

«Теорема Чевы,
теорема Менелая»

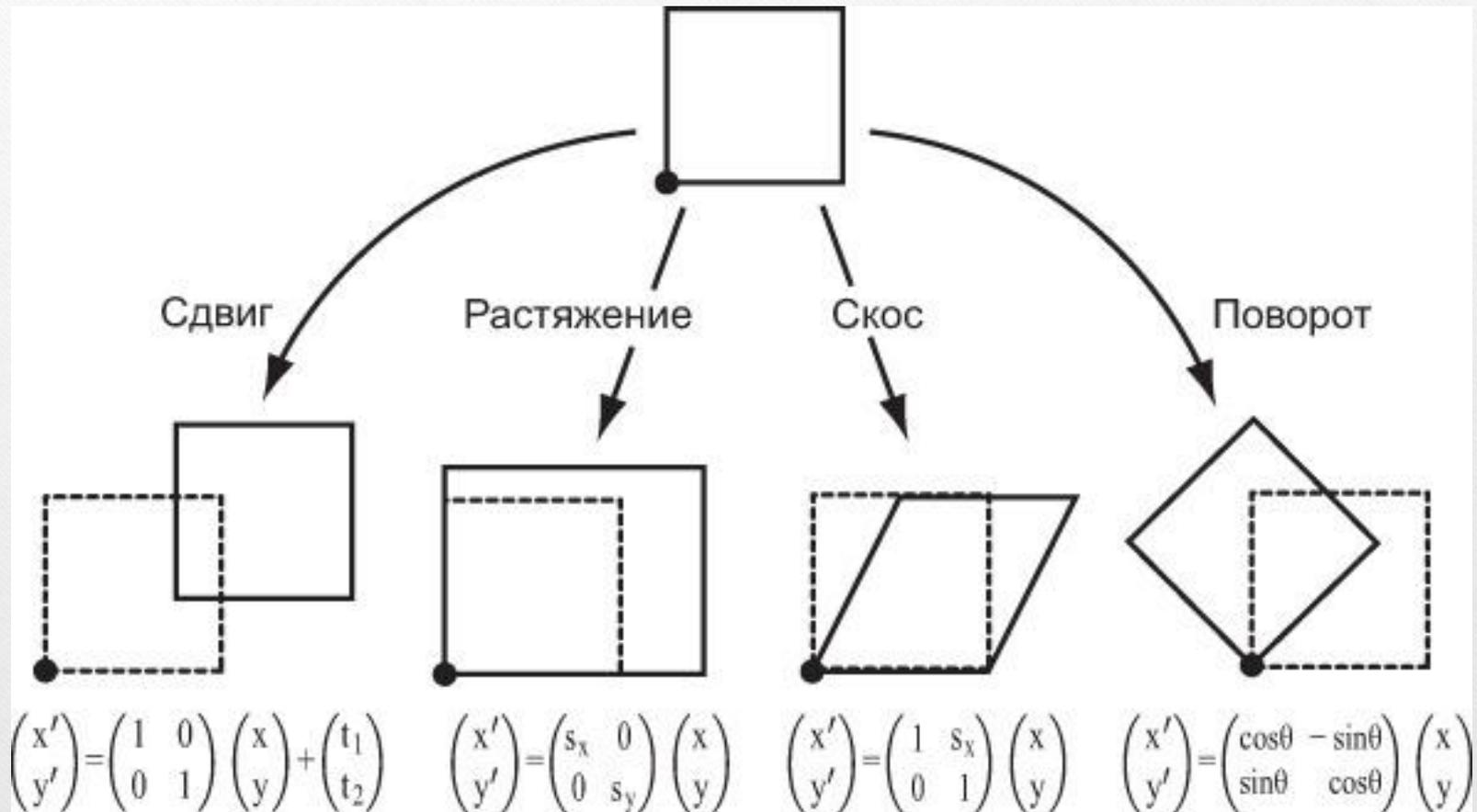
Джованни Чева



- Джованни Чева (Giovanni Ceva) родился в 1647 году в Италии. Он окончил иезуитский колледж в Милане, после чего стал студентом Университета в Пизе, где позже и стал работать профессором математики.
- С 1686 года Чева работал в Университете в Мантуе, оставаясь на этом посту до самого конца своей жизни. Кстати, брат Джованни, Томасо Чева, также был довольно талантливым и известным математиком, а также поэтом.

