы на оси координат

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{i}M_{ox} + \vec{j}M_{oy} + \vec{k}M_{oz}$$

$$M_{Ox}(\vec{F}) = yF_z - zF_y, \quad M_{Oy} = zF_x - xF_z, \quad M_{Oz}(\vec{F}) = xF_y - yF_x$$

$$M_O(\vec{F}) = Fh = \sqrt{(yF_z - zF_y)^2 + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}$$

Замечание



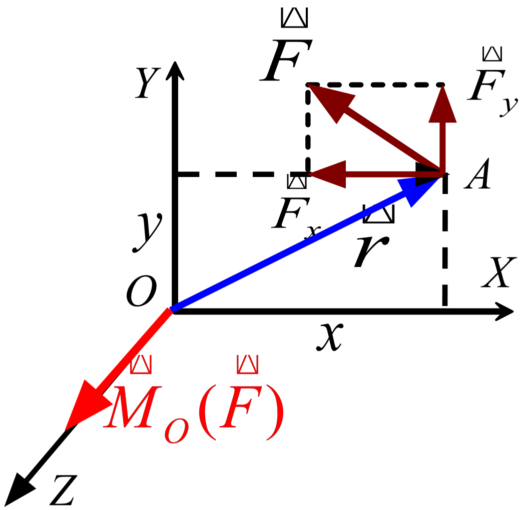
- Если точка *O* лежит на линии действия силы, то момент силы относительно этой точки равен нулю

- Тело, закрепленное шарнирно в точке *O*, не будет вращаться под действием силы, линия действия которой проходит через эту точку

2.5.5. Момент силы на плоскости

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (xF_y - yF_x)\vec{k} = Fh\vec{k}$$



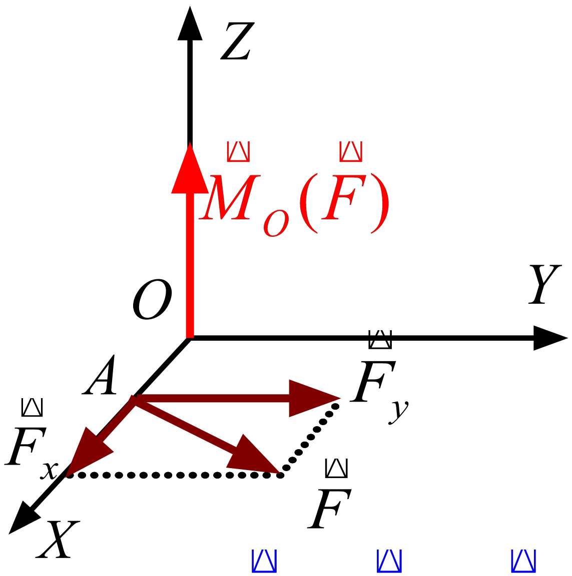
$$\vec{F} \in OXY \qquad \vec{M}_O(\vec{F}) \parallel \vec{k}$$

- **Вектор момента силы имеет одну составляющую и направлен перпен-дикулярно плоскости, в которой лежит сила и центр**

$$m_O(\vec{F}) = \pm M_O(\vec{F}) = \pm F\,h$$

- Алгебраический момент силы $m_O(\vec{F})$ имеет знак плюс, если под действием силы тело поворачивается против часовой стрелки, и минус – в противном случае

Найти момент силы $\vec{F} = (2,3,0)$, линия действия которой проходит через точку O с координатами (1,0,0), относительно начала координат A



Решение

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3\vec{k}$$

Замечание

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y \longrightarrow \vec{M}_O(\vec{F}_x) = 0, \quad \vec{M}_O(\vec{F}_y) = 3\vec{k} \longrightarrow$$

$$\boxed{\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}_x) + \vec{M}_O(\vec{F}_y)}$$

Это частный случай теоремы Вариньона

Момент равнодействующей системы сходящихся сил относительно произвольной точки О равен векторной сумме моментов слагаемых сил относительно той же точки

