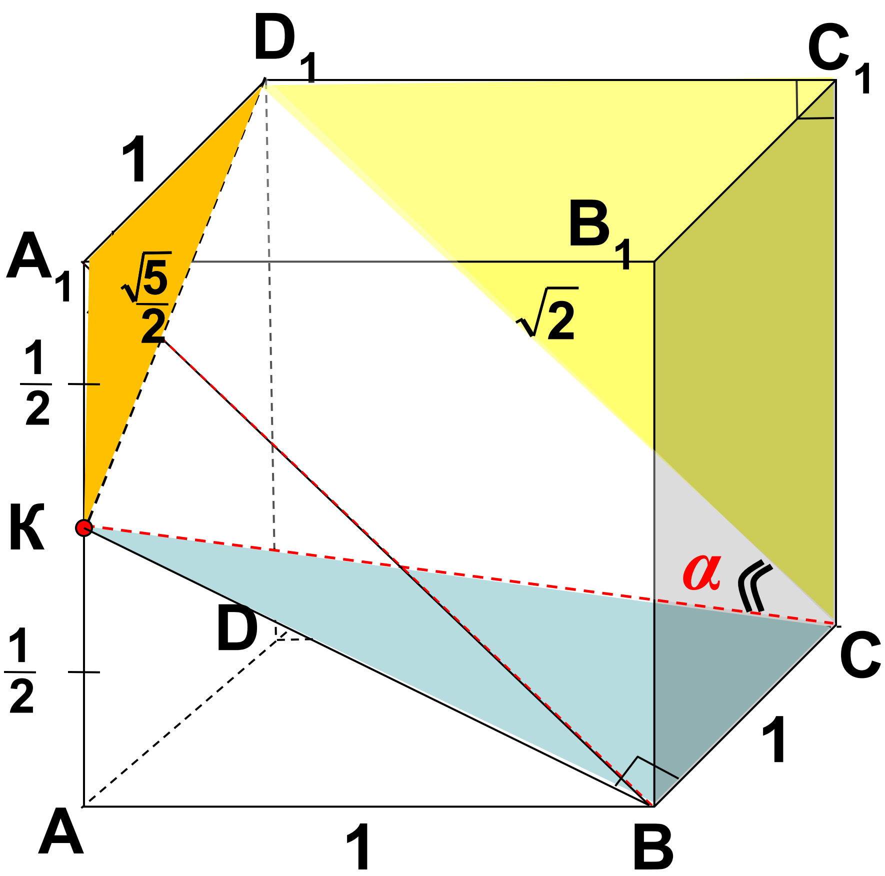
Метод координат при решении стереометрических задач

Задача№1. Точка К – середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми A_1B и СК.

1способ



Из ΔKA_1D_1 :

$$KD_1^{\ 2} = KA_1^{\ 2} + A_1D_1^{\ 2};$$

$$KD_1^{\ 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2;$$

$$KD_1^{\ 2} = 1\frac{1}{4};$$

$$KD_1 = \pm\sqrt{\frac{5}{4}};$$

$$KD_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Из ΔCC_1D_1 :

