Тема: «Нестандартные способы решения тригонометрических уравнений

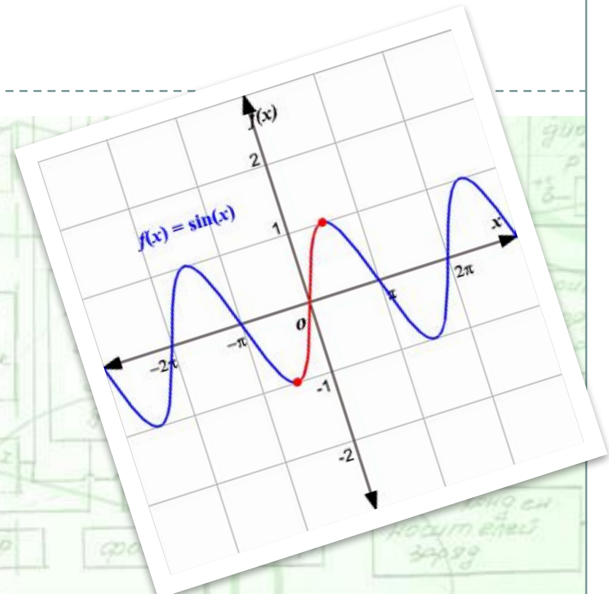
<u>ВЫПОЛНИЛА:</u>
ИВАНОВА СВЕТЛАНА
УЧЕНИЦА 10 КЛАССА

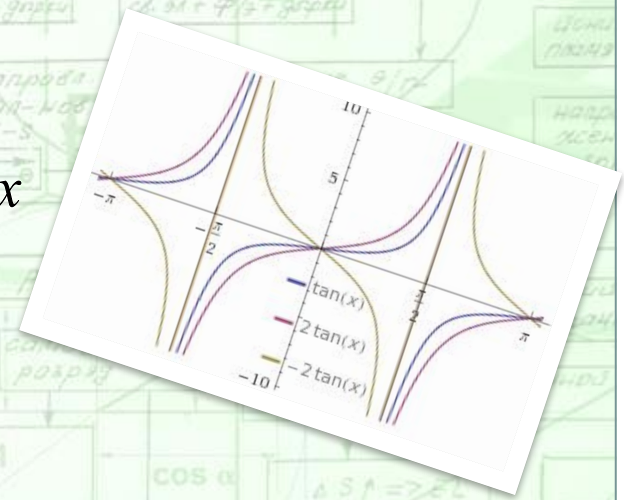
Основные цели:

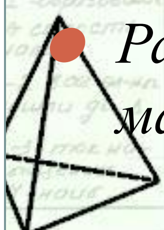
- *освоить способы создания динамических чертежей с помощью программы GeoGebra;*
- *изучить возможности использования программы GeoGebra в учебном процессе при подготовке к ЕГЭ и при подготовке докладов для научно-практических конференций;*
- *Освоить простейшие тригонометрические уравнения;*
- *отработать технологию решения тригонометрических уравнений графическим способом с помощью динамической программы GeoGebra;*

Задачи:

- Использовать современные информационные технологии в ходе решения математических задач.
- Отработать алгоритм решения простейших тригонометрических уравнений графическим способом;
- Выработать прочные навыки решения простейших тригонометрических уравнений графическим способом;
- Рационально подходить к выбору прикладных программ для решения поставленных задач.
- Развивать логическое мышление, память, математическую речь.

