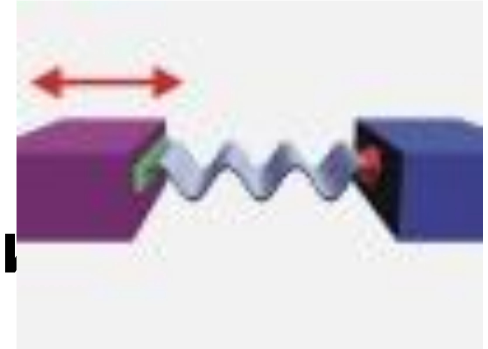
Лекция 2

Динамика – законы Ньютона

К лекции 1- Эффект Доплера

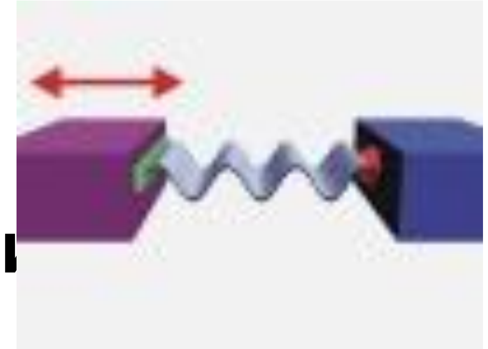
1. Источник движется, приемник остаётся неподв



Предположим, что источник, излучающий импульсы с периодом *T*, движется со скоростью
v относительно среды по направлению к покоящемуся приемнику.
В момент времени t=0 расстояние между источником и приемником равно *L*.
Первый импульс достигнет приемника в момент времени $t=L/u$, где u - скорость волны.

К лекции 1- Эффект Доплера

1. Источник движется, приемник остаётся неподвı



Второй импульс будет послан к приемнику в момент времени $t=T$,

когда расстояние между источником и приемником равно $L_1=L-vT$.

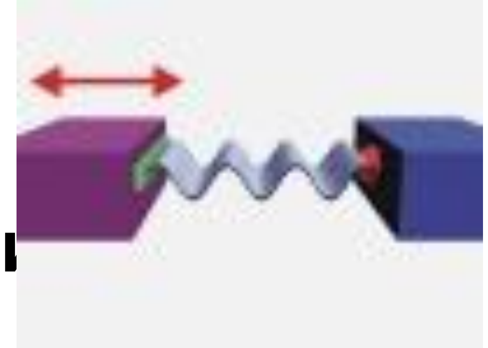
Таким образом, второй импульс достигнет приемника в момент времени $t_1=T+(L-vT)/u$.

В результате, приемник будет регистрировать импульсы с периодом

$T_{доп}=t_1-t= T(1- v/u)$

К лекции 1- Эффект Доплера

1. Источник движется, приемник остаётся неподв



Таким образом, частота сигнала $f_{доп}$, регистрируемого приемником, равна:

$f_{доп}=f/(1-v/u)$ (источник движется навстречу приемнику)

где f - частота сигнала излучаемого источником.

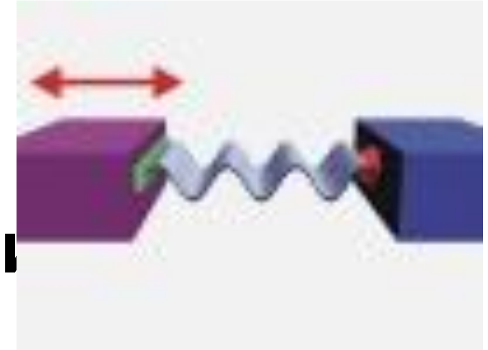
Мы видим из этого выражения, что когда источник движется по направлению к приёмнику,

частота регистрируемого сигнала увеличивается на величину fv/u,

называемую доплеровским сдвигом частоты.

К лекции 1- Эффект Доплера

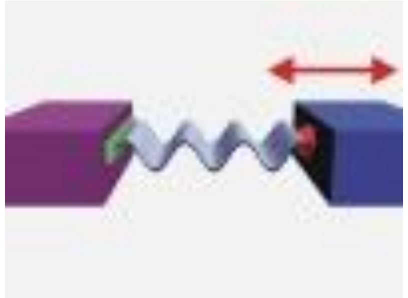
1. Источник движется, приемник остаётся неподвы



В случае движущегося источника эффект Доплера возникает из-за того,
что изменяется длина волны, распространяющейся от источника к приемнику.

К лекции 1- Эффект Доплера

1. Приемник движется, источник остаётся неподвижным.

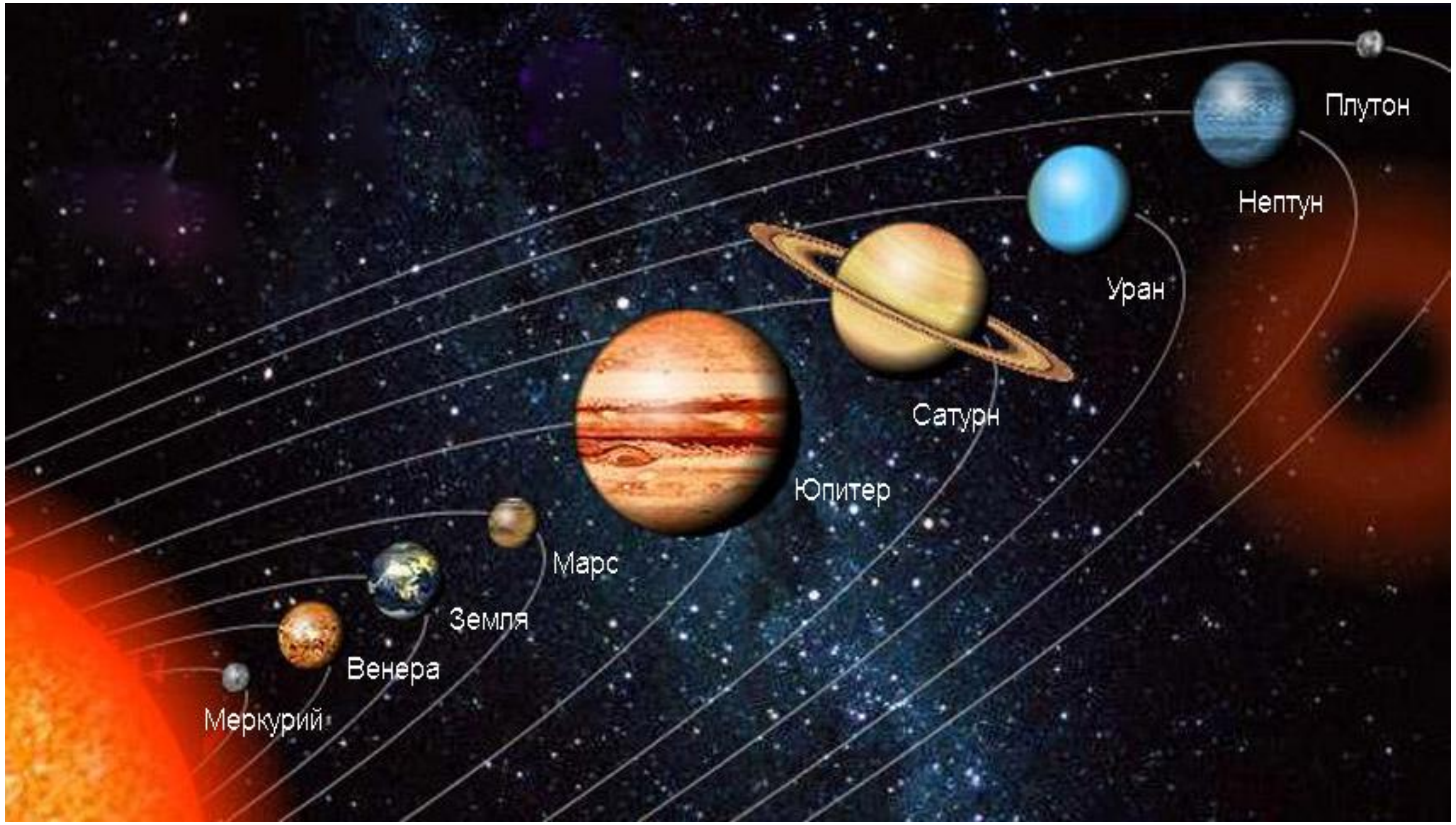


Рассмотрим далее случай, когда приемник движется, а источник волны неподвижен.
В этом случае длина волны не меняется и доплеровский сдвиг частоты возникает из-за того,
что изменяется скорость волны *w* относительно приемника:
$w = u + v$ (приемник движется по направлению к источнику)
$w = u - v$ (приемник движется по направлению от источника)
Так как $f_{доп}=w/\lambda$, а исходная частота источника $f=u/\lambda_0$ и $\lambda = \lambda_0$ мы получаем
$f_{доп}=f(1+v/u)$ (приемник движется по направлению к источнику)
$f_{доп}=f(1-v/u)$ (приемник движется по направлению от источника)

Эффект Доплера и принцип относительности

- Как мы можем видеть из этих рассуждений, сдвиг частоты будет разным в зависимости от того, что движется: приемник или источник. Особенно это заметно, если скорость источника или приемника близка к скорости волны. На первый взгляд может показаться что это противоречит принципу относительности: какая разница что движется - источник или приемник. На самом деле важно не относительное движение приемника и источника, а их движение относительно упругой среды, в которой распространяется волна. При этом скорость распространения волны не зависит от движения источника и приемника. В отличие от акустической волны для электромагнитной волны явления сдвига частоты протекают совершенно одинаково при движении источника и приемника.

