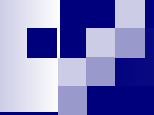
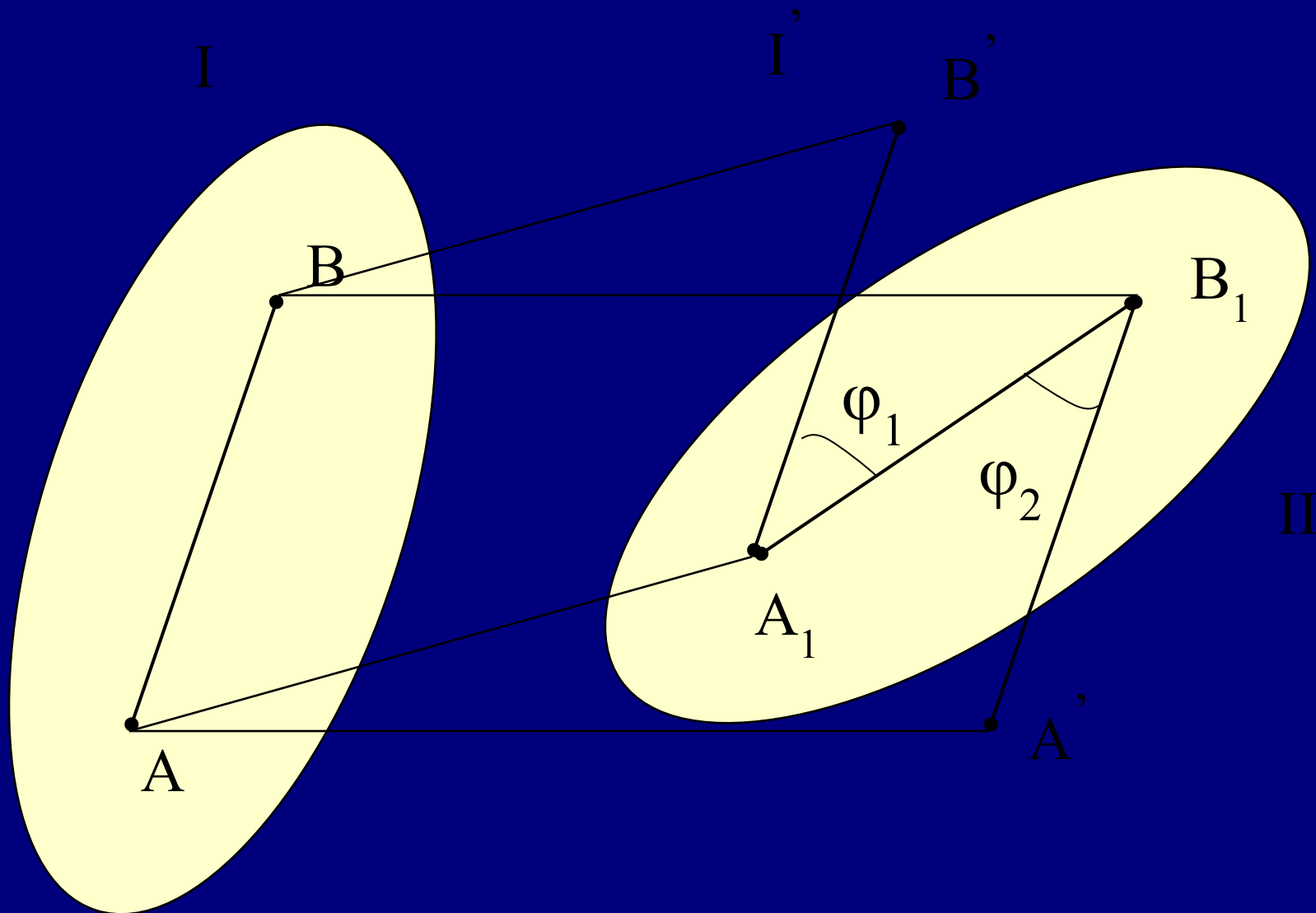





# Плоское движение твёрдого тела

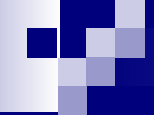


движением твердого тела называется  
такое движение, при котором каждая  
точка тела движется в плоскости,  
параллельной некоторой неподвижной  
плоскости.