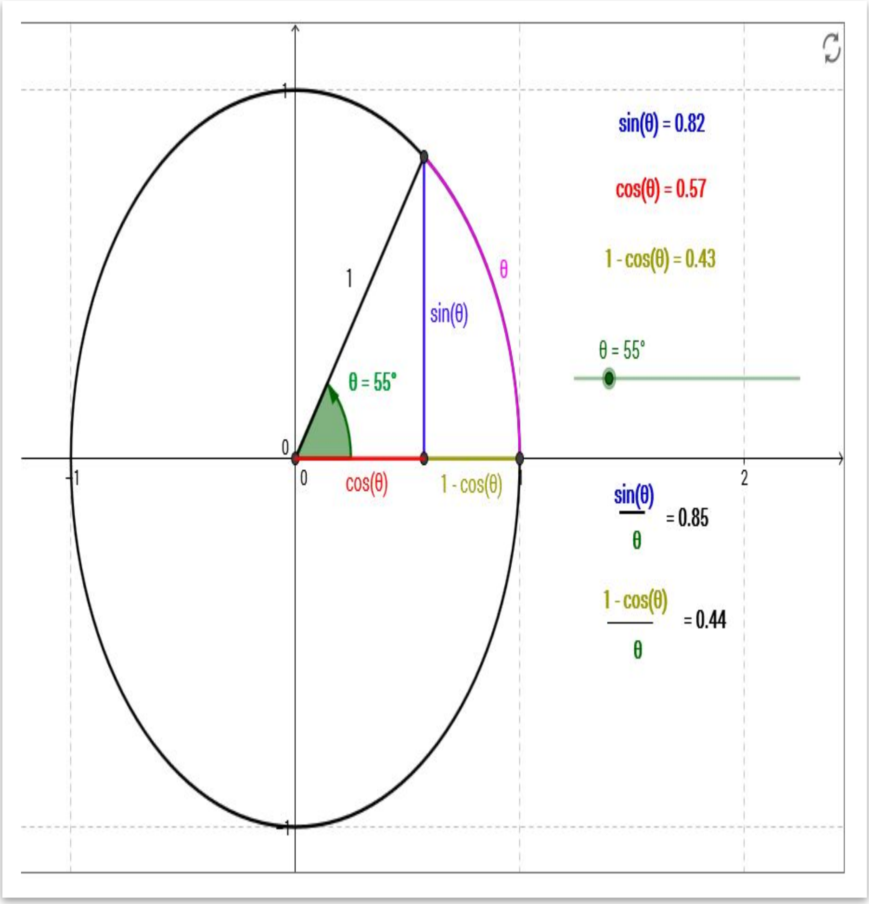






Введение

Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов: преобразование уравнения для получения его простейшего вида и решение полученного простейшего тригонометрического уравнения. Существует семь основных методов решения тригонометрических уравнений. И именно графический метод был один из первых.
В древности тригонометрия возникла в связи с потребностями астрономии, землемерия и строительного дела, то есть носила чисто геометрический характер и представляла главным образом «исчисление хорд».
Древние наблюдали за движением небесных светил. Ученые обрабатывали данные измерений, чтобы вести календарь и правильно определять время начала сева и сбора урожая, даты религиозных праздников.



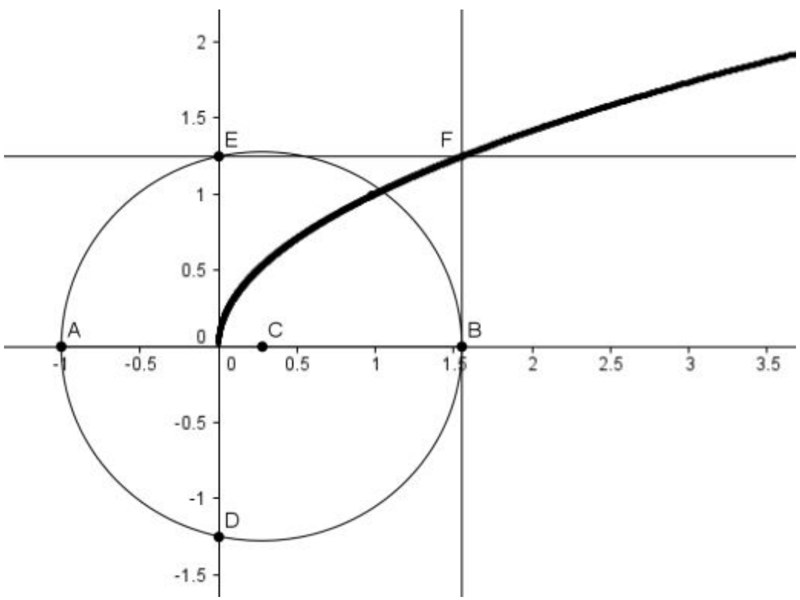
Ее возможности:

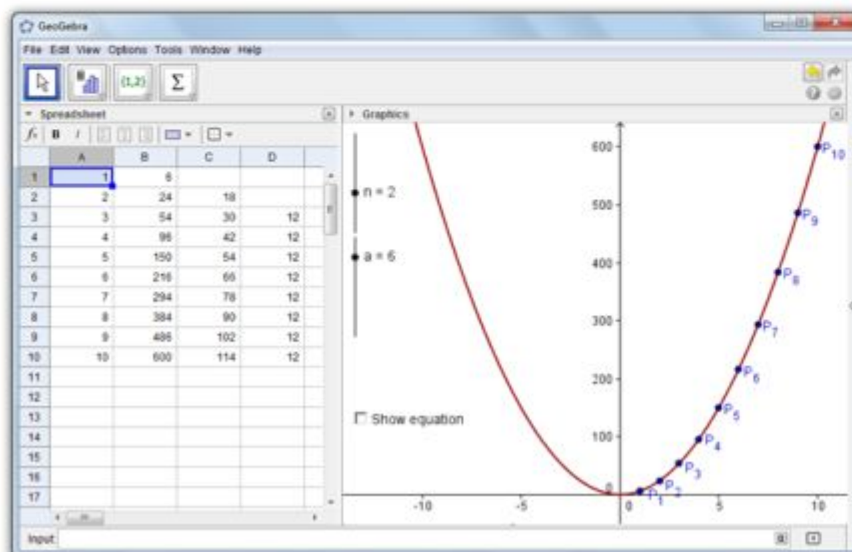
Построение кривых:

- *Построение графиков функций*
- *Построение сечений*
- *Окружности*
- *Параболы*
- *Гиперболы и др.*

Вычисления:

- *Сложение, умножение*
- *Вычисления с комплексными числами*
- *Вычисление определителя*
- *А также работа с таблицами, создание анимации и многое другое.*





АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0:$$

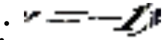
1. Посмотреть, есть ли в уравнении член $a\sin^2 x$.

2. Если член $a\sin^2 x$ *в уравнении содержится (т.е.* $a\neq 0$*), то уравнение решается делением обеих его частей на* $\cos^2 x$ *и последующим введением новой переменной* $z=\operatorname{tg} x$.