Динамика



Динамика занимается изучением движения тел в связи с действующими на них силами.

Законы Динамики – редакция Ньютона

- **Закон 1.** Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.
- **Закон 2.** Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.
- **Закон 3.** Действие всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе – взаимодействия двух тел друг на друга равны и направлены в противоположные стороны.

Первый закон Ньютона – Закон инерции Галилея

Формулировка 1

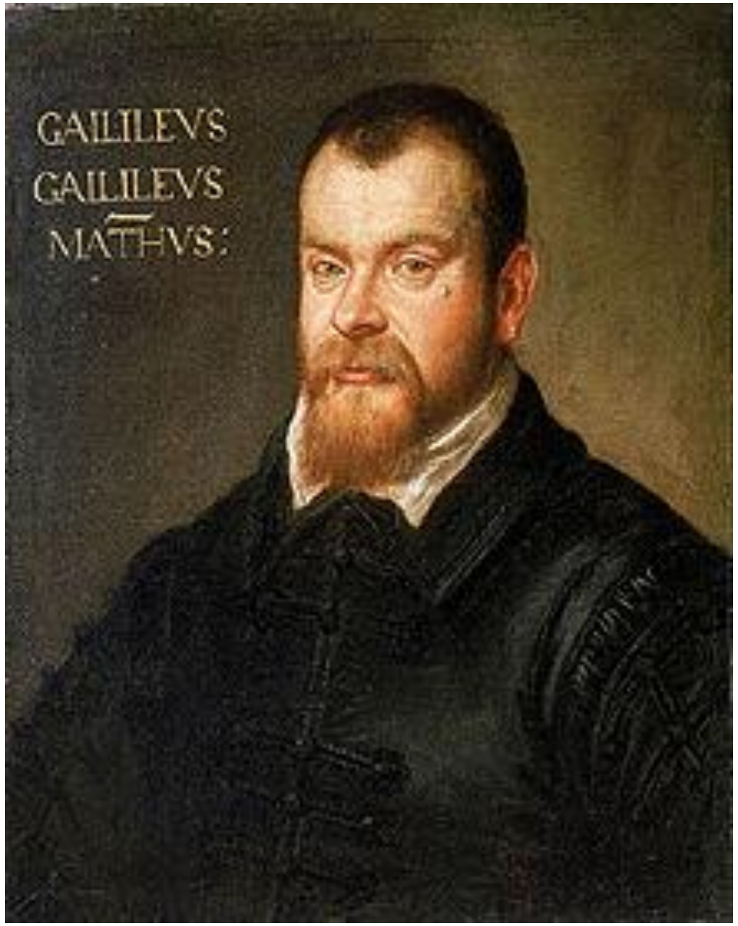
Свободное тело, не подверженное внешним воздействиям, либо находится в покое, либо движется равномерно и прямолинейно

Формулировка 2

Система отсчета, связанная со свободным телом называется инерциальной.

Инерциальные системы существуют

Галилео Галилей (1564 – 1642)



Галилео Галилей – Пизанский университет

Галилео Галилей-Пизанская башня

Галилей и инквизиция

- Утверждать, что Солнце стоит неподвижно в центре мира — мнение нелепое, ложное с философской точки зрения и формально еретическое, так как оно прямо противоречит Св. Писанию.

- Утверждать, что Земля не находится в центре мира, что она не остаётся неподвижной и обладает даже суточным вращением, есть мнение столь же нелепое, ложное с философской и греховное с религиозной точки зрения.

Принцип относительности Галилея

«Уединитесь с каким-нибудь приятелем в просторное помещение под палубой большого корабля и пустите туда мух, бабочек и других подобных мелких летающих насекомых. Пусть там находится также большой сосуд с водой и плавающими в нем рыбками. Подвесьте далее наверху ведерко, из которого капля за каплей вытекала бы вода в другой сосуд с узким горлышком, подставленный внизу. Пока корабль стоит неподвижно, наблюдайте старательно, как мелкие летающие живые существа с одной и той же скоростью летают во всех направлениях внутри помещения. Рыбки, как вы увидите, будут плавать безразлично во все стороны. Все падающие капли будут попадать в подставленный сосуд. Бросая приятелю какую-нибудь вещь, вам не придется применять бóльшую силу, чтобы бросить ее в одну сторону, чем в другую, если только вещь бросается на одни и те же расстояния. Прыгая двумя ногами, вы сделаете прыжок на одно и то же расстояние, независимо от его направления. Наблюдайте хорошенько за всем этим, хотя у нас не возникает никакого сомнения в том, что, пока корабль остается неподвижным, все должно происходить именно так. Заставьте теперь корабль привести в движение с какой угодно скоростью. Если движение будет равномерным и без качки в ту и другую сторону, то во всех указанных явлениях вы не обнаружите ни малейшего изменения и ни по одному из них не сможете установить, движется ли корабль, или стоит на месте».

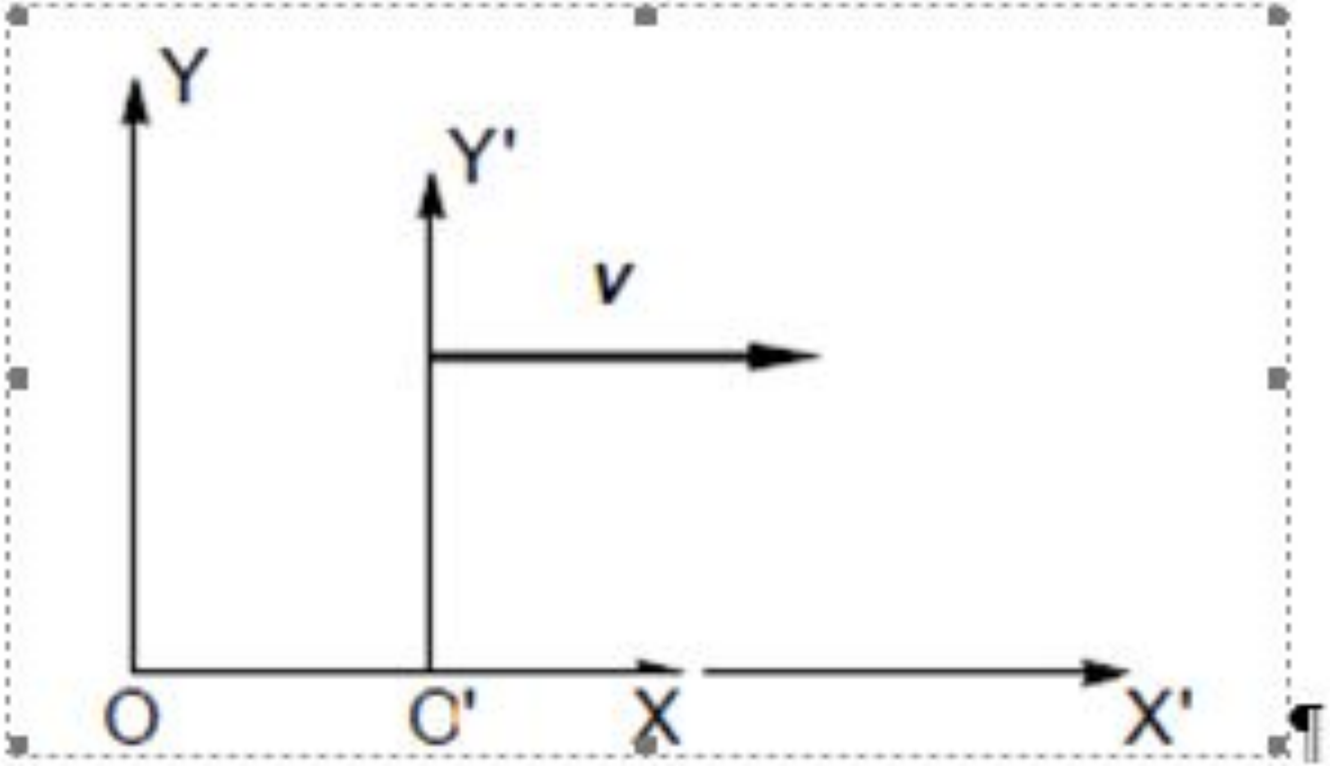
Принцип относительности Галилея

Инерциальные системы по своим механическим свойствам эквивалентны друг другу.

Никакими механическими опытами, проводимыми «внутри» данной инерциальной системы, нельзя установить, покоится эта система или движется.

Законы природы одинаковы во всех инерциальных системах.