$$CD_1^{\ 2} = CC_1^{\ 2} + C_1D_1^{\ 2};$$

$$CD_1^{\ 2} = 1^2 + 1^2;$$

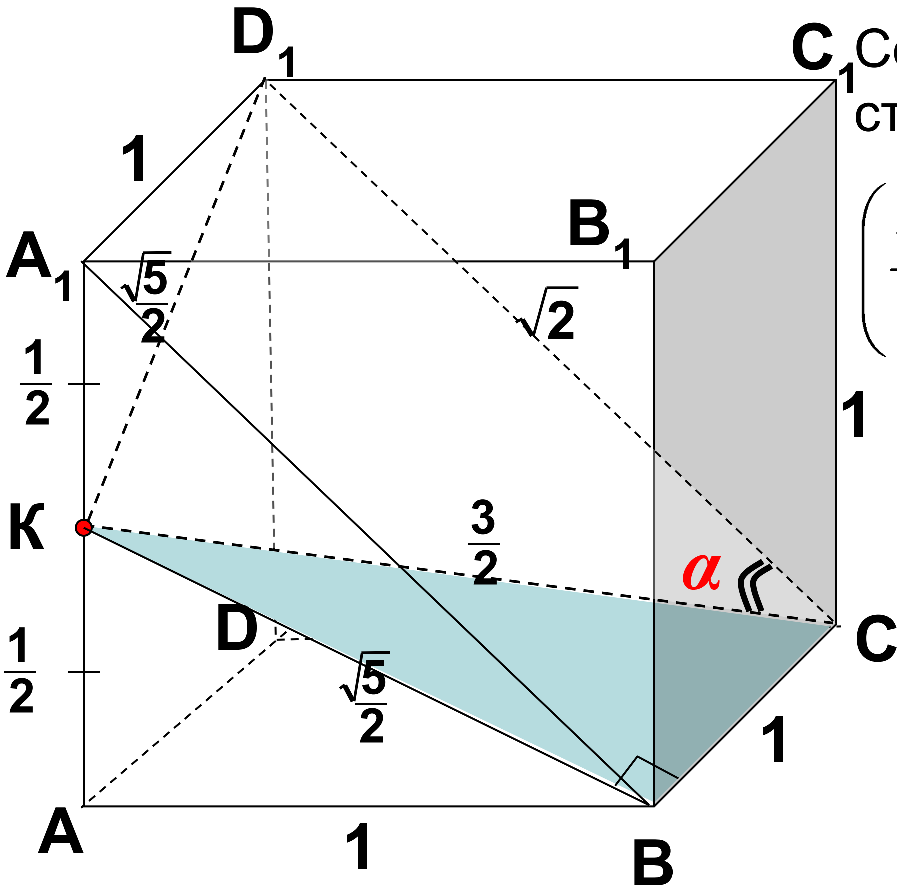
$$CD_1^{\ 2} = 2;$$

$$CD_1 = \pm\sqrt{2};$$

$$CD_1 = \sqrt{2}.$$

Точка К – середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми A_1B и СК.

Из треугольника KBC $KC = \dfrac{3}{2}$



Составляем теорему косинусов для стороны KD_1:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\cos\alpha$$

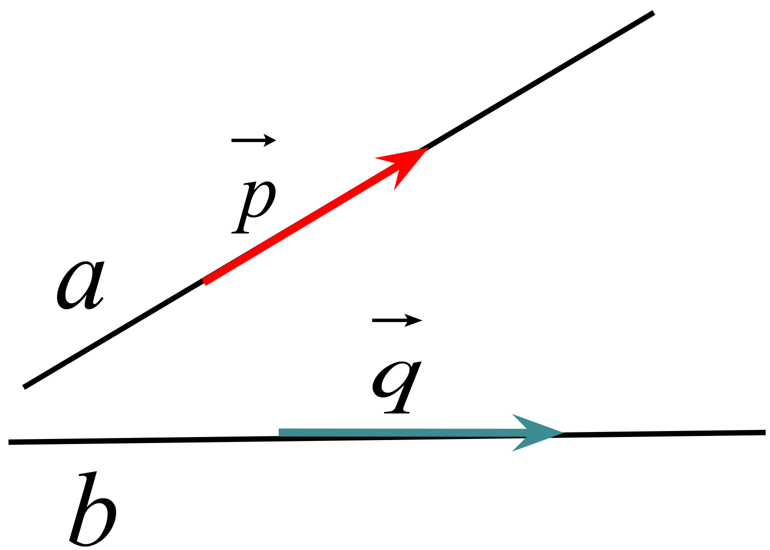
$$3\sqrt{2}\cos\alpha = 3$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{3\sqrt{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 45^0$$

Угол между прямыми



$\vec{p}$ - направляющий вектор прямой ***a***

$\vec{q}$ - направляющий вектор прямой ***b***

φ - угол между прямыми

$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\qquad$ $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$