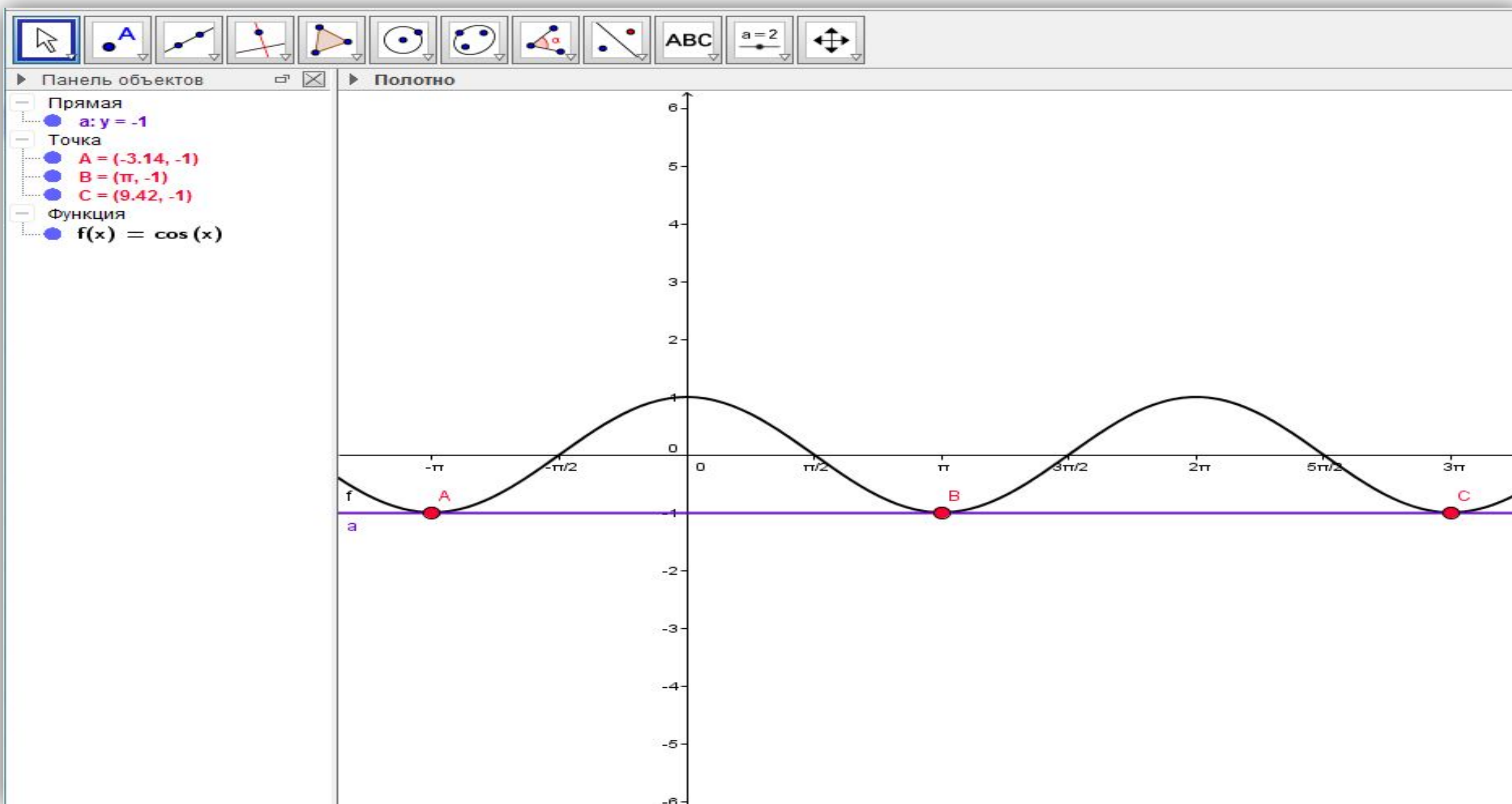
3. Если член $a\sin^2 x$ *в уравнении не содержится (т.е.* $a=0$*), то уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносят* $\cos x$.

Так же обстоит дело и в однородных уравнениях вида:

$$a\sin^2 mx+b\sin mx\cos mx+c\cos^2 mx=0.$$

Далее для построения второй функции вводим:  *и при помощи функций программы отмечаем точки пересечения двух построенных графиков.*

Конечный результат:



[Практические\1.ggb]

Отработка практических навыков. Задание №1

Необходимо решить уравнения:

1.