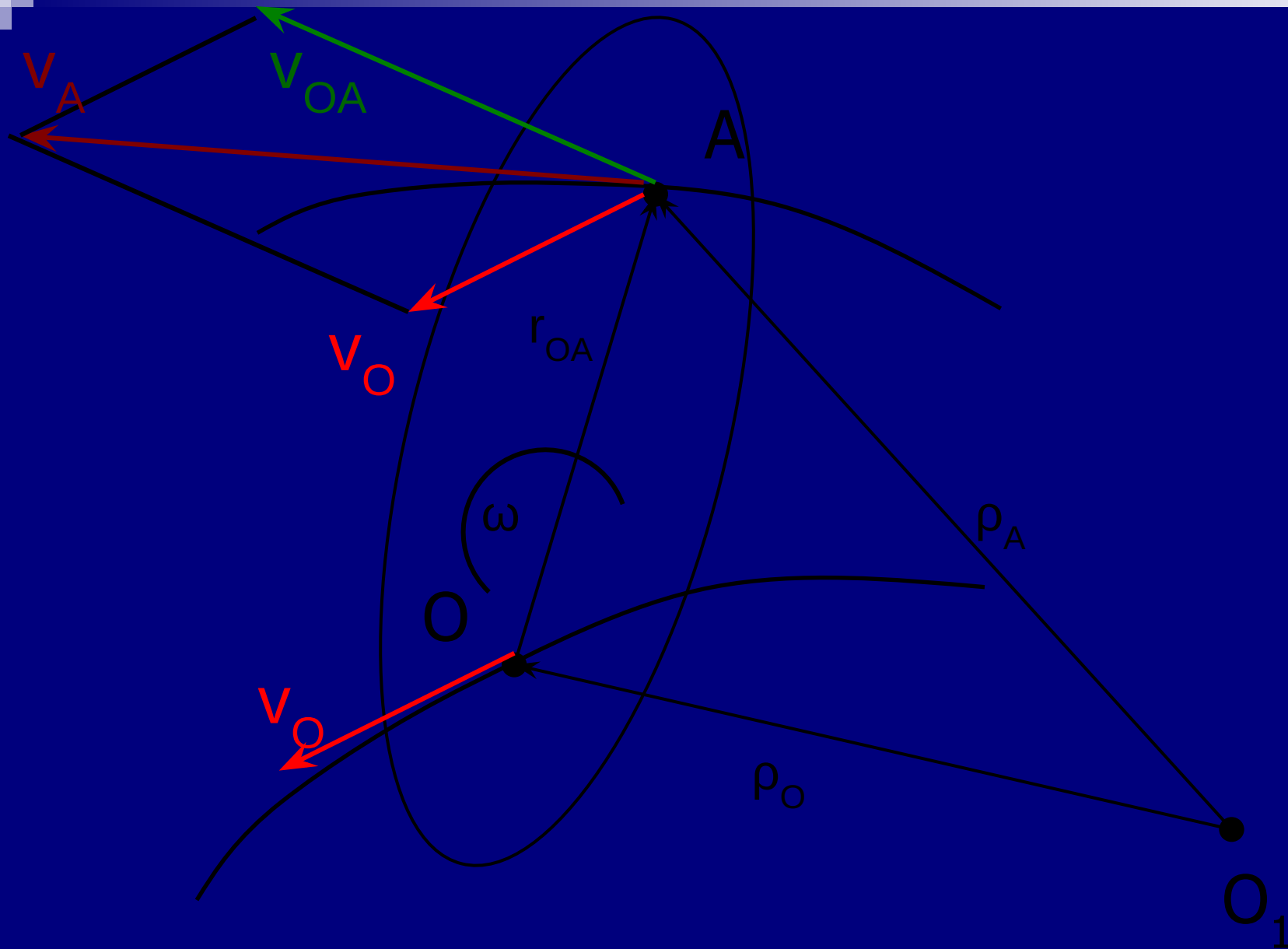




Всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в ее плоскости можно рассматривать как совокупность двух перемещений: поступательного перемещения плоской фигуры вместе с произвольной точкой, называемой  $O$ , и поворотом вокруг полюса.



Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки в ее вращении вместе с плоской фигурой вокруг полюса.



$$\overset{\square}{\rho}_A = \overset{\square}{\rho}_O + \overset{\square}{r}_{OA}$$

$$\overset{\square}{r}_{OA} = \text{const}$$

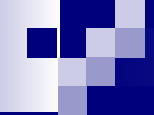
Определим скорость точки А:

$$\overset{\square}{v} = \frac{d\overset{\square}{\rho}_A}{dt} = \frac{d\overset{\square}{\rho}_O}{dt} + \frac{d\overset{\square}{r}_{OA}}{dt},$$

где  $\frac{d\overset{\square}{\rho}_O}{dt} = \overset{\square}{v}_O$  – скорость полюса  $O$

$\frac{d\overset{\square}{r}_{OA}}{dt} = \overset{\square}{v}_{OA}$  – вращательная скорость

точки вокруг полюса  $O$


$$\vec{v}_{OA} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OA}$$

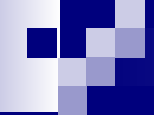
Вращательная скорость направлена перпендикулярно отрезку  $OA$ , в сторону вращения фигуры, и имеет модуль:

$$v_{OA} = OA \cdot \omega$$


Т.о., получаем

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{OA} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OA} \quad (1)$$



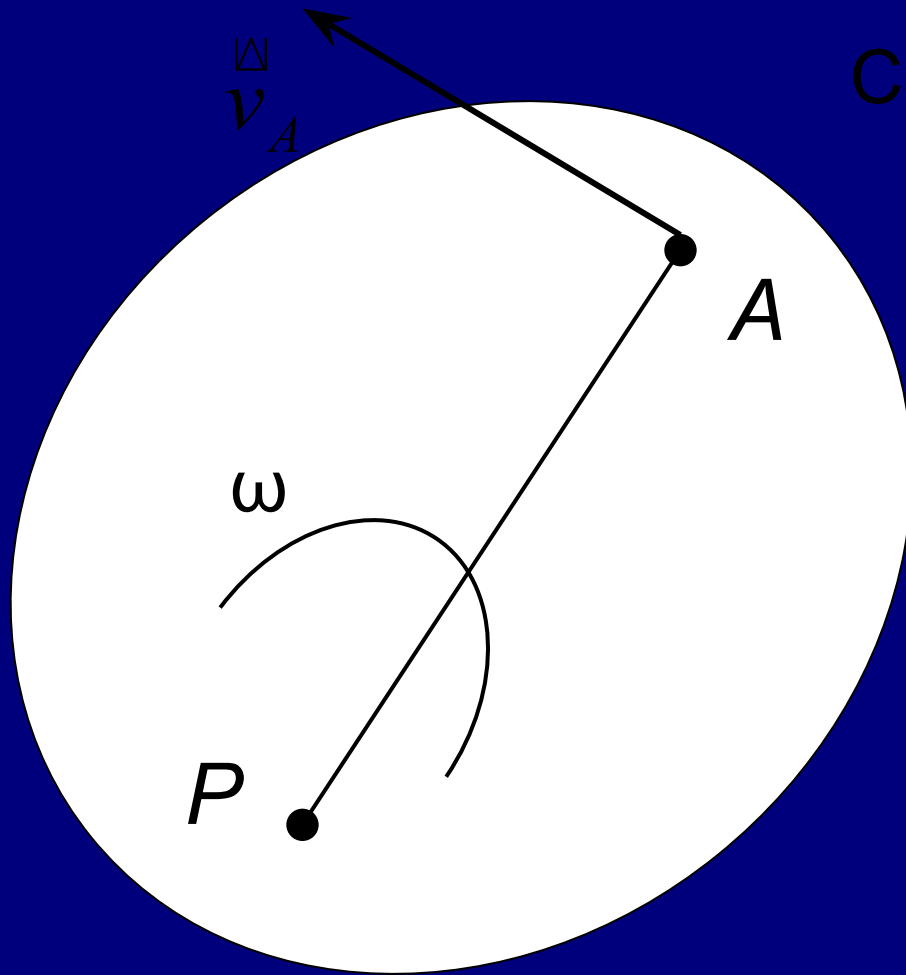


В каждый момент времени существует точка, неизменно связанная с плоской фигурой, скорость которой в данный момент времени равна нулю. *Эту точку называют*



МЦС плоской фигуры находится на перпендикуляре к направлению скорости.

Примем МЦС за полюс и определим скорость точки А.



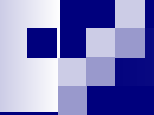
Согласно формулы (1):