Преобразования Галилея



$$x = x' + vt,$$
$$y = y',$$
$$z = z',$$
$$t = t'.$$

$$\vec{r} = r' + \vec{v}t.$$

Связь между системами *S* и *S’* найдем из геометрических соображений

Преобразования Галилея

Преобразование скорости

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}.$$

Преобразование ускорения

$$a = a'.$$

Длина вектора –
Инвариант преобразования
Галилея

$$l = \sqrt{(r_1 - r_2)^2} \qquad l' = \sqrt{\left(r_1' - r_2'\right)^2}.$$

$$l = l'$$

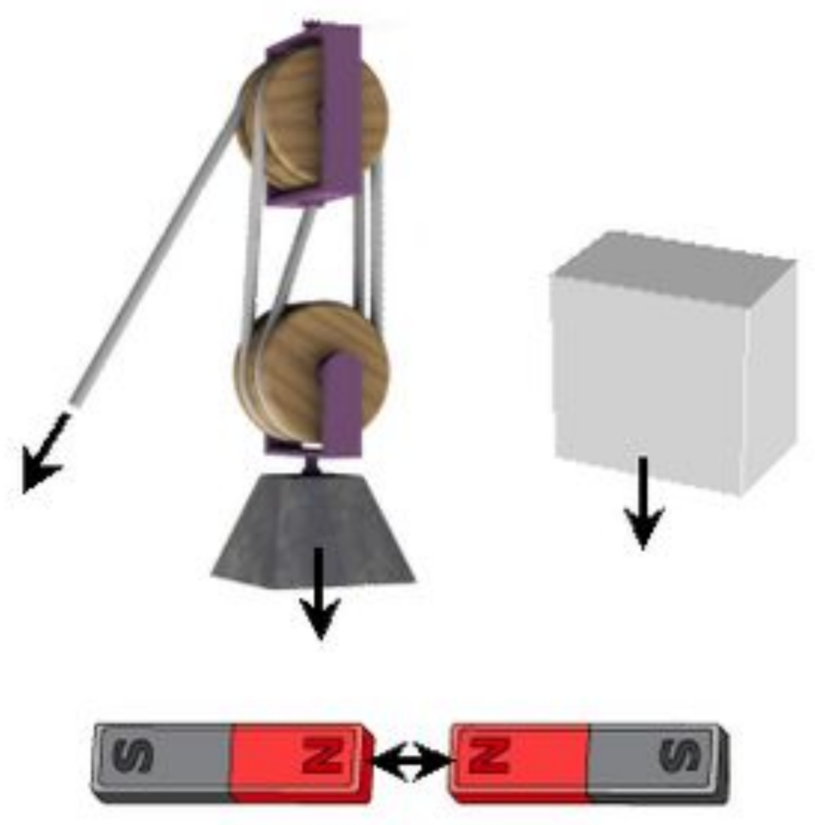
Второй закон Ньютона- Масса

- Всякое тело оказывает сопротивление при попытках привести его в движение или изменить величину или направление его скорости. Это свойство тел называется инертностью. У разных тел оно проявляется в разной степени. Сообщить одно и то же ускорение большому камню значительно труднее, чем маленькому мячику. Мера инертности тела называется массой. Единицей массы в системе Си является килограмм, платино-иродиевый эталон которого хранится в палате мер и весов.

Второй закон Ньютона- Сила

- Причиной изменения движения тела называется силой. Единицей ее измерения является в системе СИ один ньютон $\frac{\text{кг}\times\text{м}}{\text{сек}^2}$
- Содержанием второго закона Ньютона является связь между силой, массой и ускорением, а именно

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

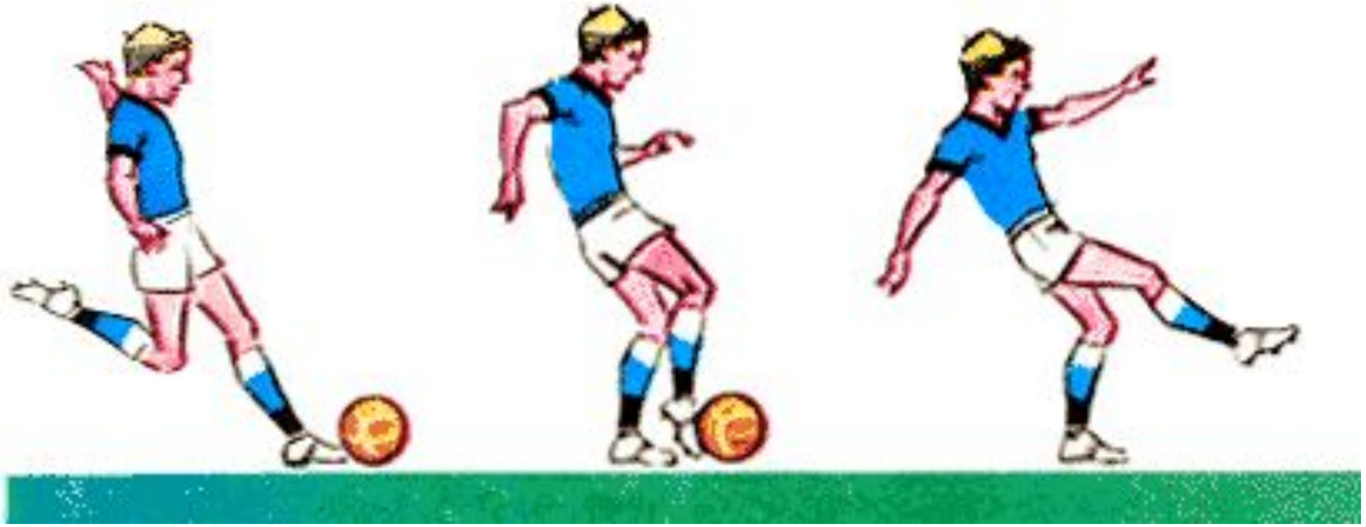


Второй закон Ньютона- **импульс**

- Если ввести вектор $\vec{p} = m\vec{v}$ называемый количеством движения или импульсом, второй закон Ньютона может быть записан в виде

$$\vec{F} = \frac{\overrightarrow{dp}}{dt}$$

Это выражение является математической формулировкой второго закона в редакции Ньютона.



Третий закон Ньютона

- Силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, всегда равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки

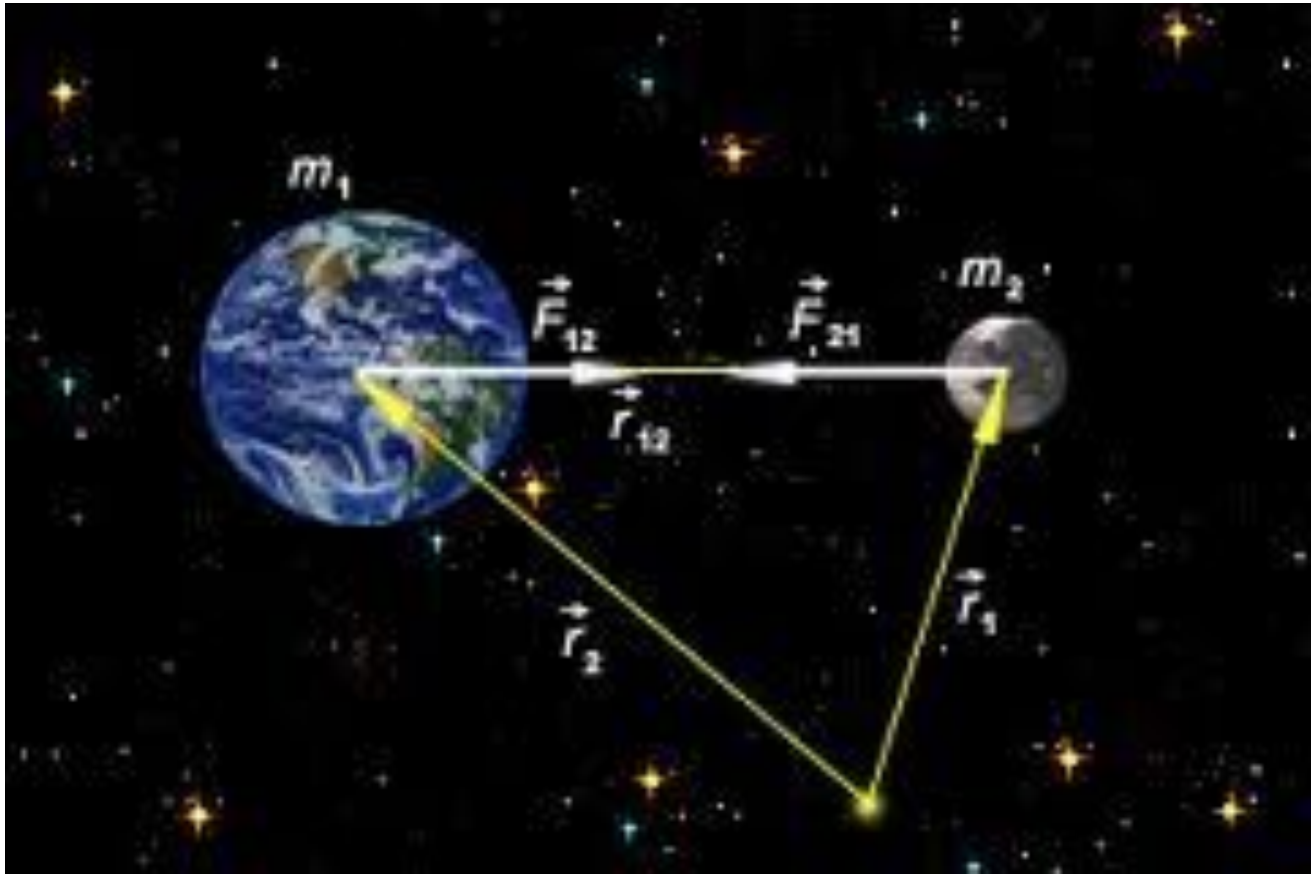
$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}$$