Доказательство

Векторное произведение удовлетворяет закону дистрибутивности

$$\vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n$$

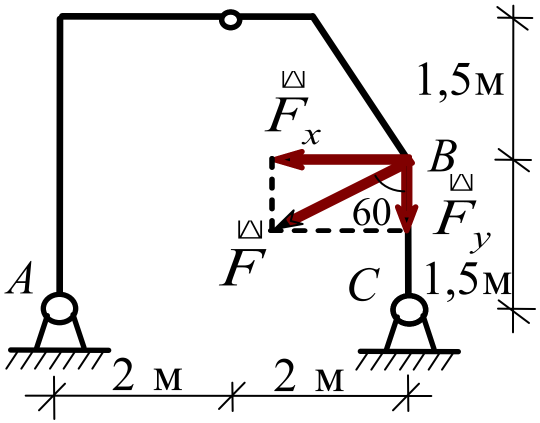
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{r}_O \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k)$$

Теорема доказана

Pierre Varignon (1654-1722, Paris)

К двухсоставной рамной конструкции в точке *B* под углом 60° к вертикали приложена сила $\vec{F}$. Определить ее момент относительно точки *A*.

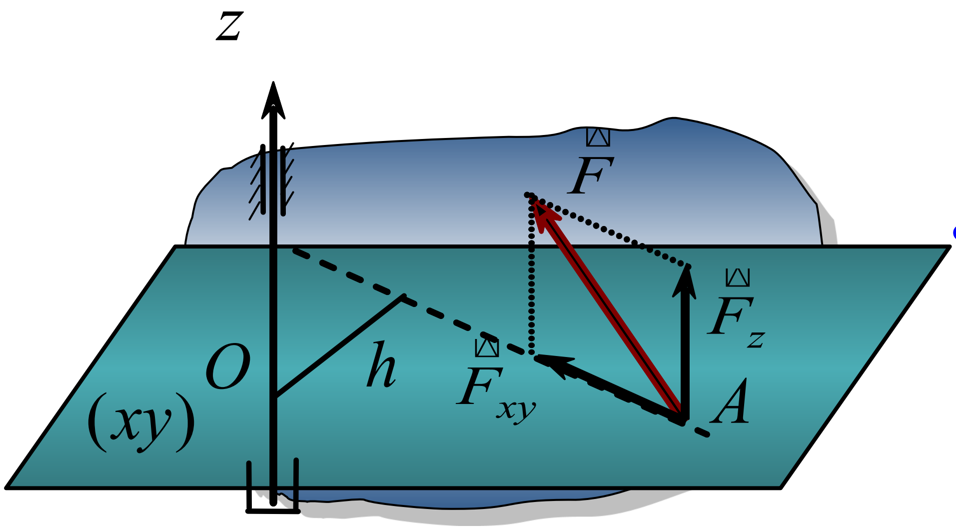


Решение

- **Воспользуемся теоремой Вариньона**
- **Исходная сила может быть эквивалентно заменена плоской системой двух сходящихся сил** $\vec{F}_y, \vec{F}_y$.

$$m_A(\vec{F}) = m_A(\vec{F}_x) + m_A(\vec{F}_y) = 1.5F_x - 4F_y = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - 2\right)F$$