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{PA}$$

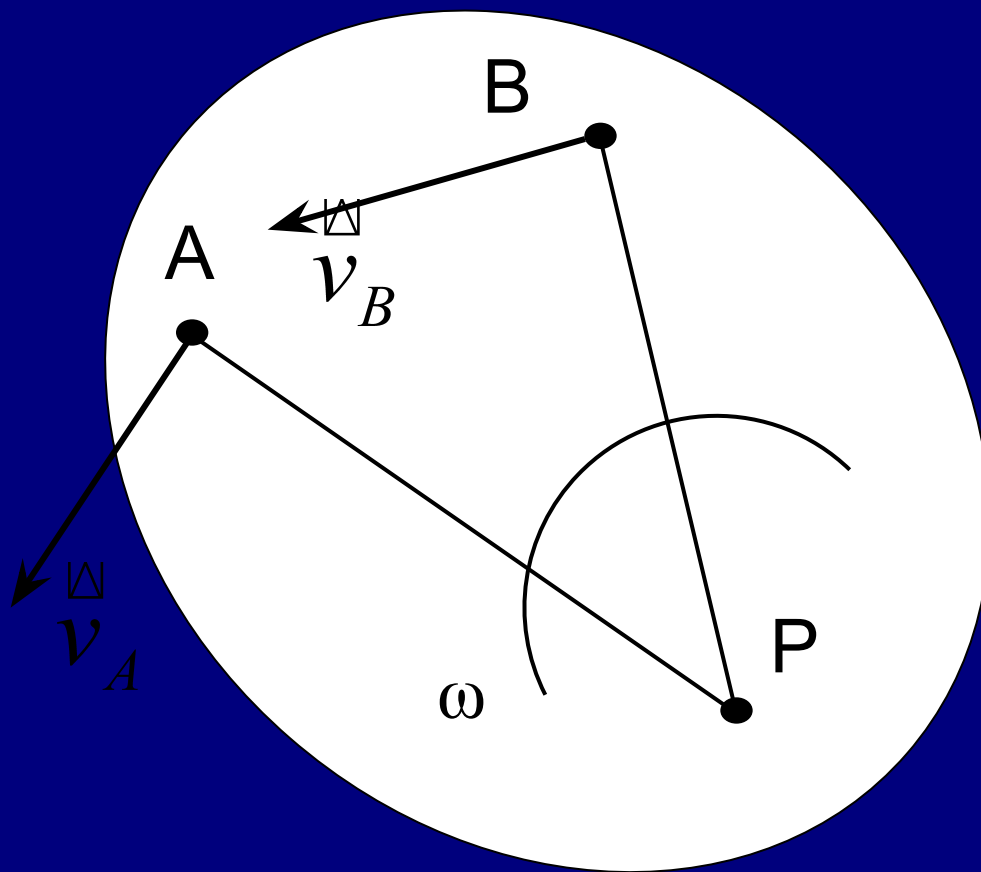
Так как  $\vec{v}_P = \mathbf{0}$

Получаем:

$$v_A = PA \cdot \omega, \quad \vec{v}_A \perp PA$$



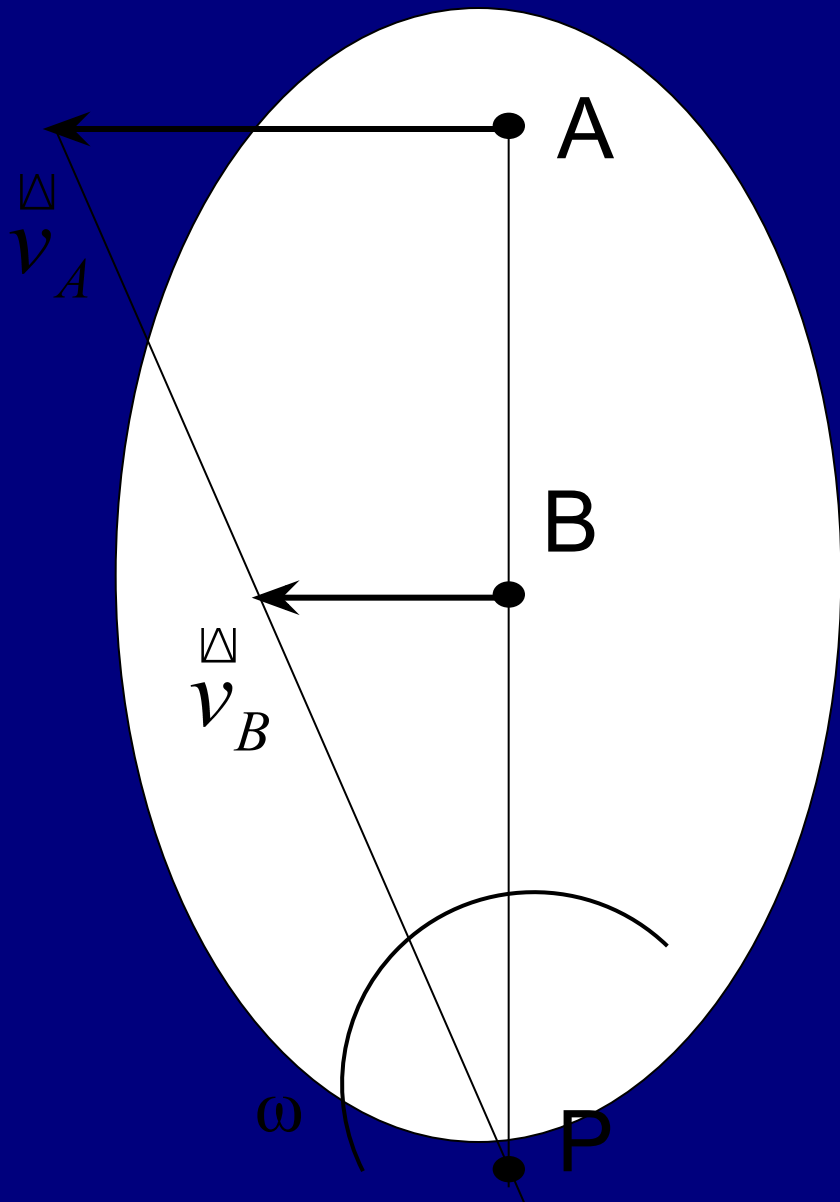
Скорость любой точки плоской фигуры в каждый момент времени имеет модуль, равный произведению угловой скорости фигуры на длину отрезка, соединяющего точку с МЦС, и направлена перпендикулярно этому отрезку в сторону вращения фигуры.



МЦС фигуры определяется как точка пересечения перпендикуляров к этим прямым, восстановленных в точках А и В.