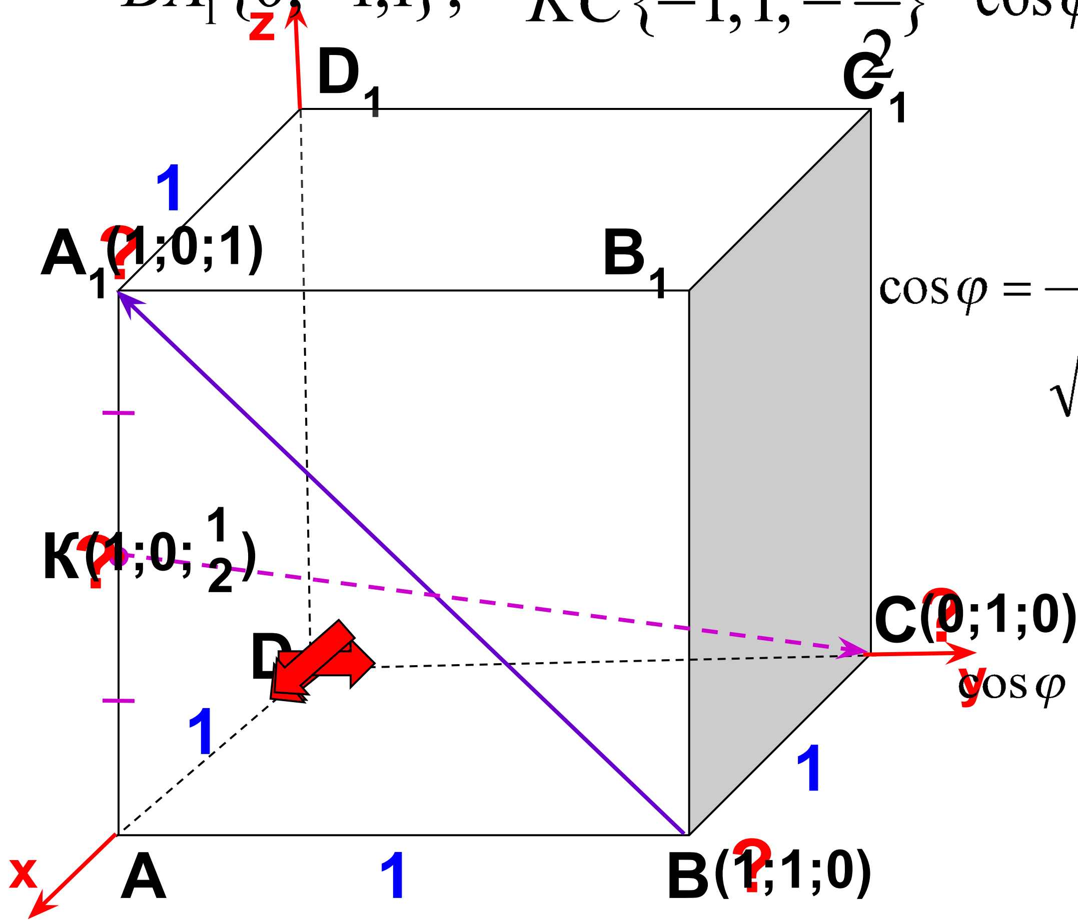
$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Задача№1. Точка К – середина ребра AA_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми A_1B и СК.

2 способ

$\overrightarrow{BA_1}\{0;-1;1\}$; $\overrightarrow{KC}\{-1;1;-\frac{1}{2}\}$

$$\cos\varphi = \frac{|x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$



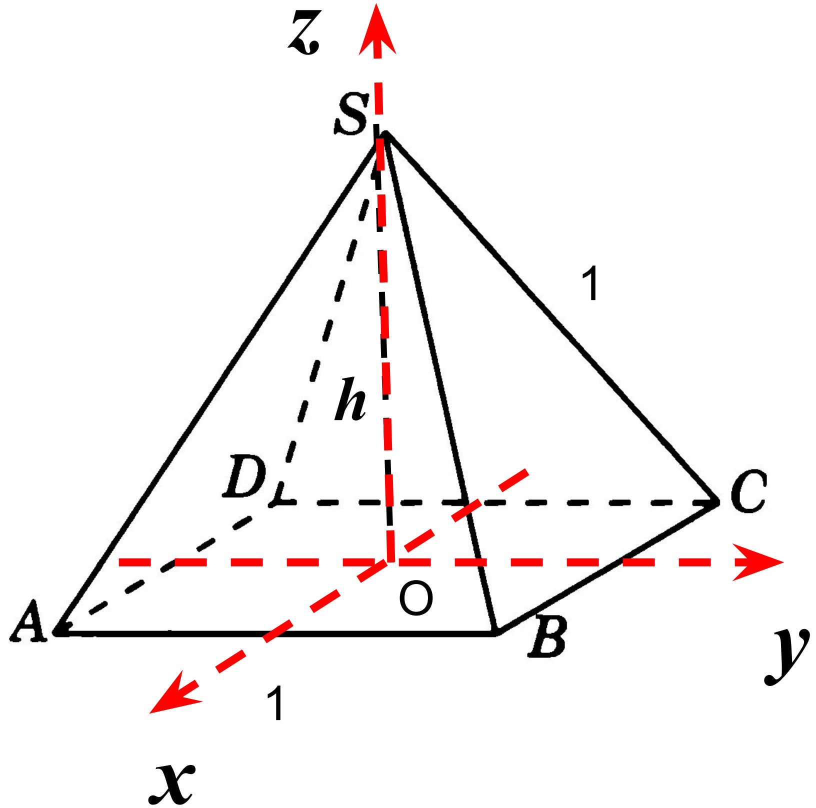
$$\cos\varphi = \frac{\left|0\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right|}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|-1\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \varphi = 45^0$$

Правильная четырехугольная пирамида.