$\cos x = -1$

$\sin x = \frac{1}{2}$

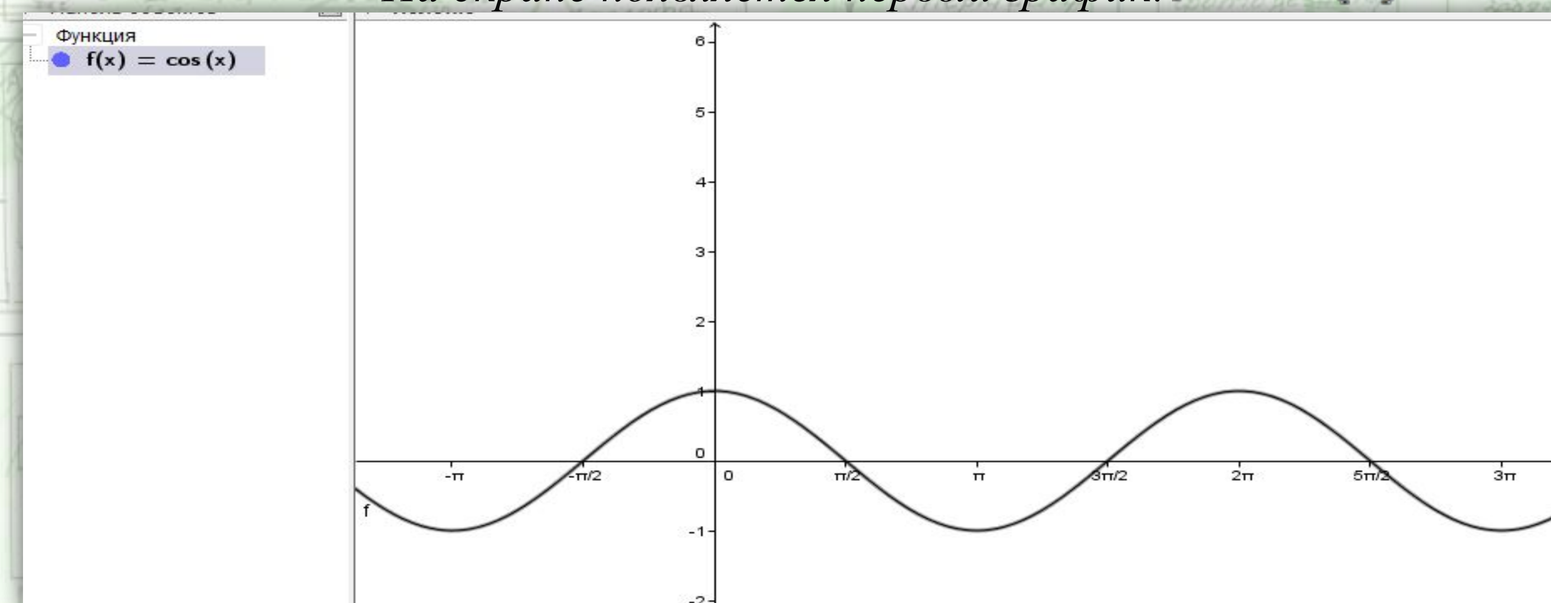
1. cos x = -1

Решение:

Для того, чтобы решить данное уравнение, нам также необходимо построить два графика функций $y = \cos x$ *и* $y = -1$

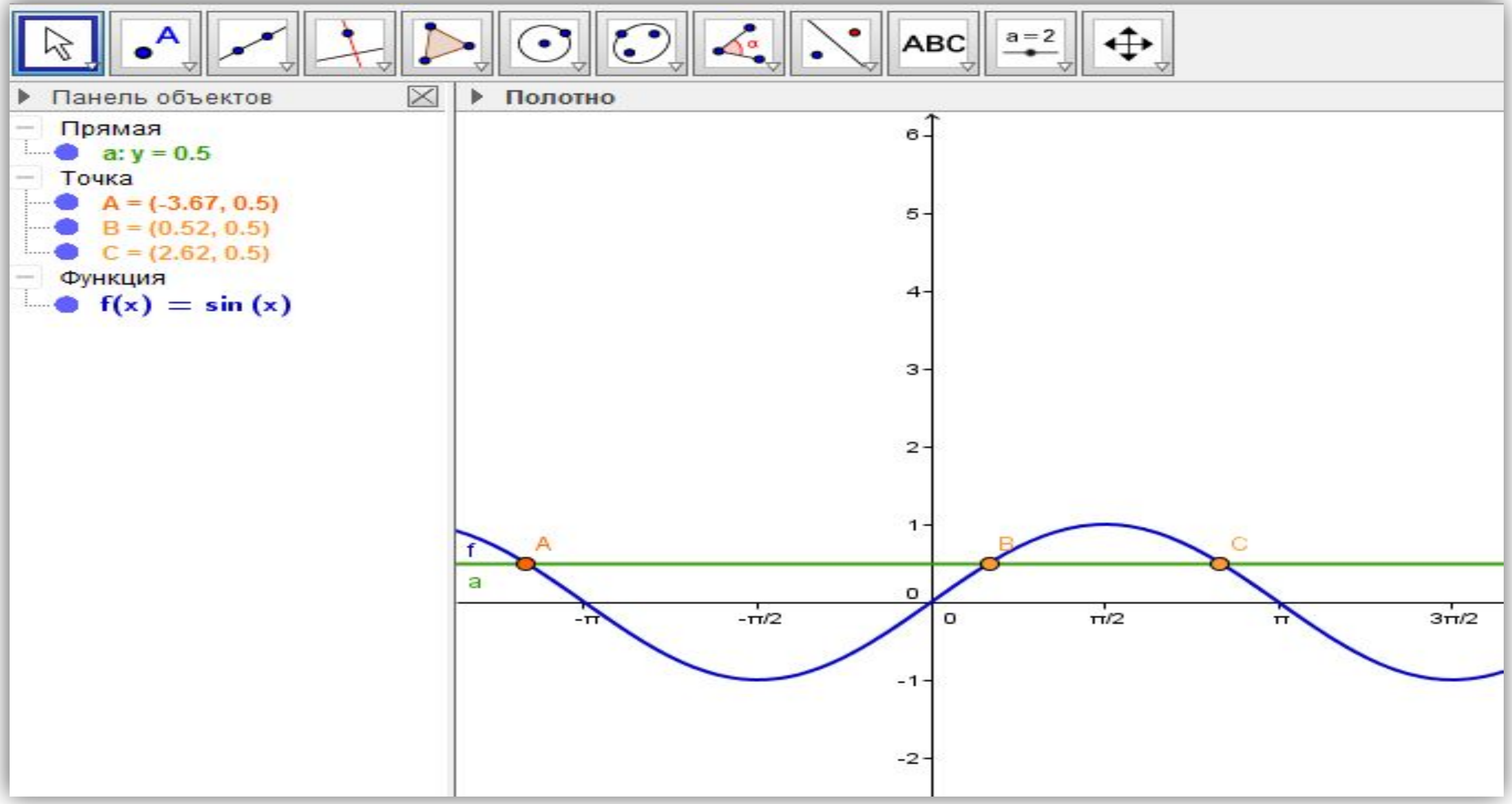
Для этого не потребуется строить таблицы, но понадобится подготовить координатную плоскость (по оси аргумента – единичный отрезок π/2). Для построения первой функции мы вводим в строку ввода следующее: $y = \cos(x)$