Силы - Виды взаимодействия

- *Сила гравитационного притяжения*, действующая между двумя материальными точками. В соответствии с законом всемирного тяготения, эта сила равна

$$\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G — гравитационная постоянная ($6{,}6742 \cdot 10^{-11}$ $м^3 с^{-2} кг^{-1}$)

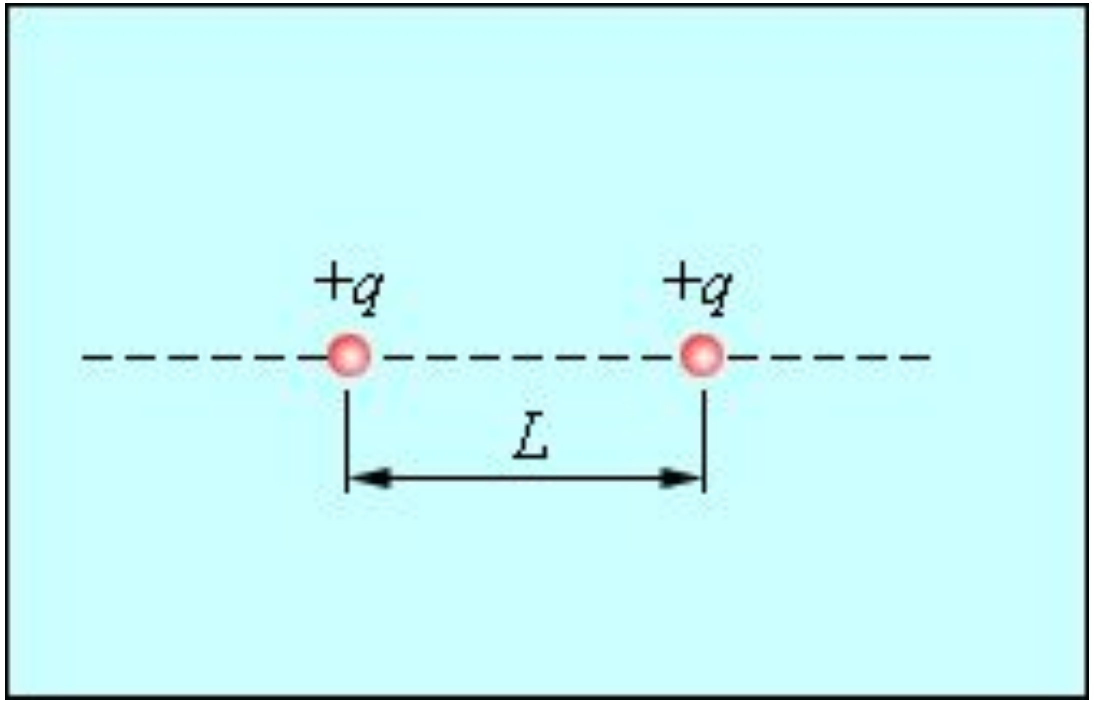


Кулоновская или электростатическая сила

- Эта сила действует между двумя покоящимися зарядами.

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

k – коэффициент, зависящий от системы единиц



Однородная сила тяжести

Физики и техники пользуются приближенными силами.

На практике именно такой подход позволяет сформулировать и решить задачу движения тел.

У поверхности земли сила притяжения равна

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

Упругая сила

- *Упругая сила* – сила, пропорциональная смещению материальной точки из положения равновесия и направленная к положению равновесия

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

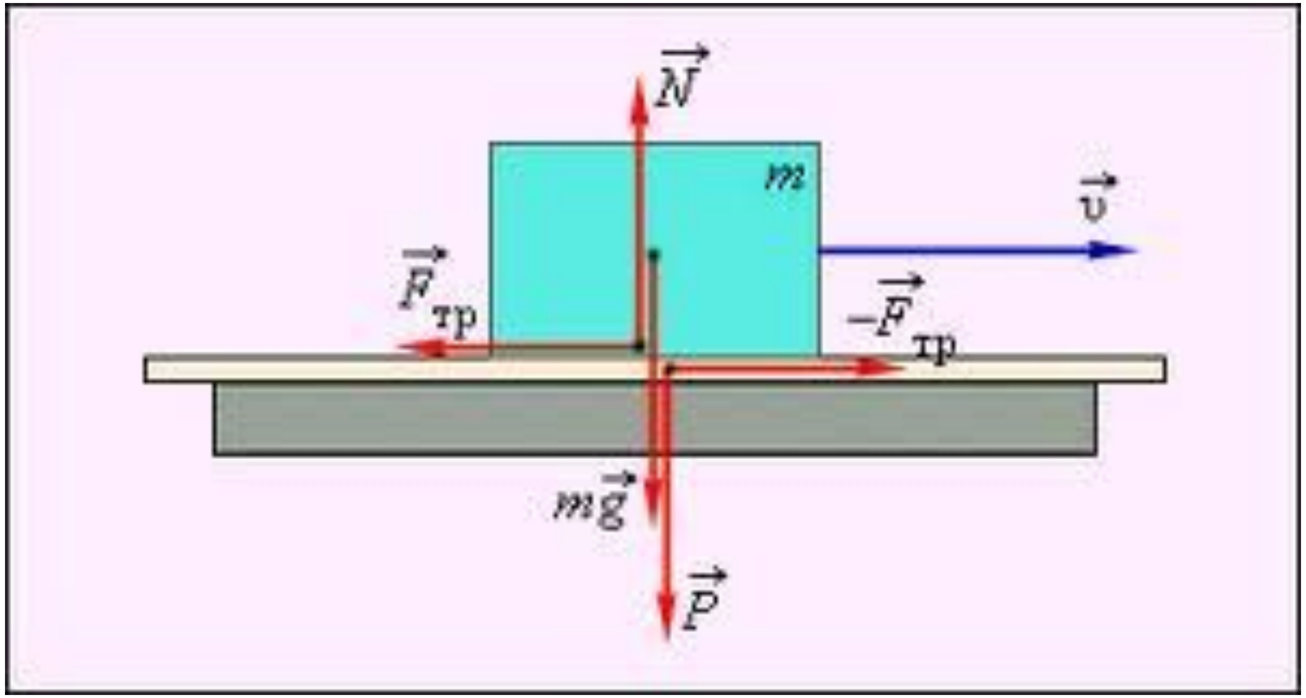
Сила трения скольжения

- *Сила трения скольжения*, возникает при скольжении данного тела по поверхности другого тела. Эта сила направлена в сторону, противоположную направлению движения данного тела относительно другого

$$\vec{F} = -k_{\text{тр}} R_n$$

Здесь $k_{\text{тр}}$- коэффициент трения скольжения, зависящий от природы и состояния соприкасающихся поверхностей,

R_n- сила нормального давления, прижимающая трущиеся поверхности друг к другу.

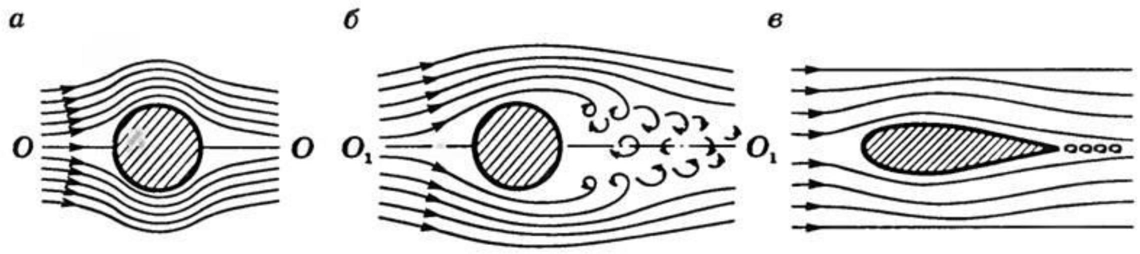


Сила сопротивления среды

- *Сила сопротивления среды*, действует на тело при его поступательном движении в газе или жидкости. Эта сила зависит от скорости тела и направлена в сторону, противоположную движению

$$\vec{F} = -k\vec{v},$$

где k – положительный коэффициент, характерный для данного тела и данной среды.