Найдите координаты вершин пирамиды



B(0,5; 0,5; 0)

C(-0,5; 0,5; 0)

D(-0,5; -0,5; 0)

A(0,5; -0,5; 0)

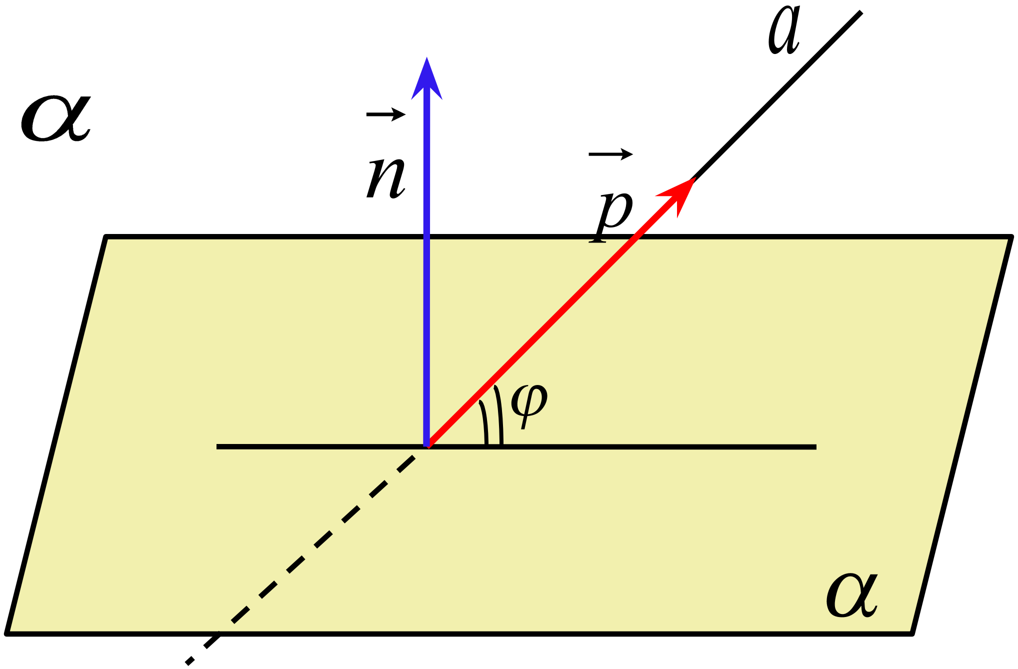
$S(0;0;h)$

Угол между прямой и плоскостью

$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ - *направляющий вектор прямой*

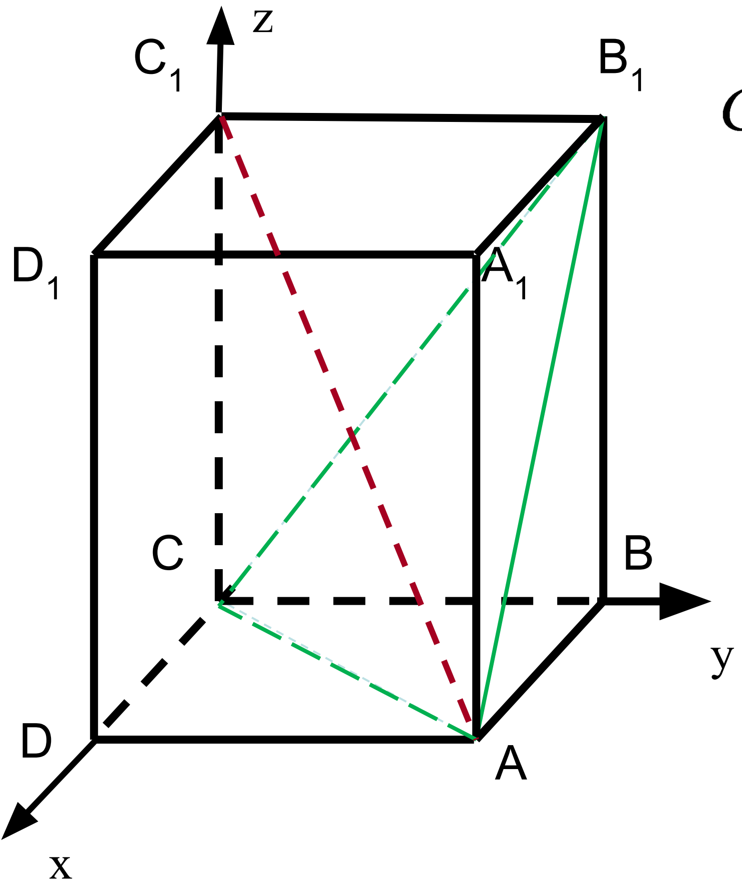
$\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$ - *нормальный вектор плоскости*