На экране появляется первый график:



2. *Аналогично решаем и второе уравнение. В строку ввода вводим необходимые данные y=sin x и y=1/2, определяем точки пересечения графиков, это и будет являться решением данного уравнения.*

Конечный результат представлен на рисунке:



Практические\2.ggb

Простейшие тригонометрические уравнения

	a	0	1	-1
sin x	$X=(-1)^n \arcsin a + \pi n$	$X=\pi n$	$X=\pi/2 + 2\pi n$	$X=-\pi/2 + 2\pi n$
cos x	$X=\pm \arccos a + 2\pi n$	$X=\pi/2 + \pi n$	$X=2\pi n$	$X=\pi + 2\pi n$
tg x	$X=\operatorname{arctg} a + \pi n$	$X=\pi n$	$X= \pi/4 + \pi n$	$X= -\pi/4 + \pi n$

$n \in Z$

3. Тригонометрические уравнения, решаемые путем понижения степени уравнения

Пример.

$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

Используем формулы понижения степени $\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} = 2$$

$(\cos 2x + \cos 8x) + (\cos 4x + \cos 6x) = 0$

$2\cos 5x \cdot \cos 3x + 2\cos 5x \cdot \cos x = 0$

$2\cos 5x \cdot (\cos 3x + \cos x) = 0, \qquad 2\cos 5x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = 0$

$\cos 5x = 0; \qquad \cos 2x = 0; \qquad \cos x = 0$

$5x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n; \qquad 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \qquad x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z$

$x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5}; \qquad x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2};$

общее решение: $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi}{5} n, \ n \in Z$ или $x = \dfrac{\pi}{5}\left(\dfrac{1}{2} + n\right), \ n \in Z$

Примеры уравнений.

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Уравнение уже имеет простейший вид $t=\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$, однако, можно использовать четность функции cos, применить формулы приведения и упростить его.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

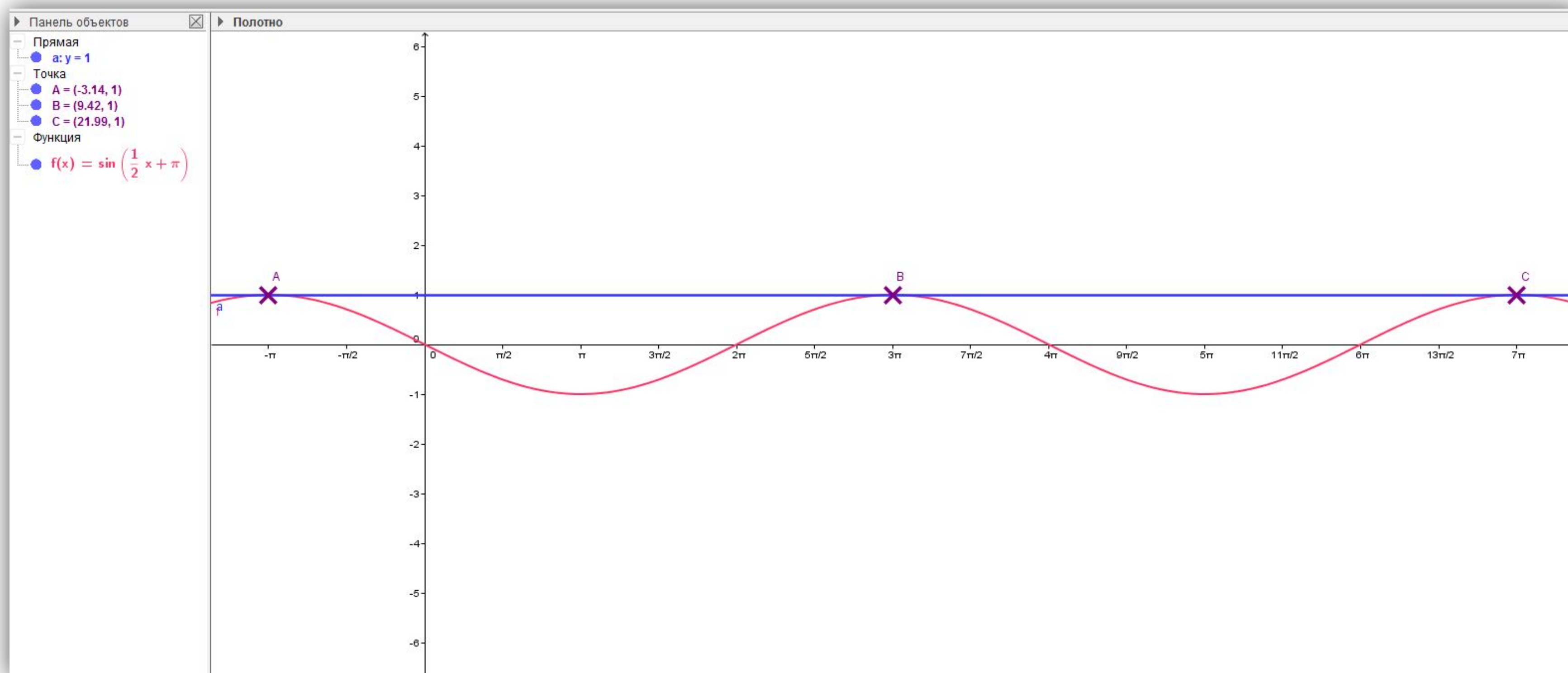
$$2x=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k$$