Основное уравнение динамики

Основное уравнение динамики представляет собой не что иное, как математическое выражение второго закона Ньютона:

- $$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Основное уравнение динамики- Декартовы координаты

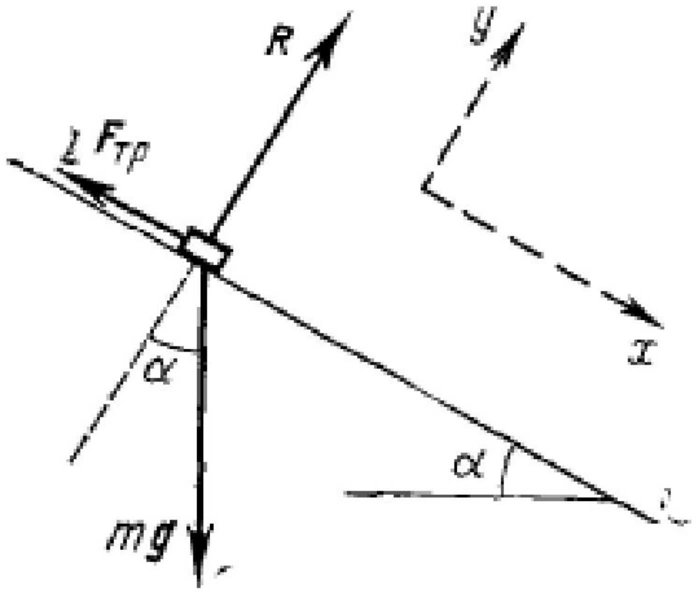
Записывая обе части уравнения в проекциях на оси *x,y,z* получим три дифференциальных уравнения.

$$F_x = m\frac{d\vec{v}_x}{dt},$$

$$F_y = m\frac{d\vec{v}_y}{dt},$$

$$F_z = m\frac{d\vec{v}_z}{dt}.$$

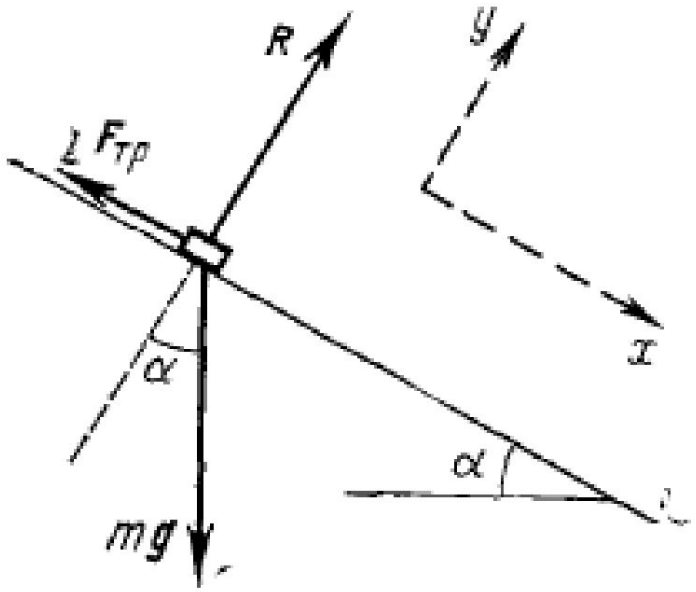
Декартовы координаты-пример



Движение тела по наклонной плоскости

- Небольшой брусок массы m скользит вниз по наклонной
- плоскости, составляющей угол a с горизонтом. Коэффициент трения
- равен *к*. Найдем ускорение бруска относительно плоскости (эта система отсчета предполагается инерциальной).

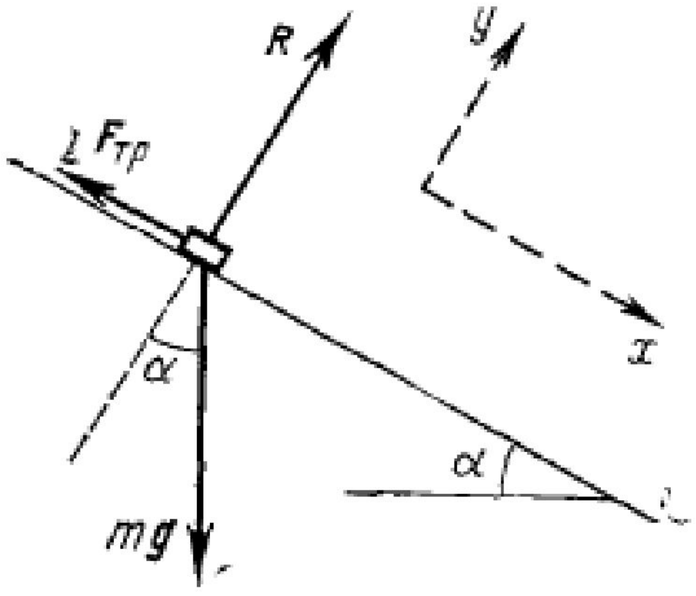
Декартовы координаты-пример



Движение тела по наклонной плоскости

- Силы, действующие на брусок.
- Сила тяжести mg,
- Нормальная сила реакции R со стороны плоскости
- Сила трения $F_{Тр}$, направленная в сторону, противоположную движению бруска.

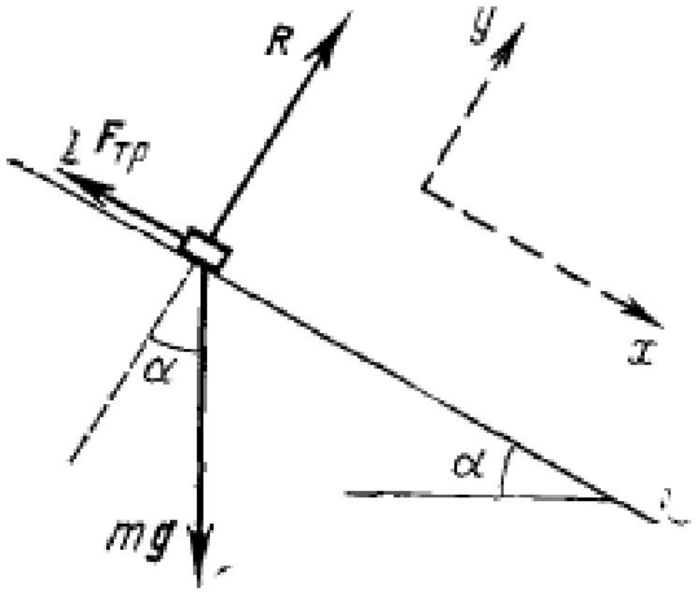
Декартовы координаты-пример



Движение тела по наклонной плоскости

- Свяжем с системой отсчета «наклонная плоскость» систему координат *x, y, z*.
- Целесообразно оси координат расположить так, чтобы одна из них совпадала с направлением движения.
- Выберем ось x, как показано на рисунке, обязательно указав при этом ее положительное направление (стрелкой).

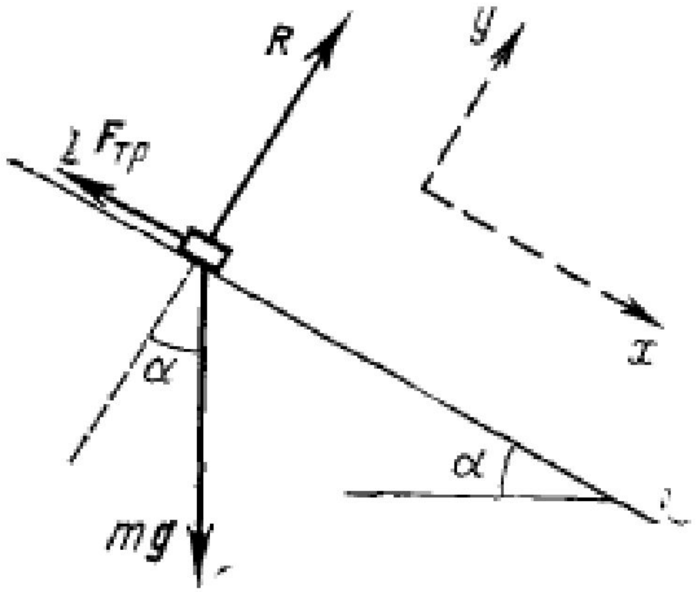
Декартовы координаты-пример



Движение тела по наклонной плоскости

- И только теперь приступим к составлению уравнений
- Слева — произведение массы от бруска на проекцию его ускорения a_x и справа — проекции всех сил на ось x.
- Тогда
  - $ma_x = mg_x + R_x + F_{\text{тр}x}$

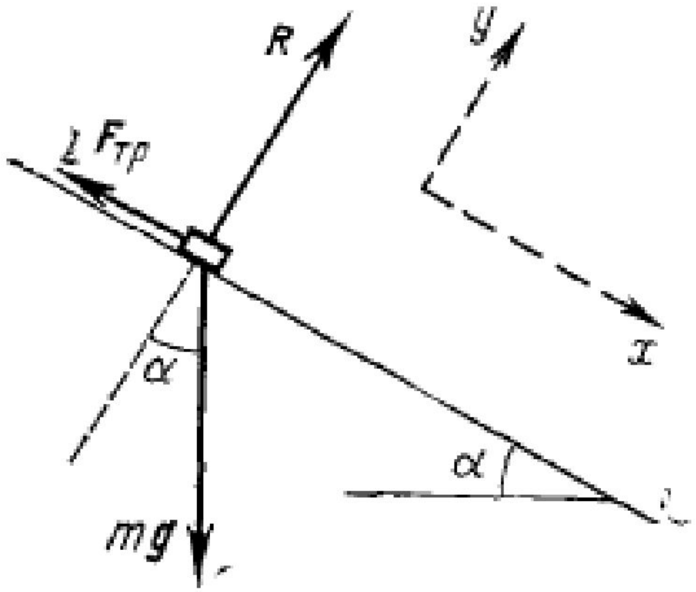
Декартовы координаты-пример



Движение тела по наклонной плоскости

- В данном случае
  - $g_x = g \sin\alpha$
  - $R_x = 0$
  - $F_{тр x} = -F_{тр}$,
- поэтому
  - $ma_x = g \sin\alpha - F_{тр}$.