$\vec{n} \perp \alpha$



$$\sin\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Задача 2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AB = AD = 2$, $AA_1 = 1$). Найти угол между прямой AC_1 и плоскостью AB_1C.



$$C(0;0;0),\quad A(2;2;0)\quad C_1(0;0;1)\quad B_1(0;2;1)$$

$$x - y + 2z = 0 \quad \vec{n}\{1;-1;2\}$$

$$\sin\angle\left(AC_1;(AB_1C)\right) = \left|\cos\angle\left(\overrightarrow{AC_1};\vec{n}\right)\right| =$$

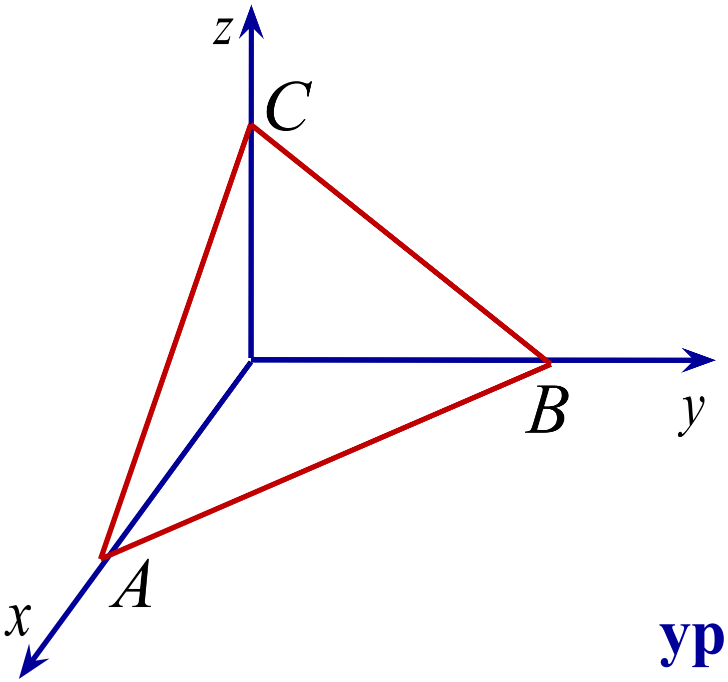
$$= \frac{|-2+2+2|}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{1+1+4}} = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}$