- Большую часть жизни Чева изучал геометрию, стараясь возродить греческую геометрию; кроме того, сегодня его помнят и по изысканиям в области механики.
- В 1678-м Чева опубликовал свою, ставшую знаменитой, теорему «О взаимнопересекающихся прямых» о синтетической геометрии треугольника; теорема эта впоследствии получила его имя - теорема Чевы.
- Теорема эта сегодня является классической теоремой геометрии треугольника. Говоря простым языком, Чева изобрел некий общий метод, позволяющий по положению точек на сторонах треугольника определять, пересекается ли соответствующая тройка прямых в одной точке или нет. Она аффинная, то есть теорема эта может быть сформулирована используя только характеристики сохраняющиеся при аффинных преобразованиях. Кстати, отрезок, соединяющий вершину треугольника с некоторой точкой на противоположной стороне, называется чевианой - также по имени Джованни Чевы.
- Можно сказать, что эта теорема служит фундаментом всей геометрии треугольника.

Аффинное преобразование-отображение плоскости или пространства в себя, при котором параллельные прямые переходят в параллельные прямые.





- Известно, что опубликовал ученый не только свои теоремы, но и доработал и популяризировал теоремы Менелая.
- Известно, что Джованни был и инженером-гидравликом, а также экономистом, и несколько раз ему довелось поработать на правительство Мантуи, был он правительственным комиссаром Мантуанского герцогства. В 1728 году он обсуждал проблемы в гидравлике.
- Джованни Чева умер 15 июня 1734 года, в возрасте 85 лет; смерть его последовала во время осады Мантуи франко-сардинской армией.

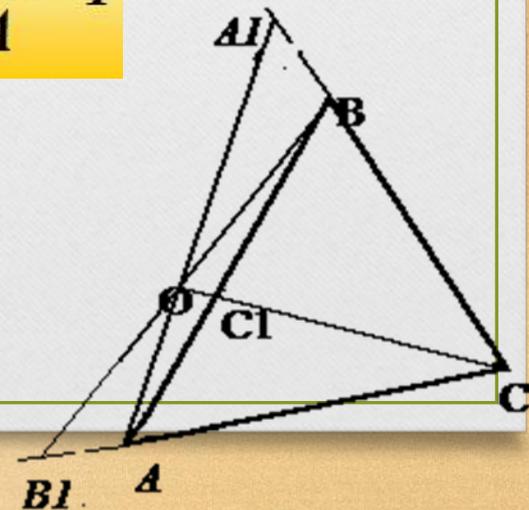
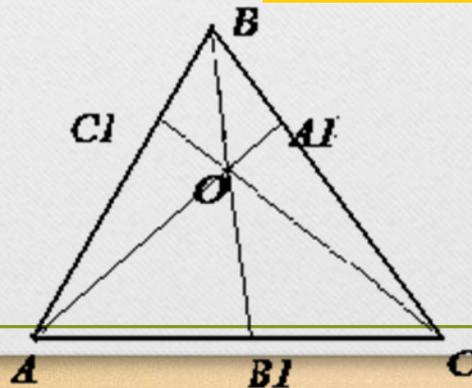
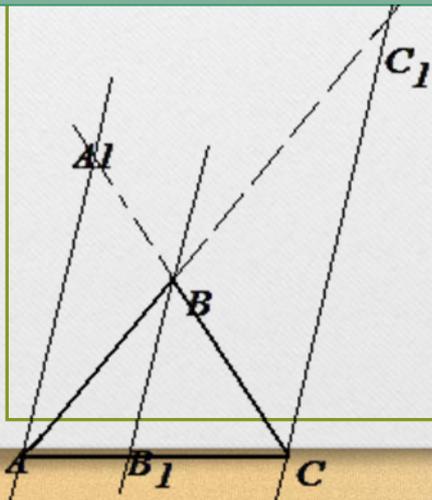
- Чева и сегодня считается не только выдающимся математиком, но и талантливым автором в области экономики - именно он применил математику к экономике и стал первым математическим писателем по этому предмету.