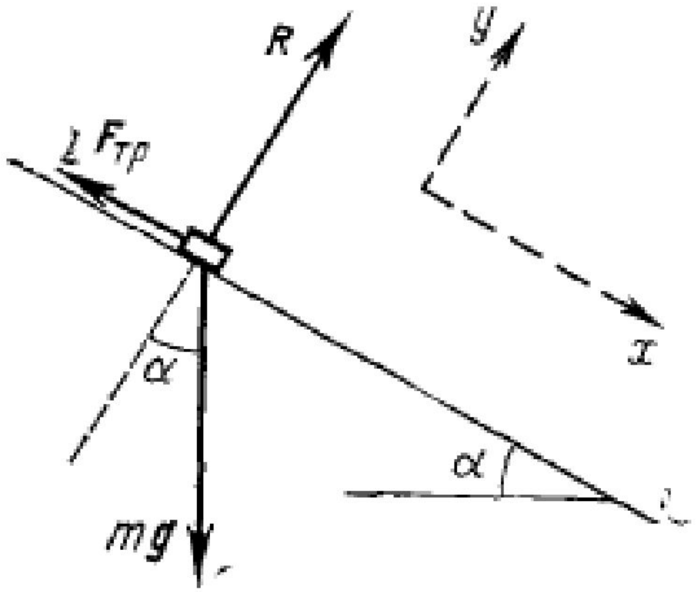
Декартовы координаты-пример



Движение тела по наклонной плоскости

- Так как брусок движется только вдоль оси x, то согласно второму закону Ньютона сумма проекций всех сил на любое перпендикулярное оси x направление равна нулю. Взяв в качестве такого направления ось *y*, получим
  - $R = g\cos\alpha, \quad F_{\text{тр}} = kR = kmg\cos\alpha$

Декартовы координаты-пример



Движение тела по наклонной плоскости

- В результате

- $ma_x = mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha$

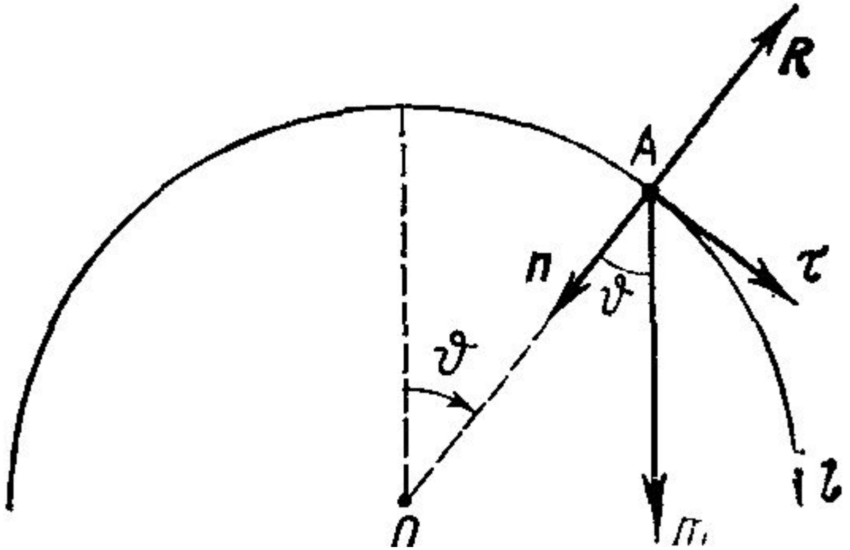
Основное уравнение динамики - В проекциях на касательную и нормаль к траектории

- Этот подход удобен, когда траектория известна заранее. Записывая обе части основного уравнения в проекциях на подвижные орты $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$, и используя полученные ранее выражения для нормального и тангенциального ускорений, получим:

$$F_\tau = m\frac{dv_\tau}{dt},$$

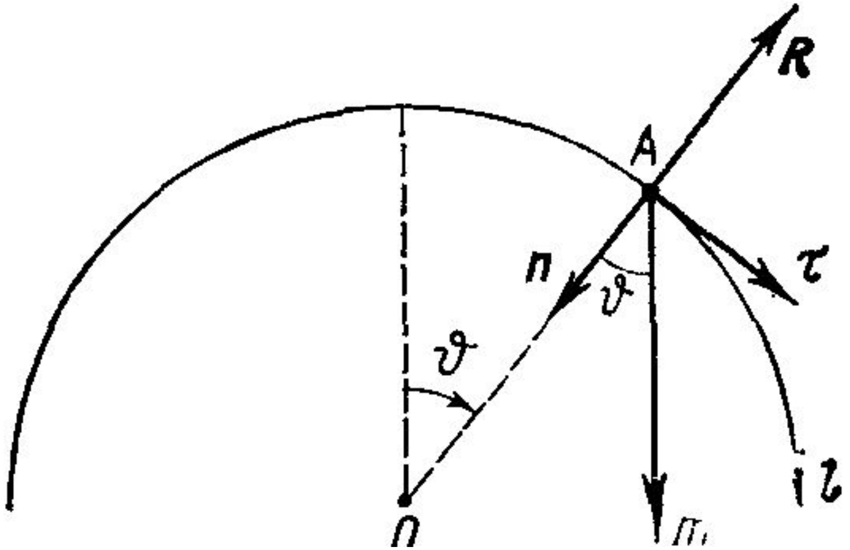
$$F_n = m\frac{v^2}{R}.$$

Основное уравнение динамики - В проекциях на касательную и нормаль к траектории - пример



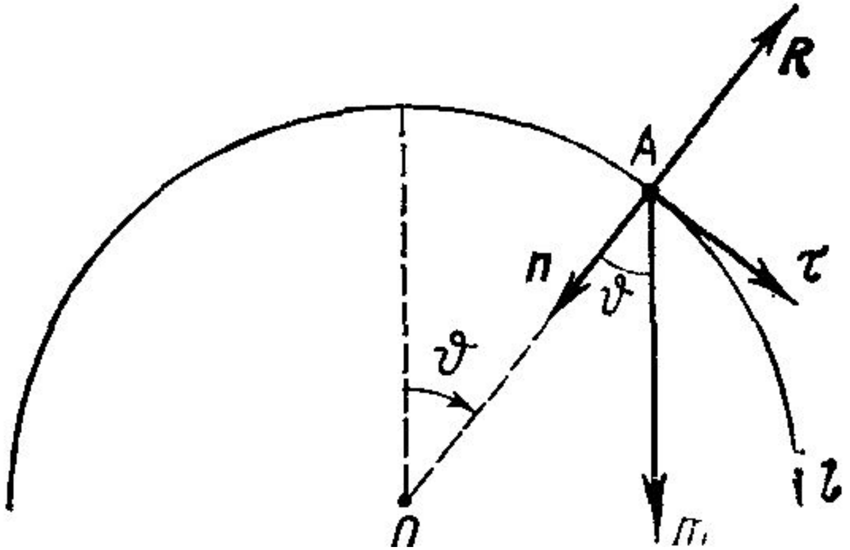
- Небольшое тело A соскальзывает с вершины гладкой сферы радиуса *r*.
- Найдем скорость тела в момент отрыва от поверхности сферы, если его начальная скорость пренебрежимо мала.

Основное уравнение динамики - В проекциях на касательную и нормаль к траектории - пример



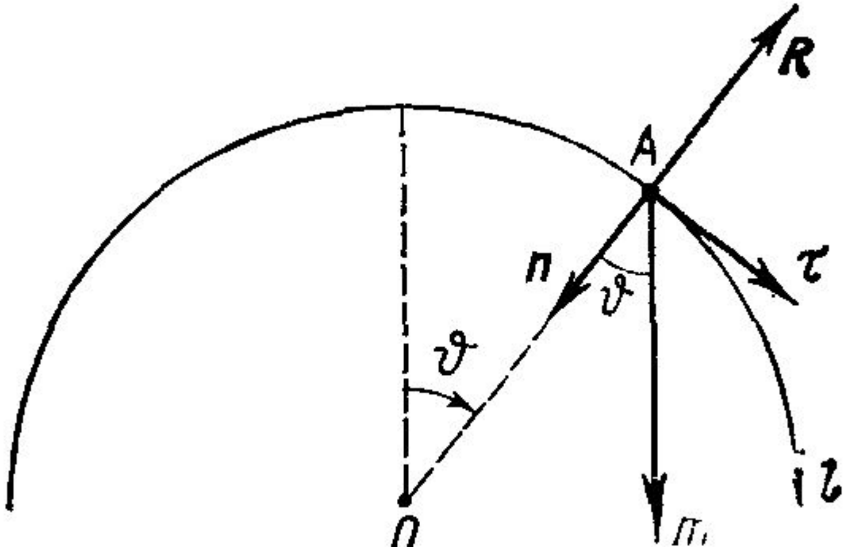
- Изобразим силы, действующие на тело *A* (это сила тяжести *mg* и нормальная сила реакции *R*), и запишем уравнения в проекциях на орты τ и *n*
  - $m\frac{dv}{dt} = mg\sin\theta$
  - $m\frac{v^2}{r} = mg\cos\theta - R$

Основное уравнение динамики - В проекциях на касательную и нормаль к траектории - пример



- Воспользовавшись тем, что
    - $dt = \frac{dl}{v} = \frac{rd\theta}{v}$
- где dl– элементарный путь тела А за промежуток времени dt, перепишем первое
- уравнение в виде
    - $vdv = gr\sin\theta d\theta$