Уравнение плоскости

$$ax + by + cz + d = 0$$

Если плоскость проходит через начало координат, то ***d=0***

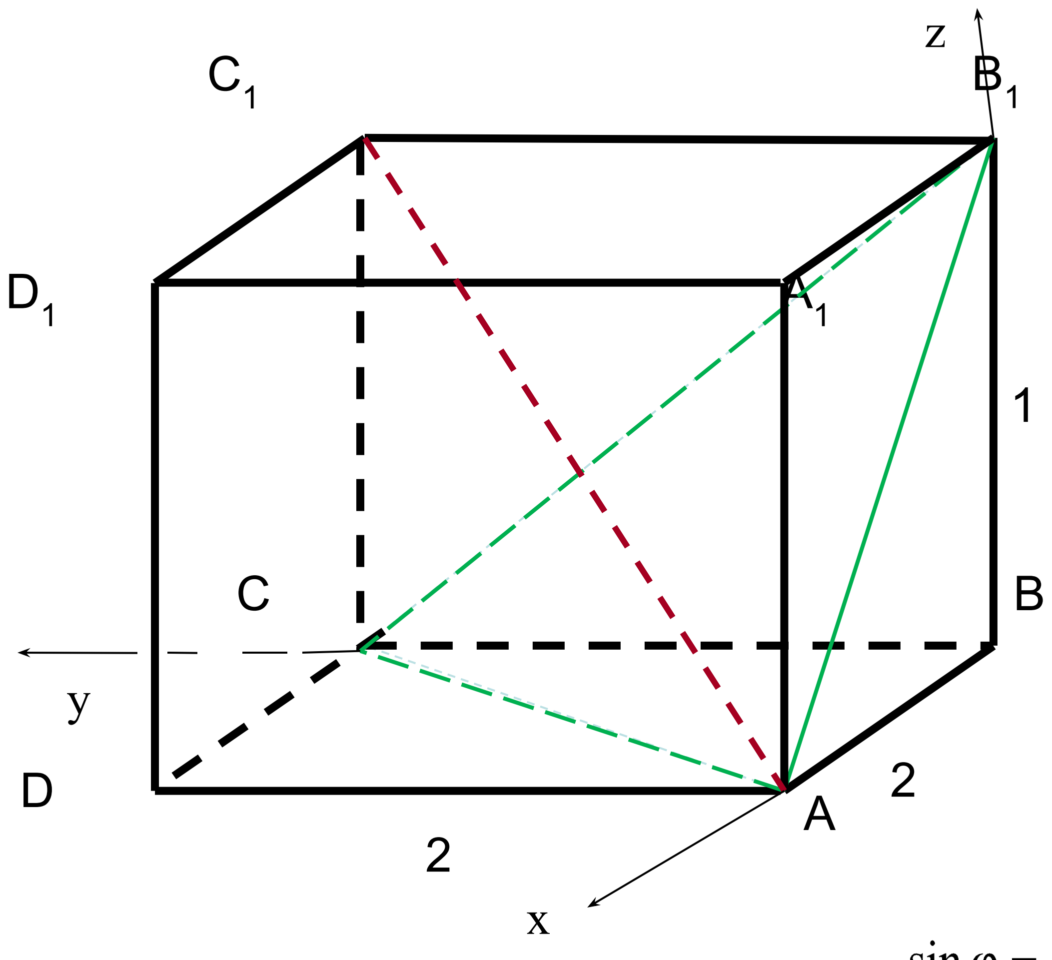


Если плоскость пересекает оси координат в точках A, B, C, то

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

уравнение плоскости в отрезках

Задача№2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AB = AD = 2$, $AA_1 = 1$). Найти угол между прямой AC_1 и плоскостью AB_1C.



Рассмотрим случай, когда точки A, B_1, C лежат на координатных осях.

Тогда уравнение плоскости AB_1C имеет вид:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$$

$$\overline{n}\{1;1;2\}$$

$$\vec{n}\perp(AB_1C)$$

$$\overrightarrow{AC_1}\{-2;2;1\}$$

$$\sin\varphi=\frac{|1\cdot(-2)+1\cdot 2+1\cdot 2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{6}}{9}$$

Угол между плоскостями

$$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

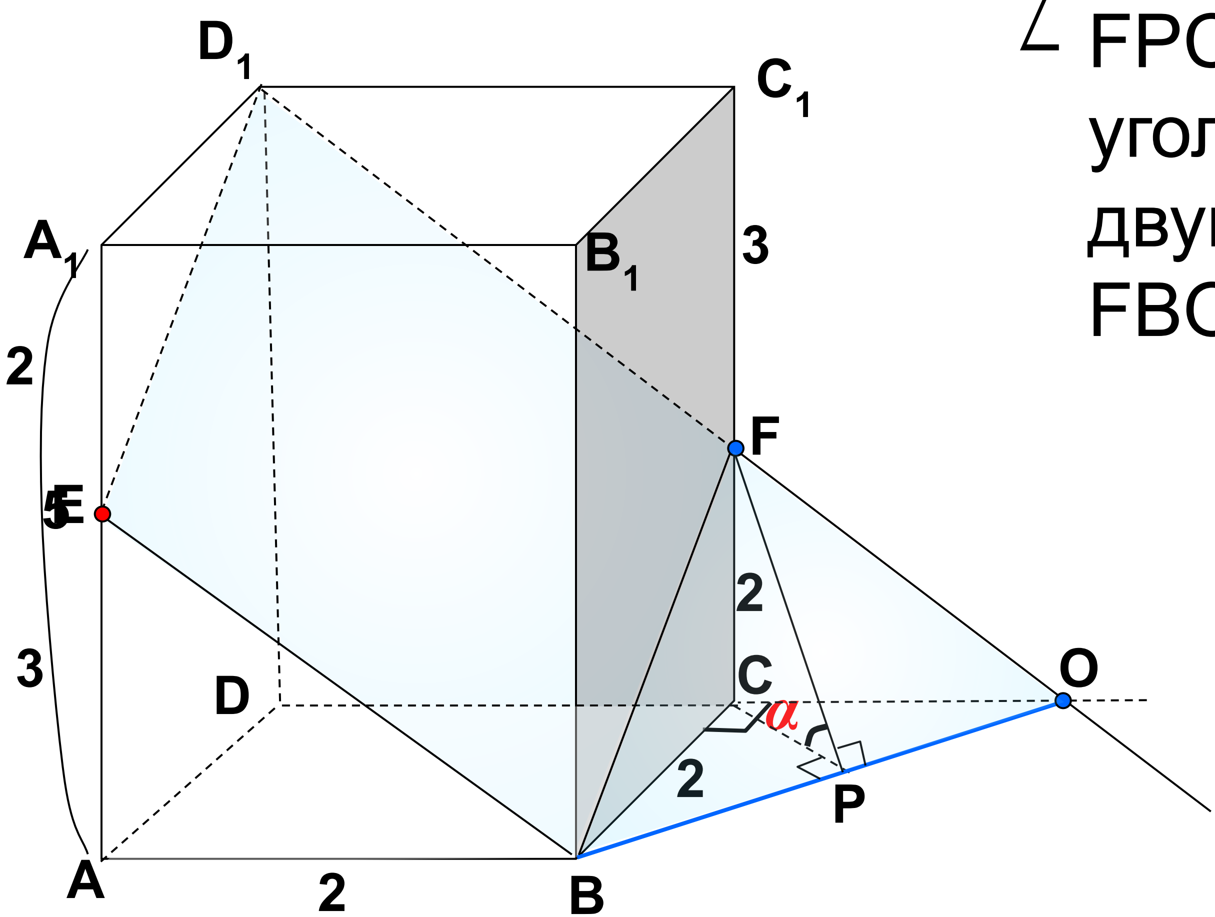
Вектор нормали плоскости $\alpha : \ \overrightarrow{n_1}\{a_1; b_1; c_1\}$