$$2x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k \;\Big|\; \div 2$$

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$$

О: $x=(-1)^k\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$

Нам необходимо построить два графика: и $y = 1$. Отметив точки пересечения $y = \sin\left(\frac{1}{2}x + \pi\right)$ *графиков мы найдём место пересечения нашего корабля и корабля пиратов. Это и будет являться решением. В нашем случае это точки А (со значением –π), В(3π) и С (π)*



[Практические\корабль синих.ggb]()

Миноносец «Боевой»

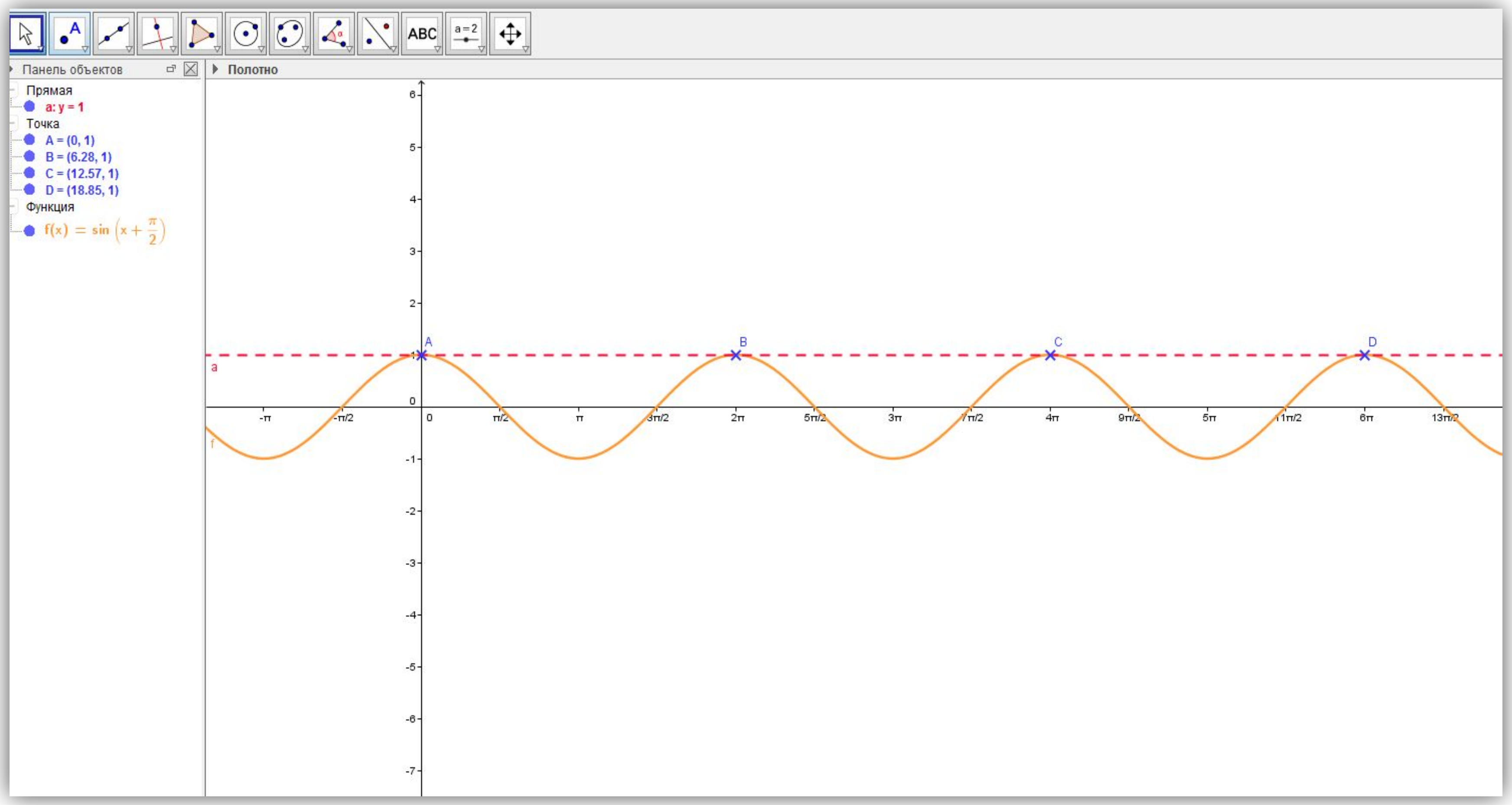
миноносец «Боевой»

Корабль красных:

«Пираты решили захватить главнокомандующий боевой крейсер, не подозревая о существовании эскадрильи из трех боевых кораблей. Вы находитесь на одном из них. Ваша задача: выяснить, в каких точках вашего маршрута вы пересечетесь с пиратским кораблем и сможете его обезвредить. Ваш маршрут движения задан графиком $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Маршрут движения пиратов задан графиком функции $g(x)=1$».