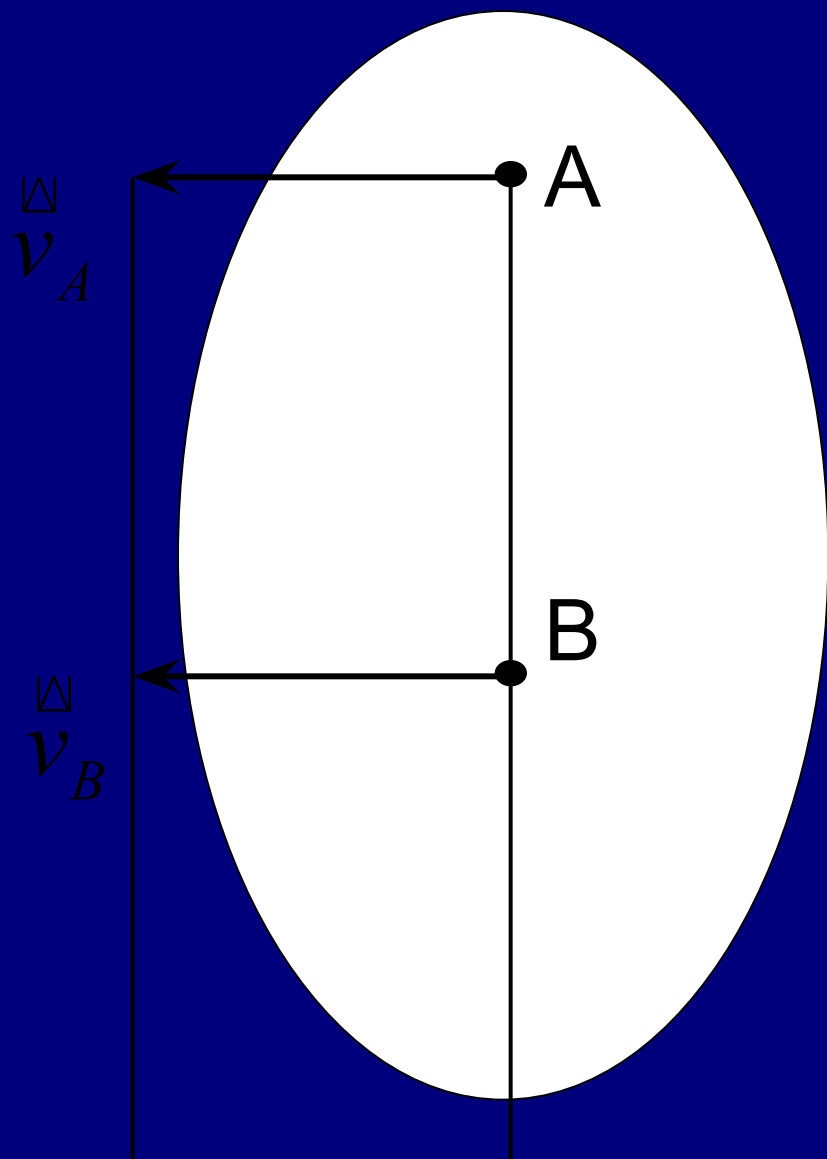
$$\omega = v_A / PA$$

$$v_B = PB \cdot \omega$$



Если скорости точек  $A$  и  $B$  плоской фигуры параллельны между собой и перпендикулярны  $AB$ , то для определения положения МЦС должны быть известны модули скоростей обеих точек  $A$  и  $B$ .

$$v_B / v_A = PB / PA$$

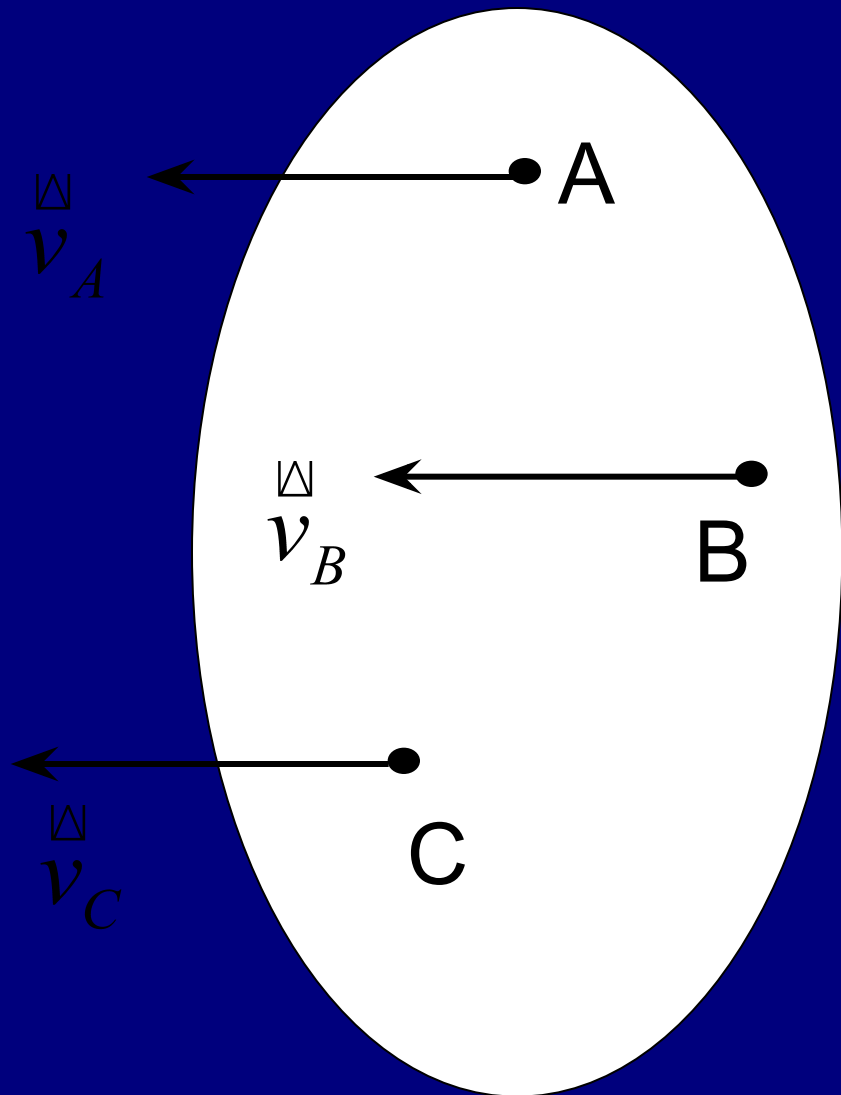


Если скорости точек А и В плоской фигуры равны, параллельны между собой и перпендикулярны АВ, то МЦС находится в бесконечности

$$(AP = \infty),$$

а угловая скорость фигуры

$$\omega = v_A / AP = v_A / \infty = 0$$



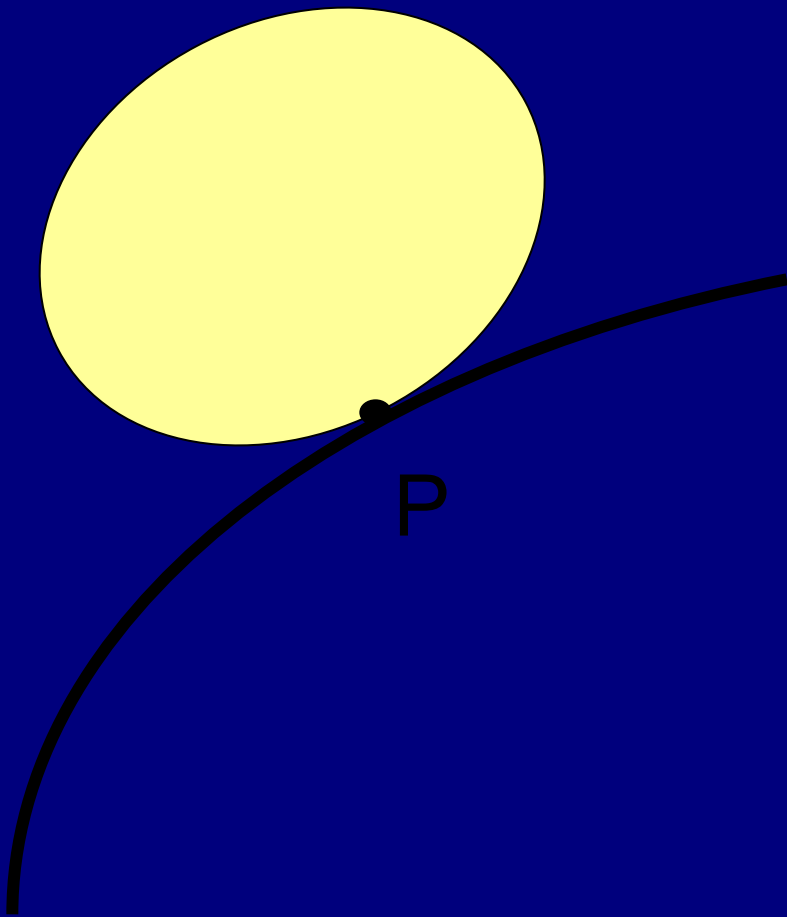
Если известно, что скорости двух точек А и В плоской фигуры параллельны и не перпендикулярны АВ, то МЦС находится в бесконечности. Очевидно, что и в этом случае

$$\omega = v_A / AP = v_A / \infty = 0$$

$$AP = BP = \dots = \infty$$


$$\overset{\sqcap}{v}_A = \overset{\sqcap}{v}_B = \overset{\sqcap}{v}_C = \dots$$