$$\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Вектор нормали плоскости $\beta : \ \overrightarrow{n_2}\{a_2; b_2; c_2\}$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}}$$

Задача №3. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые ребра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1. (Обсудить нахождение линейного угла двугранного угла).



$\angle$ FPC – линейный угол двугранного угла FBOC

В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые ребра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

2 способ.

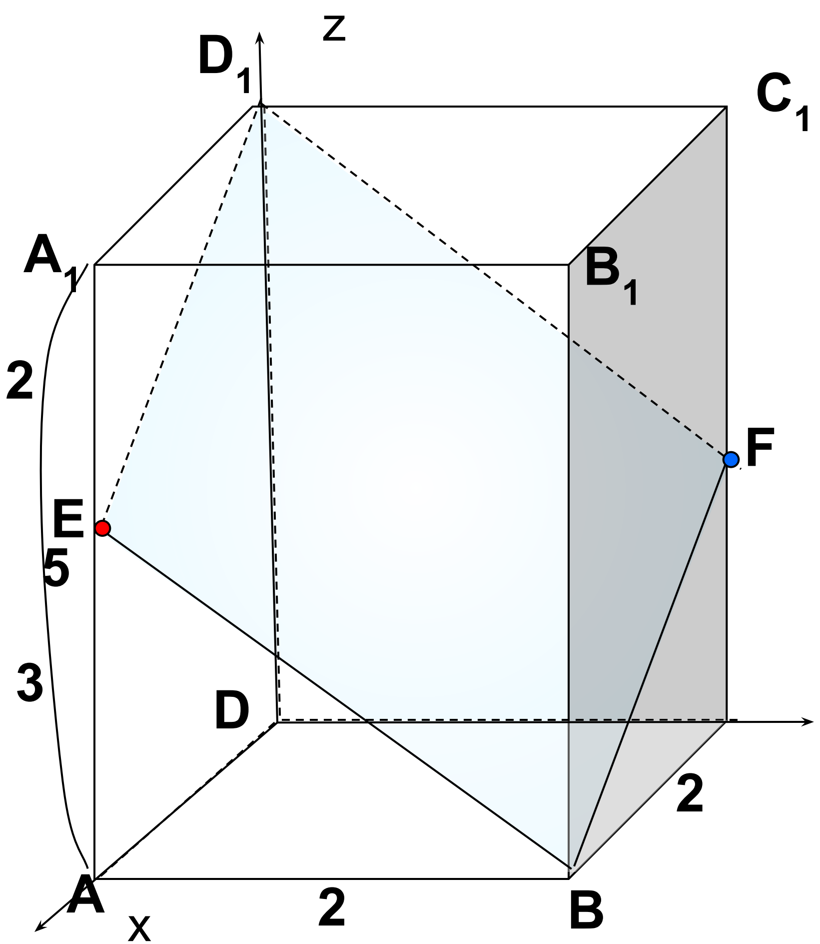
$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