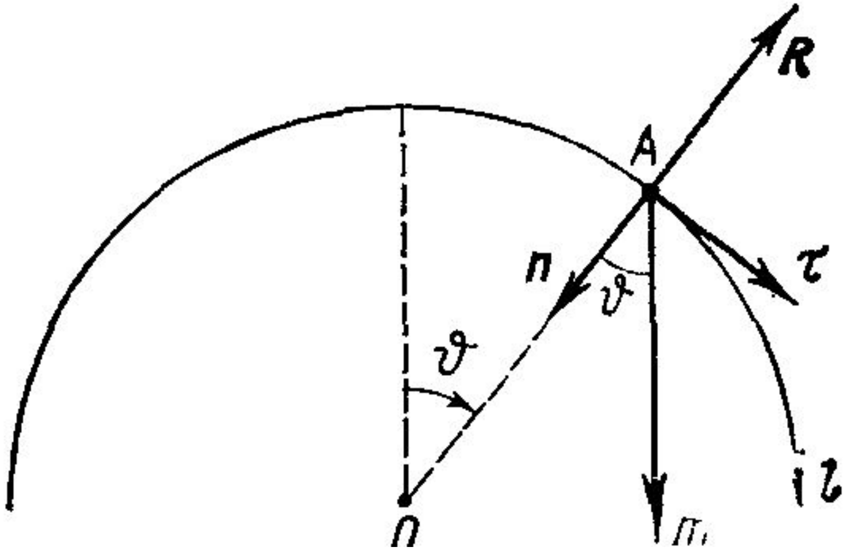
Основное уравнение динамики - В проекциях на касательную и нормаль к траектории - пример



- Проинтегрировав левую часть этого выражения от 0 до v, правую — от 0 до θ, найдем

- $v^2 = g(1 - \cos\theta)$

Основное уравнение динамики - В проекциях на касательную и нормаль к траектории - пример



- В момент отрыва R = 0, поэтому второе исходное уравнение принимает вид
  - $v^2 = gr\cos\theta$
- где v и θ соответствуют точке отрыва. Исключив $cos\,\theta$ из последних двух равенств, получим
  - $v = \sqrt{\frac{2}{3}gr}.$

Основное уравнение – численные методы решения

Рассмотрим еще один пример – движение осциллятора (тела на пружинке) с учетом сопротивления среды. Ставится задача определения $x(t)$ – координаты тела как функции времени. Начало отсчета координаты удобно выбрать в положении равновесия. В случае одномерного движения первая производная – скорость: $dx/dt = v$, вторая производная – ускорение $dx/dt = dv/dt = a$

Математическая модель процесса основана на уравнении 2-го закона Ньютона.

$$M\, dv/dt = F$$

В правой части уравнения F – результирующая сил, действующих в горизонтальном направлении.

В нашем случае мы используем закон Гука для силы упругости $F_{упр}$ и закон, описывающий силу сопротивление среды в виде $F_{тр}$

$$F_{упр}=-kx;$$

$$F_{тр}=-k_{тр}v$$

Основное уравнение – численные методы решения

Здесь k – коэффициент упругости пружины, x – отклонение от положения равновесия, $k_{тр}$ – коэффициент сопротивления среды, v – скорость тела. Сумма сил, действующих на тело F , в этом случае равна

$$F = F_{упр} + F_{тр} = -kx - k_{тр}\mathrm{v}$$

В соответствии со вторым законом Ньютона, выражение для ускорения тела a будет выглядеть следующим образом:

$$a = F/m = \frac{-k*x - k_{тр}*v}{m}$$

где m – масса тела. Или на языке дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-k*x - k_{тр}*v}{m}$$

Основное уравнение – численные методы решения

Нашей дальнейшей задачей является решение этого уравнения, или, как говорят физики, – интегрирование уравнения движения, то есть восстановление самой функции *x(t)* по её производным *dx/dt* и *dx/dt*. Решим это уравнение с помощью вычислительного алгоритма предложенного Леонардом Эйлером. Наше изложение этого метода, разумеется, не является вполне строгим, но мы постараемся сделать его доступным студенту первого курса.

Первым делом мы должны задать начальные условия нашего процесса. А именно: значения скорости и координаты x в начальный момент времени $t = 0$.

Сила упругости является функцией координаты, а, следовательно, и ускорение также зависит от координаты. Такое движение нельзя считать равноускоренным. Но если мы возьмем достаточно малый промежуток времени *dt*, то за этот промежуток времени координата изменится мало, и, в пределах этого временного интервала мы можем считать движение равноускоренным. Тогда скорость в момент времени *t* и скорость в момент времени *t+dt* будут связаны соотношением

$$v(t+dt)=v(t)+a(t)*dt$$

Основное уравнение – численные методы решения

В свою очередь координата x в момент времени $t+dt$ может быть найдена следующим образом

$$x(t+dt)=x(t)+v(t+dt)+a*\frac{dt^2}{2}$$

Однако, если dt достаточно мало, то членом, пропорциональным dt^2 можно пренебречь. В результате получаем

$$x(t+dt)=x(t)+v(t+dt)$$

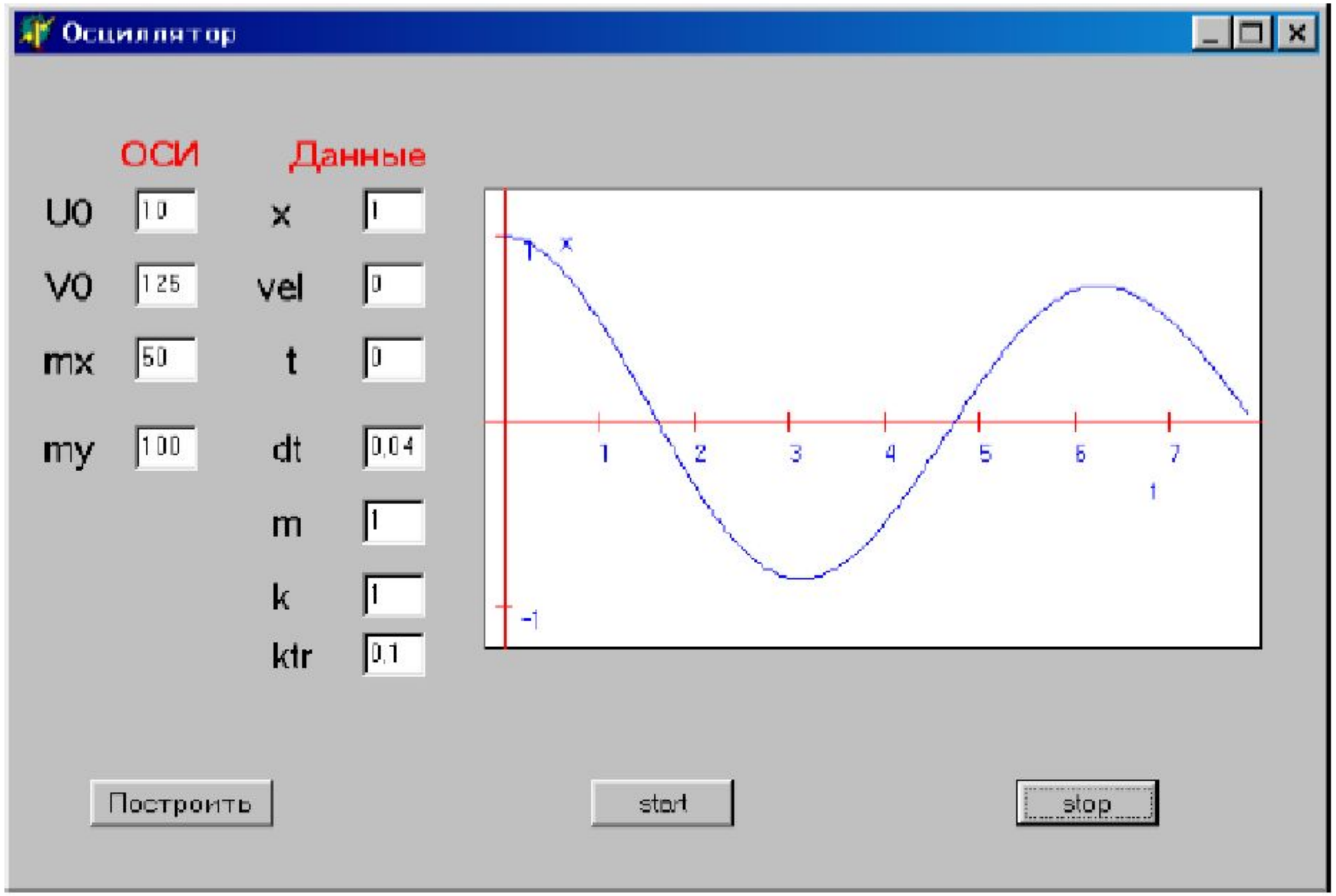
Знная координату и скорость, мы можем найти ускорение в момент t+dt.

$$a(t+dt)=\frac{-k*x-k_{тр}*v}{m}$$

Основное уравнение – численные методы решения

Таким образом, если мы циклически будем повторять вычисления по этим формулам то мы получим искомую зависимость $x(t)$. Она приведена на рис. 2.4.

Рис. 2.4. Зависимость координаты осциллятора от времени



Задача1

75. На однородный стержень длины L действуют две силы F_1 и F_2, приложенные к его концам и направленные в противоположные стороны (рис. 25). С какой силой F

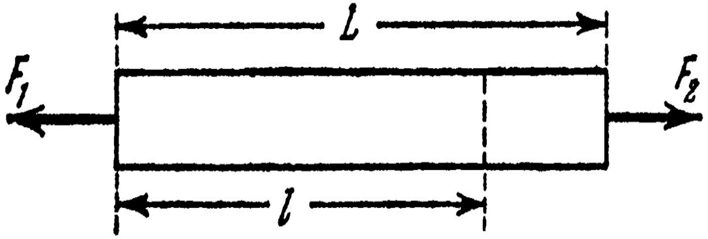


Рис. 25.