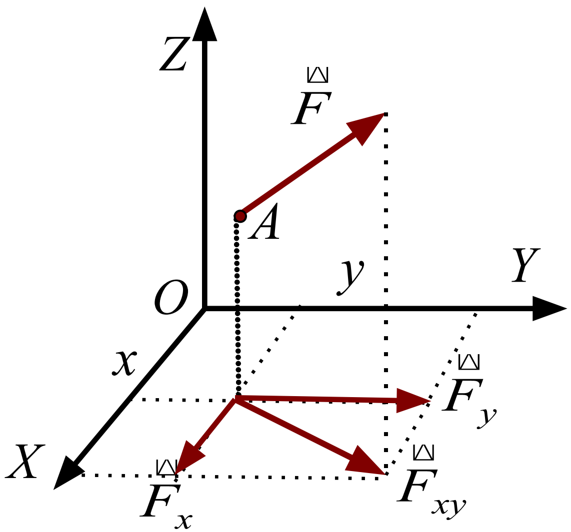
2.5.9. Момент силы относительно оси



- Тело под действием данной силы будет вращаться относительно оси Oz
- Это вращение характеризу-ется скалярной величиной, называемой моментом силы относительно оси Oz
- За вращательное движение отвечает сила $\vec{F}_{xy}$

Моментом силы $\vec{F}$ относительно оси OZ называется скалярная величина, равная алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси относительно точки пересечения данной оси с этой плоскостью

$$M_z(\vec{F}) = \pm M_z(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy}\, h$$



Чтобы найти момент силы ***F*** относительно оси Oz, воспользуемся теоремой Вариньона

$$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}_{xy}) = xF_y - yF_y = M_{Oz}(\vec{F})$$

Аналогично

$$M_x(\vec{F}) = M_{Ox}(\vec{F}) = yF_z - zF_y,$$

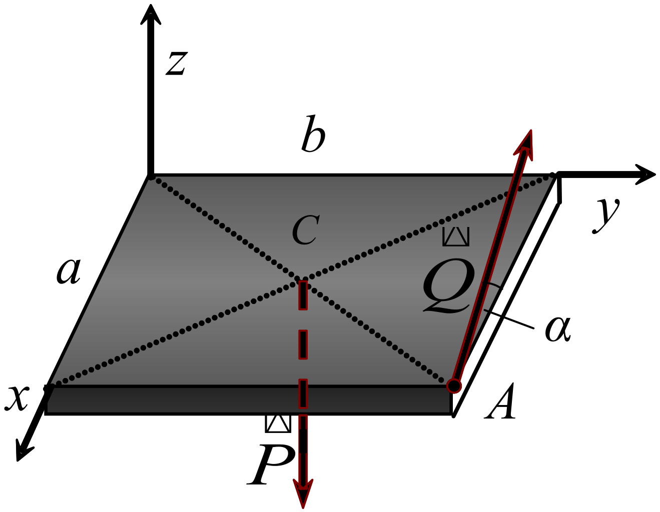
$$M_y(\vec{F}) = M_{Oy}(\vec{F}) = zF_x - xF_z$$

Теорема

Моменты сил относительно осей в системе координат *OXYZ* равны проекциям момента силы относительно начала координат *O*

2.5.11. Задача 2.4

Определить моменты сил $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, действующие на горизонтальную плиту, относительно осей x, y, z.



Решение

- Найдем проекции сил

$$P_x = P_y = 0, P_z = -P = 0,$$

$$Q_x = -Q\cos\alpha, \mathrm{Q}_y = 0, \mathrm{Q}_z = Q\sin\alpha$$

- Определим координаты приложения этих сил

$$C = (a/2, b/2, 0), A = (a, b, 0)$$

$$M_x(\vec{P}) = -0{,}5bP, M_y(\vec{P}) = 0{,}5aP, M_z(\vec{P}) = 0,$$

$$M_x(\vec{Q}) = bQ\sin\alpha, M_y(\vec{Q}) = -aQ\sin\alpha, M_z(\vec{Q}) = bQ\cos\alpha$$

2.6. Заключение

2.6.1. Основные Выводы. I

- ССС эквивалентна действию одной силы – равнодействующей. В состоянии равновесия эта равнодействующая равна нулю