Аналогичным способом решаем эту задачу. В строку ввода вводим заданные формулы в соответствии с синтаксисом программы и ищем точки пересечения.

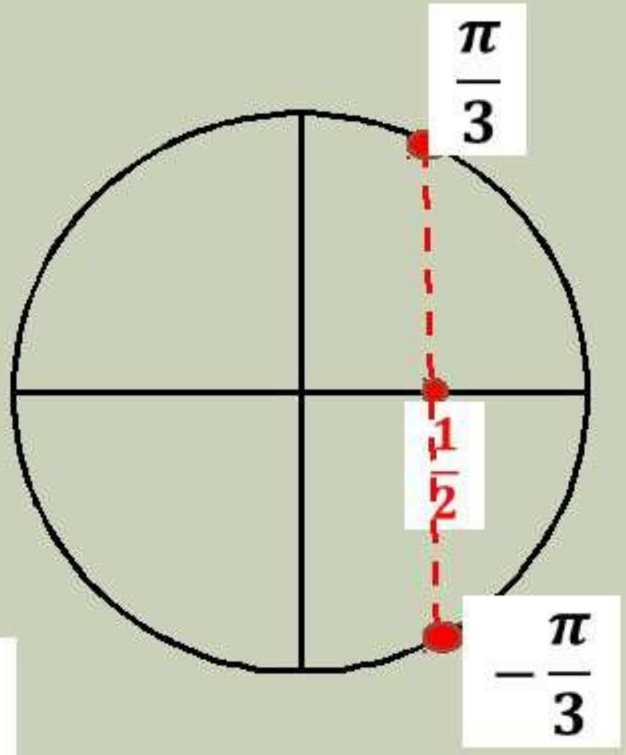
*Построив графики, мы сразу видим решение задачи. Точки **A**, **B**, **C** и **D** – точки пересечения кораблей.*



[Практические\корабль красных.ggb]()

Примеры Решения простейших тригонометрических уравнений с помощью числовой окружности:

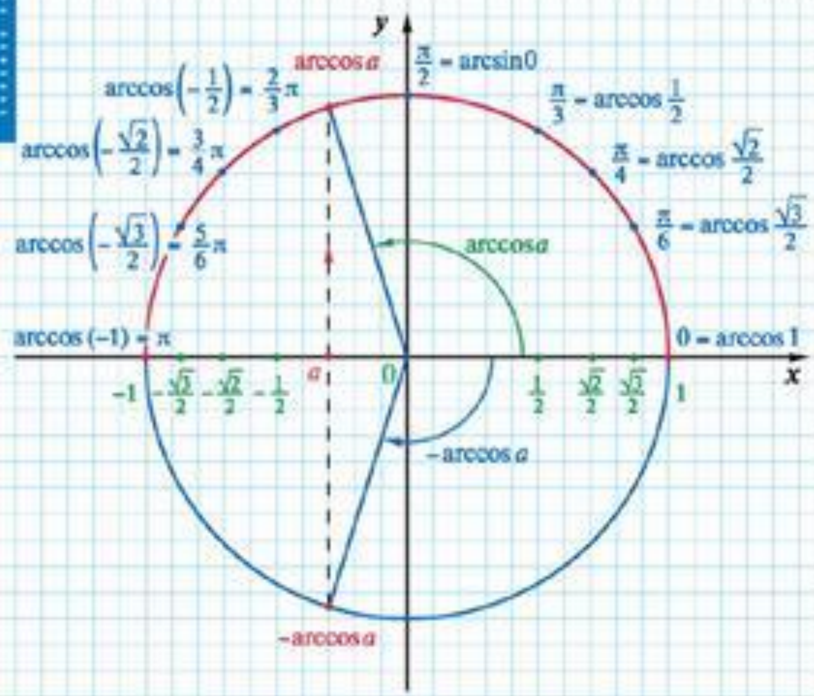
$$1)\ \cos t = \frac{1}{2}$$



$$t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$$

МАТЕМАТИКА

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $\cos x = a, \quad -1 \leqslant a \leqslant 1$



$$\left[\begin{aligned} &x = \arccos a + 2\pi k, && k \in \mathbb{Z},\\ &x = -\arccos a + 2\pi k, && k \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

или

$$x = \pm\arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Например: $\cos x = -\frac{1}{2}$,

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k,$$

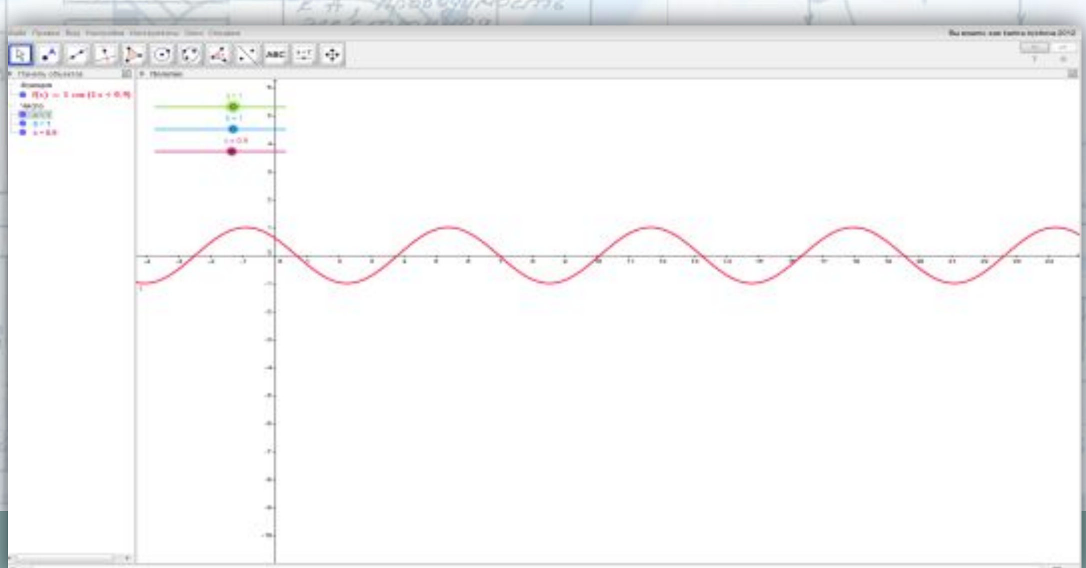
$$x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