растянут стержень в сечении, находящемся на расстоянии l от одного из его концов?

75. Масса левой части стержня $m_1 = \frac{M}{L} l$, а правой $m_2 = \frac{M}{L}(L-l)$, где M — масса всего стержня. Под действием приложенных к ним сил каждая часть стержня движется с одним и тем же ускорением a. Поэтому

$$F_1 - F = m_1 a,$$

$$F - F_2 = m_2 a.$$

Отсюда растягивающая сила

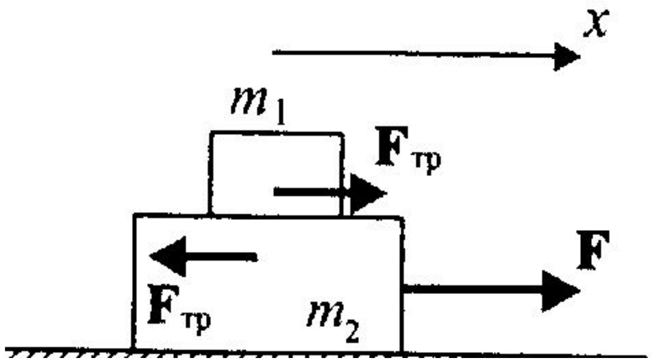
$$F = \frac{F_1 m_2 + F_2 m_1}{m_1 + m_2} = F_1 \frac{L-l}{L} + F_2 \frac{l}{L}.$$

Задача 1.1

78. Однородный брусок висит на нити. Нить разрезают. У каких частиц бруска будет большее ускорение в начальный момент времени: у верхних или у нижних?

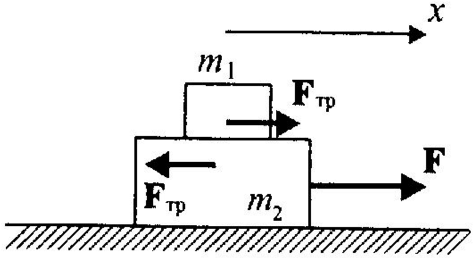
Задача2

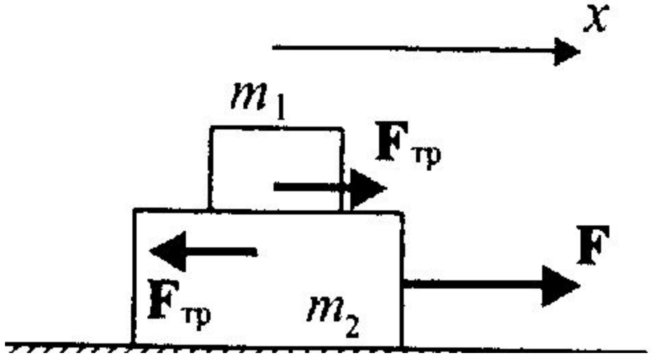
1.61 На гладкой горизонтальной поверхности находится доска массой m_2, на которой лежит брусок массой m_1. Коэффициент трения бруска о поверхность доски равен f. К доске приложена горизонтальная сила F, зависящая от времени по закону $F = At$, где A — некоторая постоянная. Определите: 1) момент времени t_0, когда доска начнет выскальзывать из-под бруска; 2) ускорения бруска a_1 и доски a_2 в процессе движения.



Задача2

Дано	*Решение*
m_1 m_2 f $F = At$ $A = \text{const}$	$m_1 a_1 = F_{тр}$, $m_2 a_2 = F - F_{тр}$, $F_{тр\,max} = f\,m_1 g$,
1) t_0 — ? 2) a_1 — ? a_2 — ?	$\boxed{a_2 \geqslant a_1}$ $\quad a_2 = \dfrac{At - F_{тр\,max}}{m_2}$, $a_1 = fg$, $\quad \dfrac{At - f\,m_1 g}{m_2} \geqslant fg$.



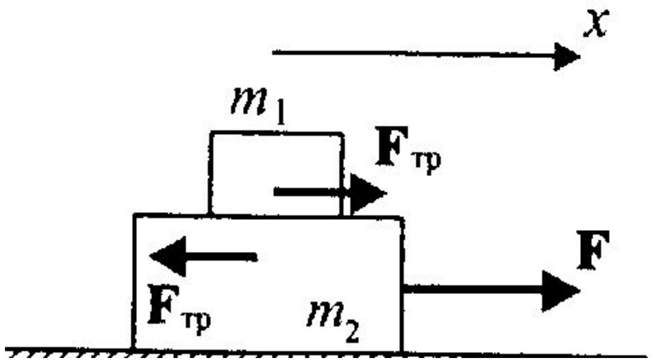


Задача2

$\boxed{t = t_0}$ $\quad \dfrac{At_0 - f m_1 g}{m_2} = fg\,, \qquad t_0 = \dfrac{(m_1 + m_2) fg}{A}\,;$

$\boxed{t \leqslant t_0}$ $\quad a_1 = a_2 = \dfrac{At}{m_1 + m_2}\,;$

$\boxed{t \geqslant t_0}$ $\quad a_1 = fg = \mathrm{const}\,, \qquad a_2 = \dfrac{At - f m_1 g}{m_2}\,.$

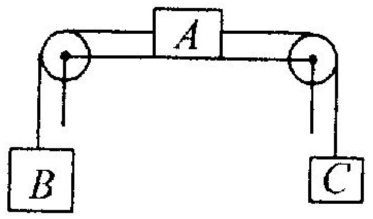
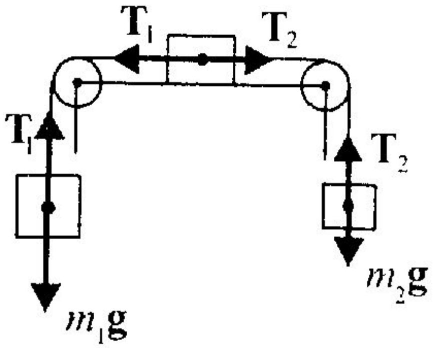


Ответ 1) $t_0 = \dfrac{(m_1 + m_2) fg}{A}\,;$

2) при $t \geqslant t_0$ $\; a_1 = fg = \mathrm{const}\,;\; a_2 = \dfrac{At - f m_1 g}{m_2}\,.$

Задача 3

1.50 Тело A массой $M = 2$ кг находится на горизонтальном столе и соединено нитями посредством блоков с телами B ($m_1 = 0,5$ кг) и C ($m_2 = 0,3$ кг). Считая нити и блоки невесомыми и пренебрегая силами трения, определить: 1) ускорение, с которым будут двигаться эти тела; 2) разность сил натяжения нитей.

Дано	***Решение***
$M = 2$ кг $m_1 = 0,5$ кг $m_2 = 0,3$ кг	 
1) a — ? 2) $(T_1 - T_2)$ — ?	

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{M + m_1 + m_2}, \quad m_1 a = m_1 g - T_1, \quad T_1 = m_1(g - a),$$

$$m_2 a = T_2 - m_2 g, \quad T_2 = m_2(a + g), \quad T_1 - T_2 = m_1(g - a) - m_2(g + a)$$

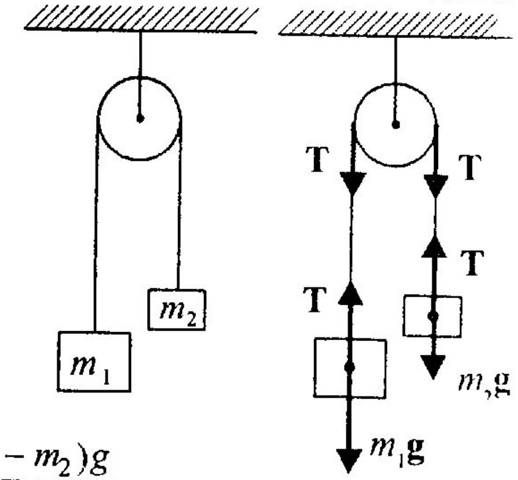
Ответ 1) $a = 0,7$ м/с^2; 2) $T_1 - T_2 = 1,4$ Н

Задача 4

1.47 Простейшая машина Атвуда, применяемая для изучения законов равноускоренного движения, представляет собой два груза с неравными массами m_1 и m_2 (например $m_1 > m_2$), которые подвешены на легкой нити, перекинутой через неподвижный блок Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая трением в оси блока, определите 1) ускорение грузов 2) силу натяжения нити T, 3) силу F, действующую на ось блока.

Задача 4

Дано	Решение
m_1	$T_1 = T_2 = T$,
m_2	
$m_1 > m_2$	$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T, \\ m_2 a = T - m_2 g \end{cases}$.
1) a — ?	
2) T — ?	
3) F — ?	$T = m_1 g - m_1 a$,



$$m_1 a + m_2 a = m_1 g - m_1 a - m_2 g, \qquad a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2},$$

$$T = m_1 g - m_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}, \qquad F = 2T.$$

Ответ 1) $a = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$; 2) $T = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$; 3) $F = \dfrac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$

До следующей лекции