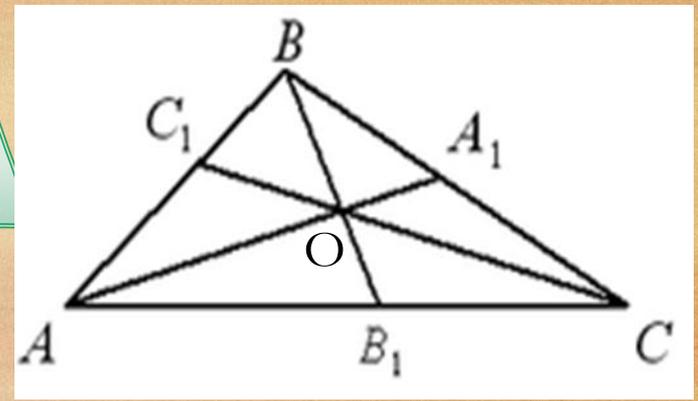
Теорема Чебы

- Пусть в $\triangle ABC$ на сторонах BC, AC, AB или их продолжениях взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1 , не совпадающие с вершинами треугольника. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда выполняется равенство:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$



Доказательство



- Пусть отрезки AA₁, BB₁ и CC₁ пересекаются в точке O.

Докажем, что
$$\frac{AB_1}{B_1C} \star \frac{CA_1}{A_1B} \star \frac{BC_1}{AC_1} = 1 \quad (1)$$

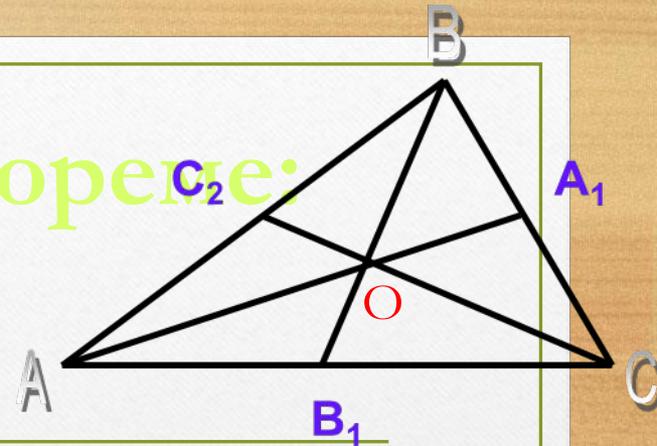
По теореме о пропорциональных отрезках в треугольнике имеем:

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} \star \left(1 + \frac{CA_1}{A_1B}\right) \quad \text{И} \quad \frac{AO}{OA_1} = \frac{C_1A}{BC_1} \star \left(1 + \frac{A_1B}{CA_1}\right)$$

Левые части этих равенств одинаковы, значит, равны и правые части. Приравнявая их, получаем
$$\frac{AB_1}{B_1C} \star \frac{BC}{A_1B} = \frac{C_1A}{BC_1} \star \frac{BC}{CA_1}$$

Разделив обе части на правую часть, приходим к равенству (1)

Утверждение обратное теореме:



- Пусть для точек A_1, B_1, C_1 , взятых на соответствующих сторонах треугольника ABC . Выполняется равенство (1). Докажем, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Обозначим точку пересечения отрезков AA_1 и BB_1 через O и проведем прямую CO . Она пересекает сторону AB в точке C_2 . Т.к. отрезки AA_1, BB_1 и CC_2 пересекаются в одной точке, то на основании доказанного в первом пункте