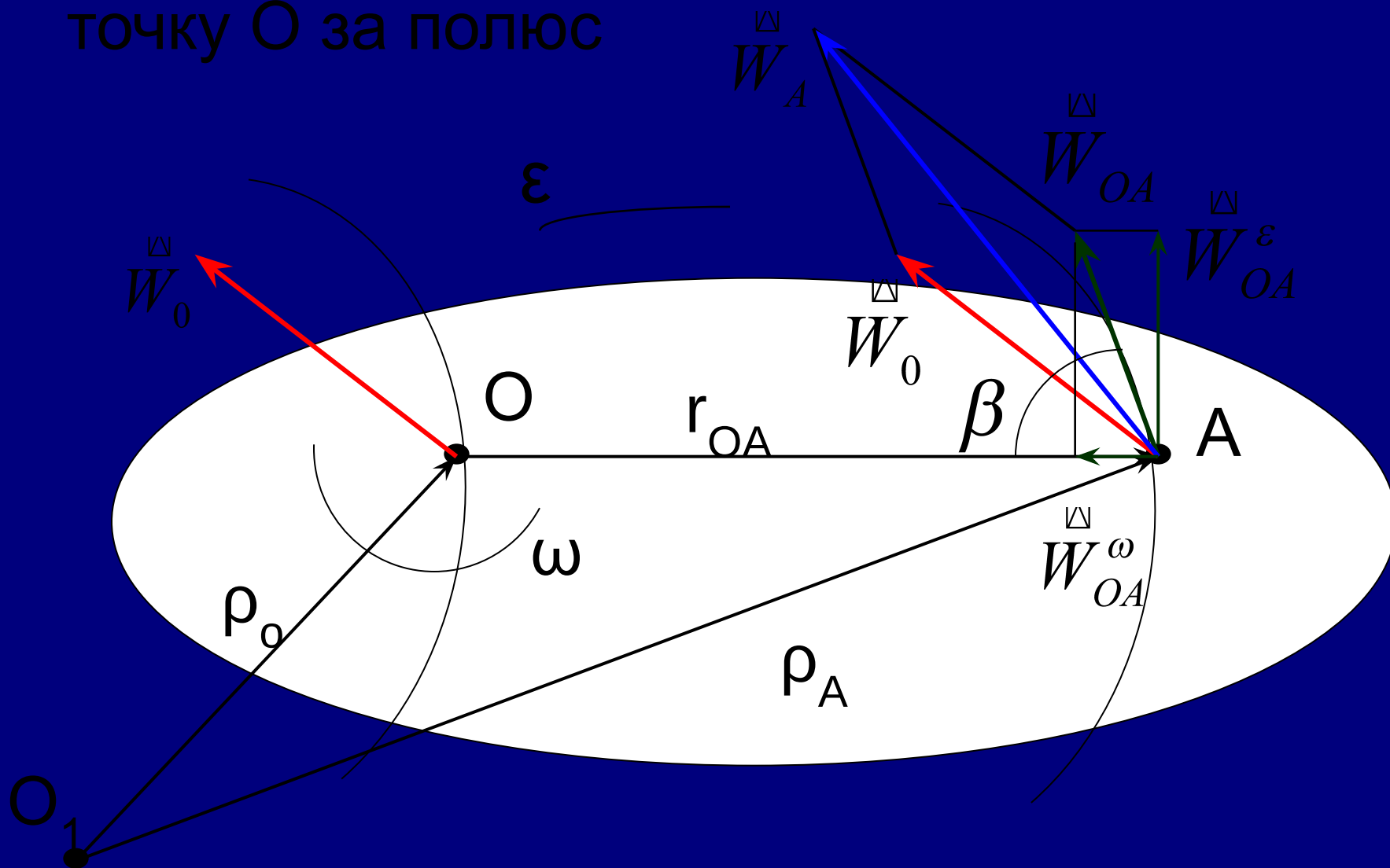
Тело катится без проскальзывания по некоторой неподвижной поверхности.

В этом случае МЦС находится в точке соприкосновения тела с поверхностью.



Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки в ее вращении вместе с плоской фигурой вокруг полюса.

Определим ускорение точки  $A$ , приняв точку  $O$  за полюс



$$\overset{\curvearrowright}{\mathbf{v}}_A = \overset{\curvearrowright}{\mathbf{v}}_0 + \overset{\curvearrowright}{\boldsymbol{\omega}} \times \overset{\curvearrowright}{\mathbf{r}}_{OA}$$

$$\overset{\boxtimes}{W}_A = \frac{d\overset{\curvearrowright}{\mathbf{v}}_A}{dt} = \frac{d\overset{\curvearrowright}{\mathbf{v}}_0}{dt} + \frac{d\overset{\curvearrowright}{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \times \overset{\boxtimes}{\mathbf{r}}_{OA} + \overset{\boxtimes}{\boldsymbol{\omega}} \times \frac{d\overset{\curvearrowright}{\mathbf{r}}_{OA}}{dt}$$

$$\frac{d\overset{\curvearrowright}{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = \overset{\boxtimes}{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \frac{d\overset{\curvearrowright}{\mathbf{r}}_{OA}}{dt} = \overset{\boxtimes}{\mathbf{v}}_{OA} = \overset{\boxtimes}{\boldsymbol{\omega}} \cdot \overset{\boxtimes}{\mathbf{r}}_{OA}$$

$$\overset{\curvearrowright}{W}_A = \overset{\curvearrowright}{W}_0 + \overset{\boxtimes}{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \overset{\boxtimes}{\mathbf{r}}_{OA} + \overset{\boxtimes}{\boldsymbol{\omega}} \times \overset{\boxtimes}{\mathbf{v}}_{OA}$$

$$\overset{\curvearrowright}{W}_A = \overset{\curvearrowright}{W}_0 + \overset{\curvearrowright}{W}_{OA}^{\boldsymbol{\varepsilon}} + \overset{\curvearrowright}{W}_{OA}^{\boldsymbol{\omega}}$$

$$\overset{\curvearrowright}{W}_A = \overset{\curvearrowright}{W}_0 + \overset{\curvearrowright}{W}_{OA}$$


$$W_{OA}^{\varepsilon} = OA \cdot \varepsilon \quad \text{вращательное ускорение}$$

$$W_{OA}^{\omega} = OA \cdot \omega^2 \quad \text{центростремительное ускорение}$$

$$W_{OA} = \sqrt{(W_{OA}^{\varepsilon})^2 + (W_{OA}^{\omega})^2} = OA \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{W_{OA}^{\varepsilon}}{W_{OA}^{\omega}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

# Пример 1

Тело, имеющее форму катушки, катится своим средним цилиндром по неподвижной плоскости так, что  $x_c = 3t$  (см).