Вектор нормали плоскости $\vec{n_1}\{a_1; b_1; c_1\}$

Вектор нормали плоскости $\vec{n_2}\{a_2; b_2; c_2\}$

$\alpha :$

$\beta :$



E(2;0;3), B(2;2;0), D_1 (0;0;5). $\overrightarrow{DD_1}\{0; 0;5\}$,

$$\begin{cases} 2a+3c+d=0 \\ 5c+d=0 \\ 2a+2b+d=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=c \\ d=-5c \\ b=1,5c \end{matrix} \quad 2x+3y+2z-10=0$$

$\vec{n} \perp (BED_1)$ $\quad \vec{n}\ \{2;3;2\}$

$$\cos\varphi = \frac{|0\cdot 2 + 0\cdot 3 + 5\cdot 2|}{\sqrt{0^2+0^2+5^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{17}}$$

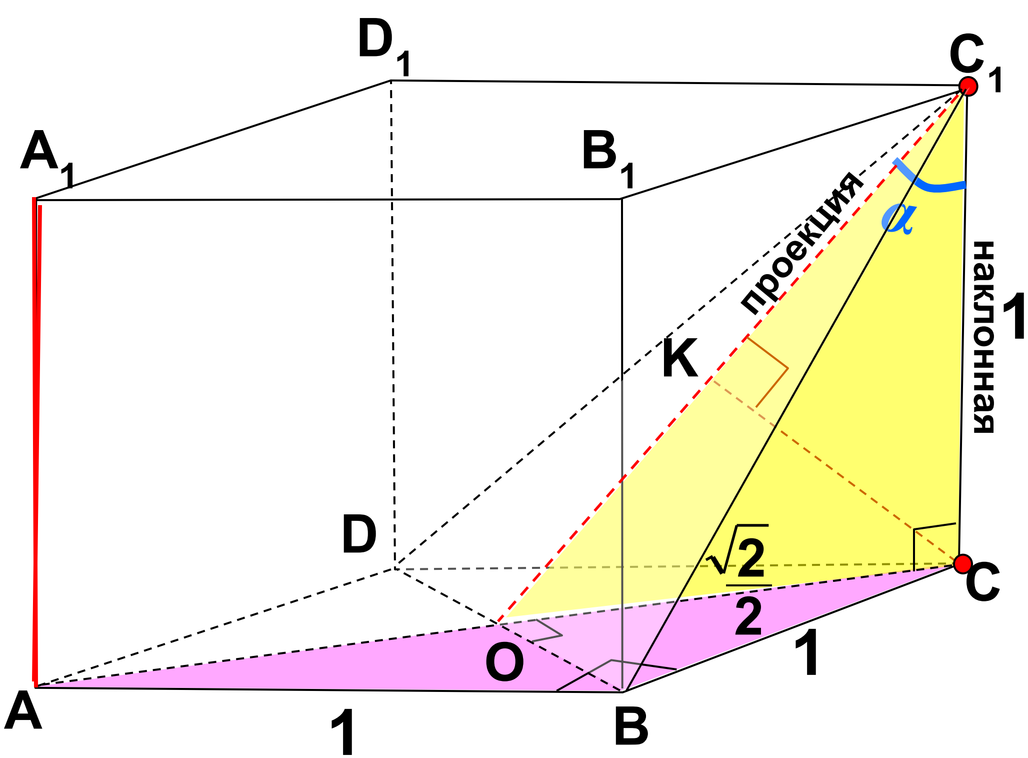
Самостоятельная работа. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D.

1- используя определение прямой и плоскости

2- методом координат

1 способ решения. Прямая CC_1 является наклонной к плоскости BC_1D. Найдем проекцию CC_1 на плоскость BC_1D.

$CC_1 \rightarrow C_1K,$



Для нахождения $tg\alpha$ более удобен ΔOCC_1, а не ΔKCC_1.

Из ΔABC :

$AC^2 = AB^2 + BC^2;$

$AC^2 = 1^2 + 1^2;$

$AC^2 = 2;$

$AC = \pm\sqrt{2};$

$AC = \sqrt{2}.$

Из ΔOCC_1 :

$tg\alpha = \dfrac{OC}{CC_1};$

$tg\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2};$

Домашнее задание

В кубе $ABCD\,A_1\,B_1\,C_1D_1$ найдите угол между плоскостями $A_1\,C_1\,D$ и BC_1D

Отправить решение на почту.