- Все задачи статики имеют достаточно простой алгоритм решения

- В статике решаются только статически определимые задачи

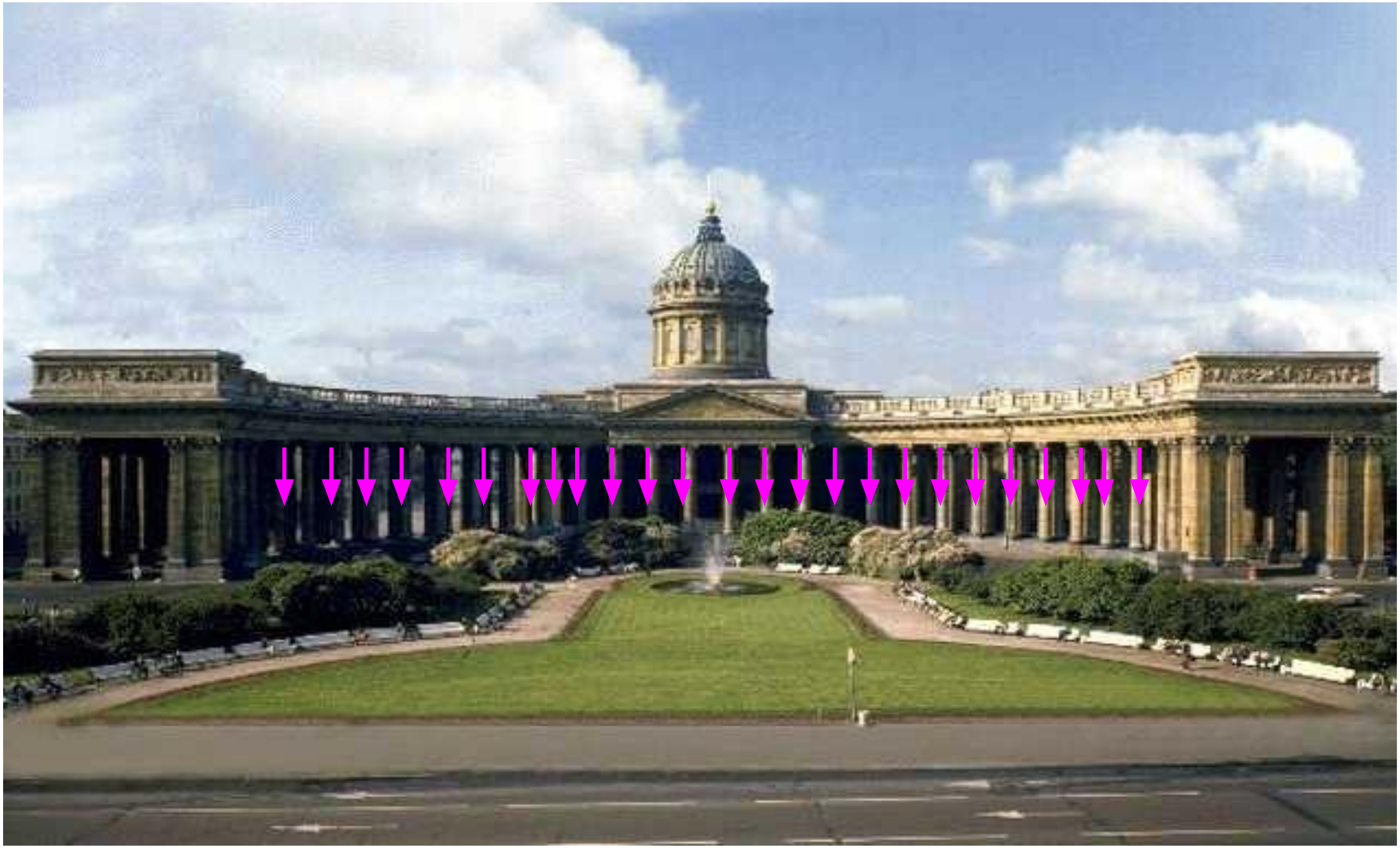
2.6.2. Основные Выводы. *II*

- Введен момент силы относительно центра и оси

- Установлена связь момента силы относительно оси и относительно центра

- Для плоской системы сил можно использовать алгебраическое определение момента силы

2.6.3. Тема Следующей Лекции



Тема следующей лекции