Радиусы цилиндров:

$R = 4$  см и  $r = 2$  см (рис.1).

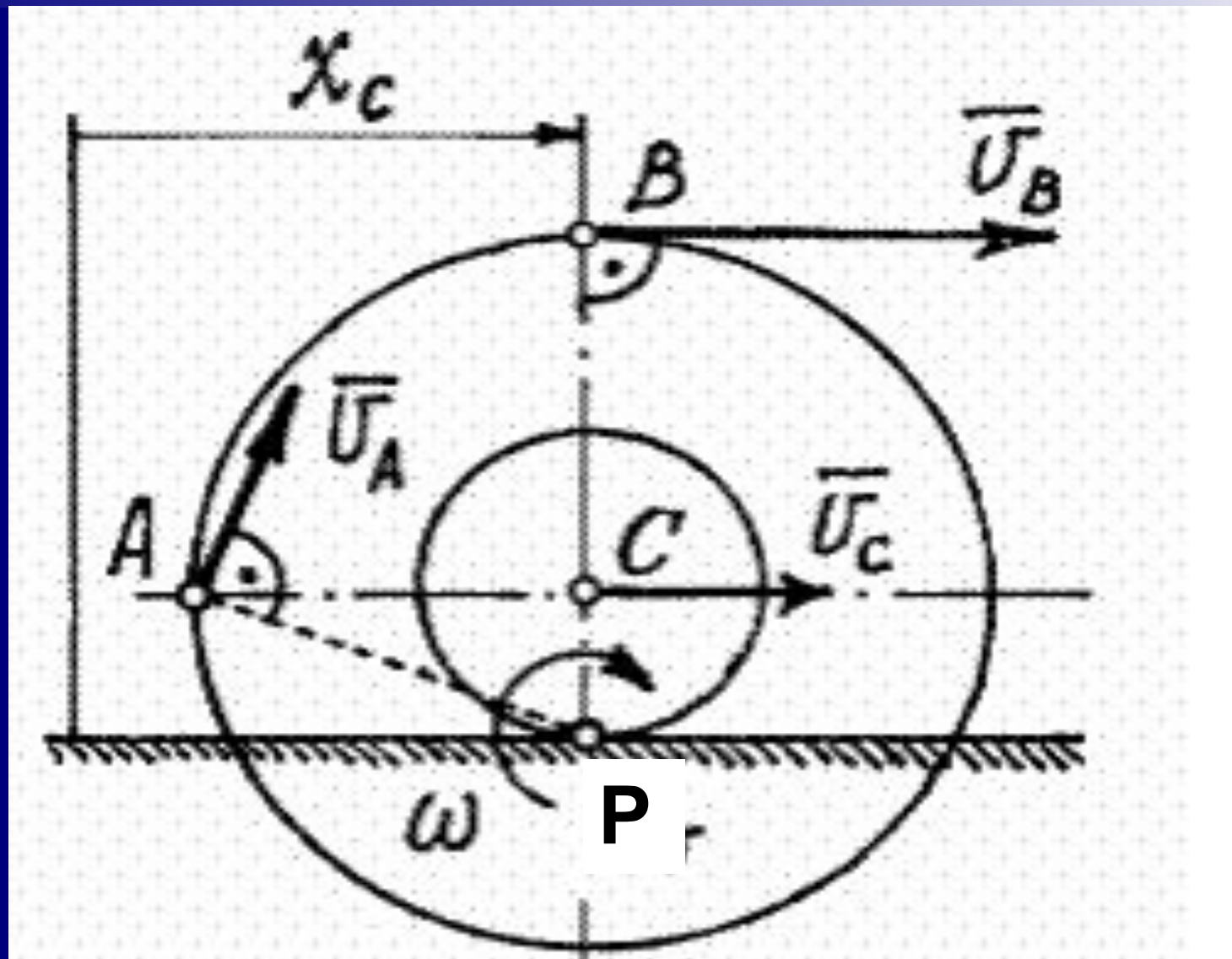


Рис.1

# Решение.

Определим скорости точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

Мгновенный центр скоростей находится в точке касания катушки с плоскостью.

Скорость полюса  $C$

$$v_C = \omega_C = 3 \text{ см} / \text{с}$$



Угловая скорость катушки

$$\omega = \frac{v_C}{CP} = \frac{3}{2} \text{ с}^{-1}$$

Скорости

точек  $A$  и  $B$  направлены перпендикулярно отрезкам прямых, соединяющих эти точки с мгновенным центром скоростей. Величина скоростей:

$$v_A = \omega \cdot AP = \omega \cdot \sqrt{r^2 + R^2} = 6,71 \text{ см} / \text{с}$$

$$v_B = \omega \cdot BP = \omega \cdot (R + r) = 9 \text{ см} / \text{с}$$

## Пример 2

Найти угловую скорость шатуна  $AB$  и скорости точек  $B$  и  $C$  кривошипно-шатунного механизма (рис.2). Дана угловая скорость кривошипа  $OA$  и размеры:

$$\omega_{OA} = 2 \text{ с}^{-1},$$

$$OA = AB = 0,36 \text{ м}, \quad \varphi = 60$$

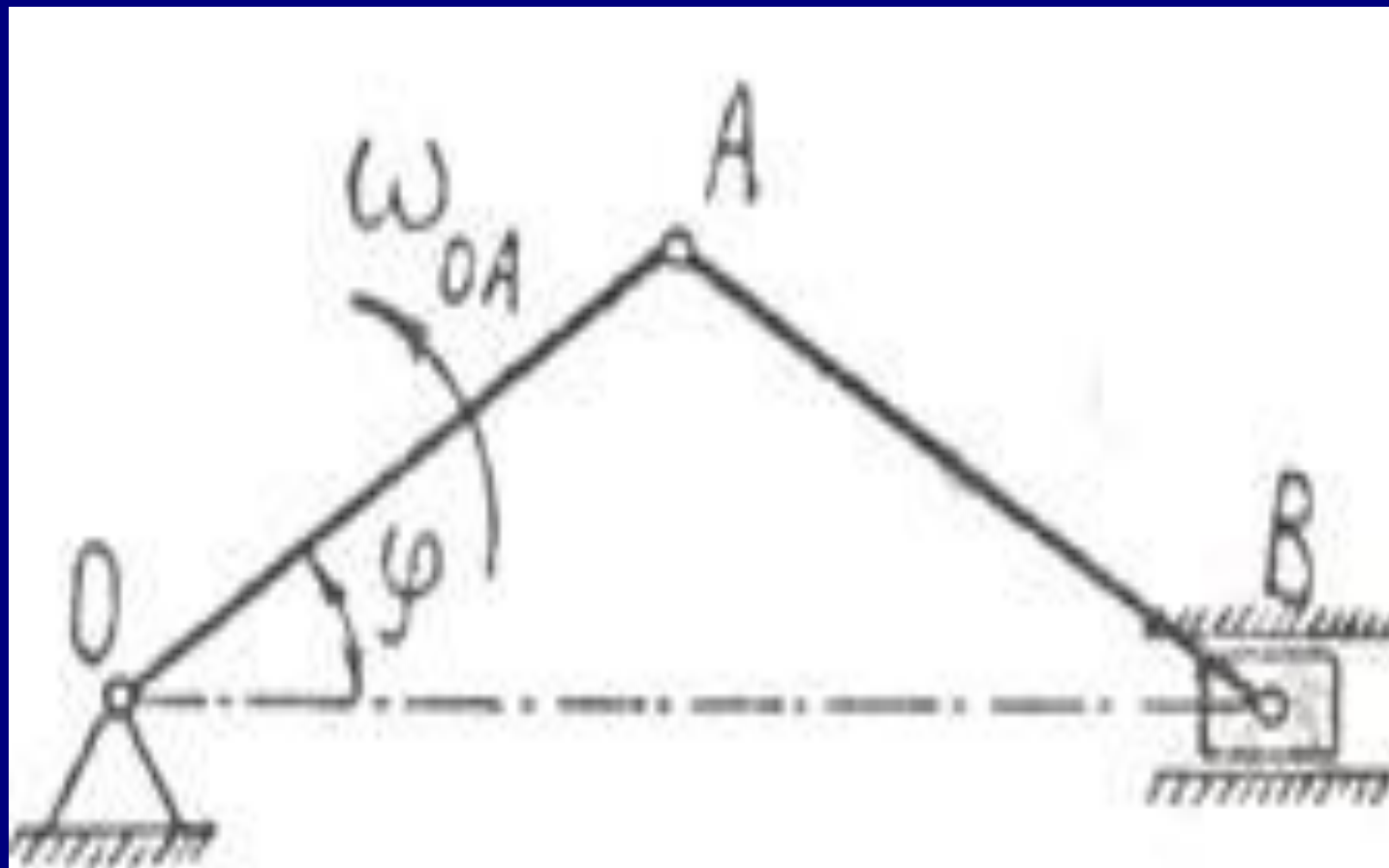


Рис.2

# Решение

Кривошип  $OA$  совершает вращательное движение,

Шатун  $AB$  - плоскопараллельное движение

Находим скорость точки  $A$  звена  $OA$

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 0,36 = 0,72 \text{ см/с}, \quad v_A \perp OA$$

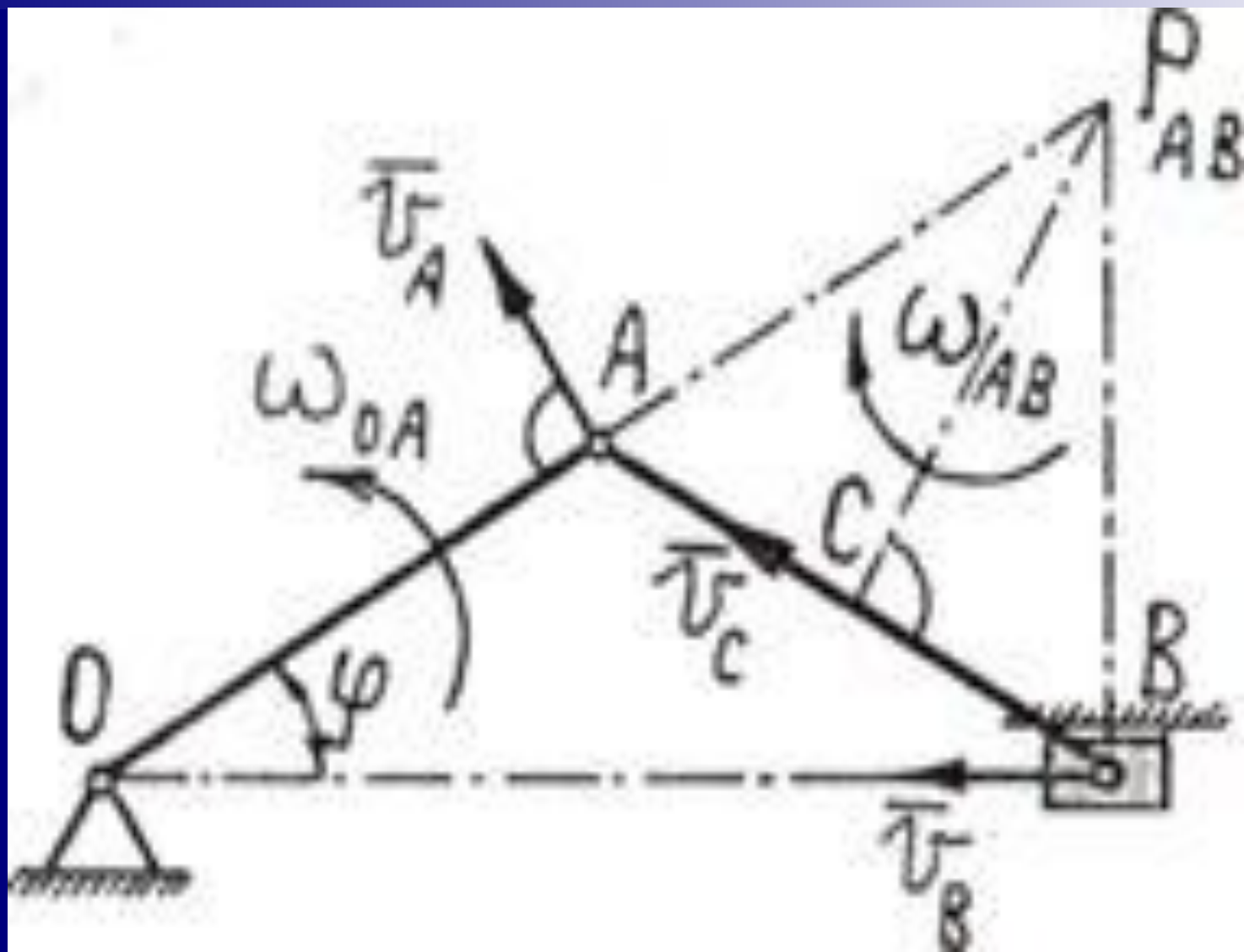


Рис.3

Угловая скорость звена  $AB$  и скорости точек  $B$  и  $C$ :

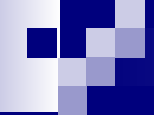
$$OB = AB = OA, \quad \triangle OAP \text{ равносторонний}$$
$$AB = AP = 0,36 \text{ см}$$

$$v_A = \omega_{AB} \cdot AP \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{0,72}{0,36} = 2 \text{ с}^{-1}$$

$\triangle OBP$  прямоугольный  $\Rightarrow$

$$BP = OP \cdot \cos 60 = 0,72 \cdot 0,86 = 0,62 \text{ см}$$

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP \Rightarrow v_B = 2 \cdot 0,62 = 1,24 \text{ см/с}$$



# *Алгоритм определение ускорения*

Ускорение любой точки плоской фигуры в данный момент времени можно найти, если известны:

векторы скорости и ускорения какой-нибудь точки  $A$  этой фигуры в данный момент;

положение мгновенного центра скоростей.