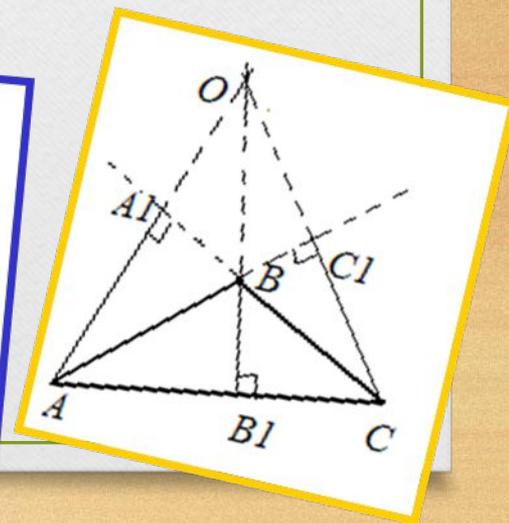
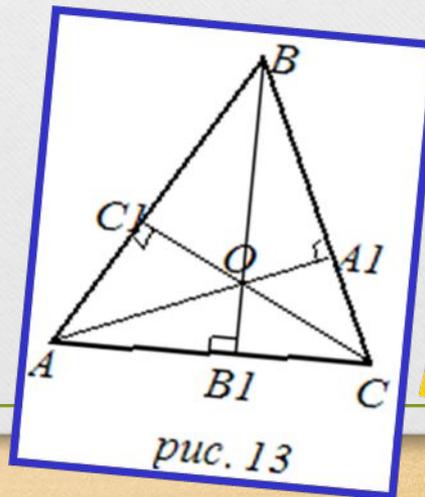
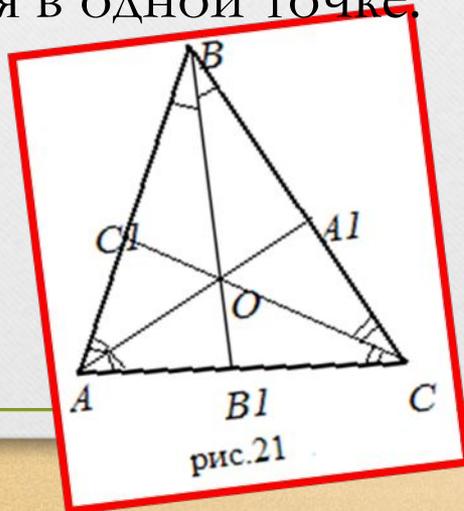
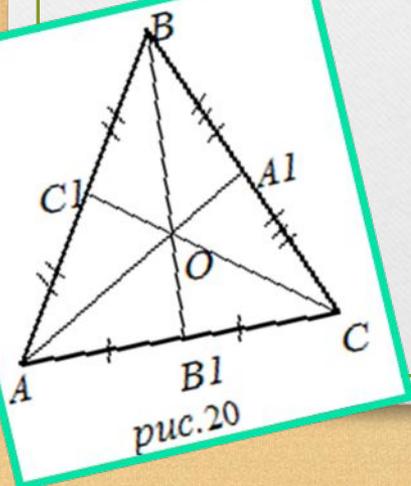
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_2}{C_2A} = 1 \quad (2)$$

Итак, имеют место равенства (1) и (2)

Сопоставляя их, приходим к равенству $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC_2}{C_2A}$, которое показывает, что точки C_1 и C_2 совпадают, и, значит, отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O . Теорема доказана.

Теорема Чебы и её следствия

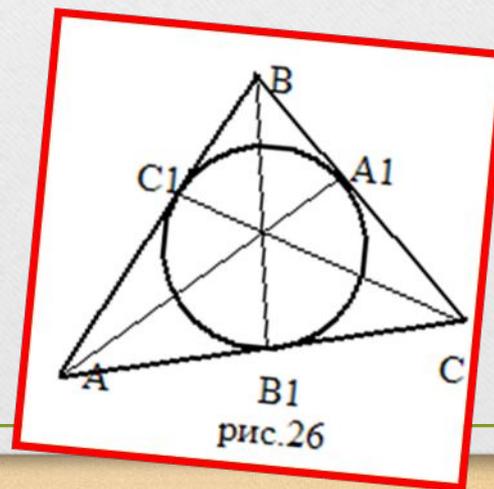
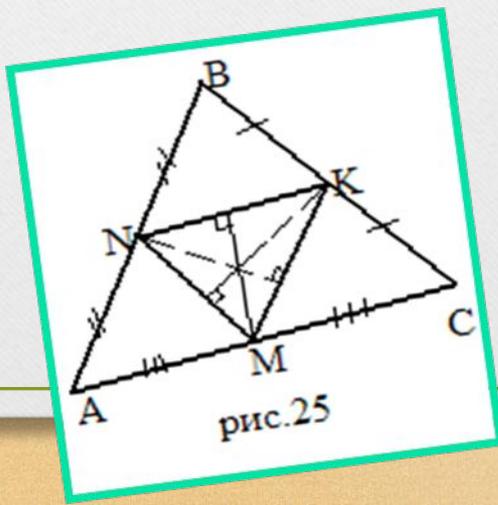
- ❖ Следствие 1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.
- ❖ Следствие 2. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
- ❖ Следствие 3. Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.



Теорема Чебы и ее следствия

❖ Следствие 4. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

❖ Следствие 5. Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вписанная окружность касается противоположных сторон, пересекаются в одной точке.



Вывод

- Теорема Чебы не изучается в основном курсе геометрии 7 –9 классов. Но трудности, связанные с освоением этой теоремы, оправданы её применением при решении задач. Решение задач с помощью теоремы Чебы более рационально, чем их решение другими способами, требующими дополнительных действий и построений, которые не всегда оказываются очевидными. Решение задач с помощью этой теоремы развивает мышление и логику учеников.