спектр

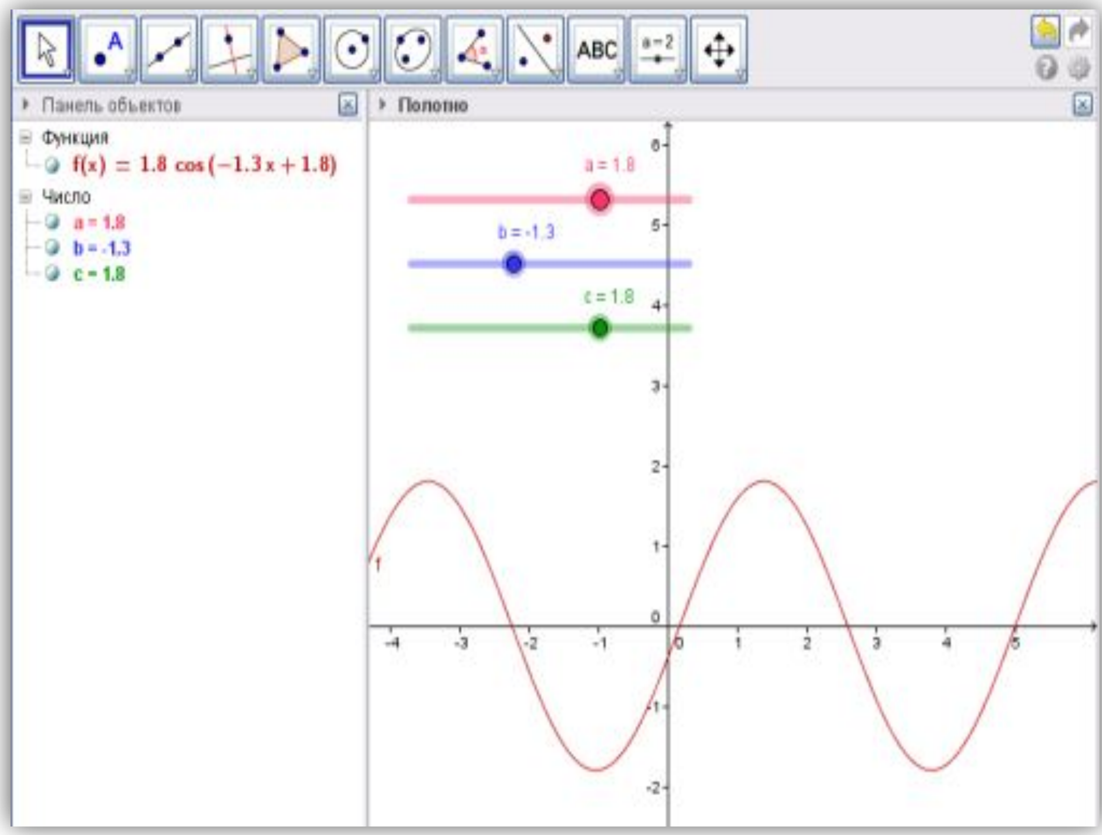
Задание № 3. Создание динамической модели.

Задание. *Создать динамическую модель для иллюстрации поведения функции y=a cos(bx+c) в зависимости от параметров* ***a***, ***b*** *и* ***c***.

Для выполнения этого типа задания нам потребуются ползунки, которые отвечают за динамическое изменение параметров функции при различных значениях в режиме реального времени.
Для начала рисуем график квадратичной функции (вводим формулу в строку ввода в соответствии с синтаксисом программы), затем создаем ползунки для параметров ***a***, ***b*** *и* ***c***.



При изменении любого из этих коэффициентов изменяется и поведение параболы. Это в свою очередь позволяет нам наглядно представить изменение графика, а функция ***«паузы»*** *позволяет зафиксировать поведения графика при критических значениях параметра. Конечный результат представлен на рисунке, а саму модель можно посмотреть, перейдя по ссылке.*



Практические\динамическая модель.ggb

Основные выводы

- работа с программой GeoGebra в динамическом режиме активизирует сильных учеников, делает их подготовку более целенаправленной и индивидуальной;
- работа с программой GeoGebra очень удобна для демонстрации трудностей, возникающих при использовании графического метода решения задач с параметрами;
- Освоили методы простейшего решения тригонометрических уравнений;
- работа с программой GeoGebra требует минимального уровня информационно-компьютерной грамотности учителя и учащихся и разумных временных затрат для получения желаемого результата.