# План решения

Находим мгновенный центр скоростей, восстанавливая перпендикуляры к скоростям двух точек плоской фигуры.

Определяем мгновенную угловую скорость фигуры.

Определяем центростремительное ускорение точки вокруг полюса, приравнивая нулю сумму проекций всех слагаемых ускорений на ось, перпендикулярную к известному направлению ускорения.





Находим модуль вращательного ускорения, приравнивая нулю сумму проекций всех слагаемых ускорений на ось, перпендикулярную к известному направлению ускорения.

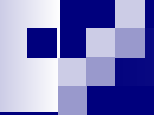
Определяем мгновенное угловое ускорение плоской фигуры по найденному вращательному ускорению.

Находим ускорение точки плоской фигуры при помощи формулы распределения ускорений.

# Пример 3

Исследовать работу плоского механизма и для заданного положения его звеньев и точек определить их кинематические характеристики, если угловая скорость и угловое ускорение кривошипа  $OA$  соответственно равны :

$$\omega \quad \varepsilon$$

- 
1. Угловую скорость тела АВ;
  2. Скорость точки В;
  3. Нормальное и касательное ускорения точки В при вращении вокруг точки А;
  4. Угловое ускорение тела АВ;
  5. Ускорение точки В.

Дано: схема механизма в заданном  
положении (рис.4);

OA=10 см,

AB=60 см,

$$\omega_{OA} = 1,5 \text{ с}^{-1}$$

$$\varepsilon_{OA} = 2 \text{ с}^{-2}$$

Найти для заданного механизма скорость  
и ускорение точки В.

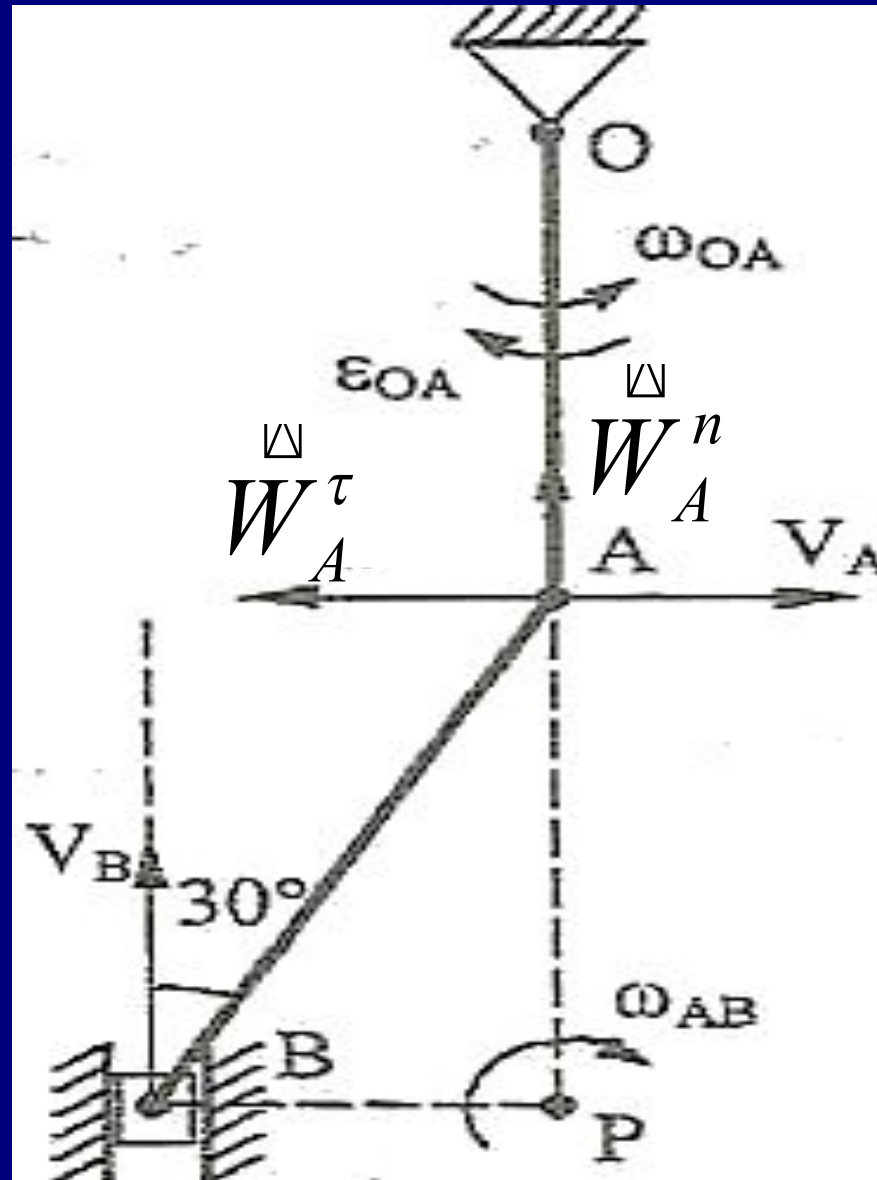


Рис.4

# Решение.

Точка А полюс. Скорость точки А:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 15 \text{ см} / \text{с}$$

Ускорение точки А: (Рис.4)

$$\vec{W}_A = W_{OA}^\varepsilon \cdot \vec{\tau} + W_{OA}^\omega \cdot \vec{n}$$

$$W_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 22,5 \text{ см} / \text{с}^2$$

$$W_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 20 \text{ см} / \text{с}^2$$

2. Точка Р МЦС. Мгновенный центр скоростей Р находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек А и В к их скоростям. Скорость ползуна В направлена по вертикали. Зная МЦС, находим угловую скорость звена АВ

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = 0,29c^{-1}$$

где  $AP = AB \cos 30 = 52 \text{ см}$

3. Скорость точки В.

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP = 8,7 \text{ см/с}$$

где  $BP = AB \cdot \sin 30 = 10 \text{ см}$

4. Ускорение точки В.

$$\begin{aligned} \vec{W}_B &= \vec{W}_A + W_{AB}^n \vec{n} + W_{AB}^\tau \vec{\tau} = \\ &= W_A^n \vec{n} + W_A^\tau \vec{\tau} + W_{AB}^n \vec{n} + W_{AB}^\tau \vec{\tau} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $W_{AB}^n = \omega_{AB} \cdot AB = 5 \text{ см/с}$



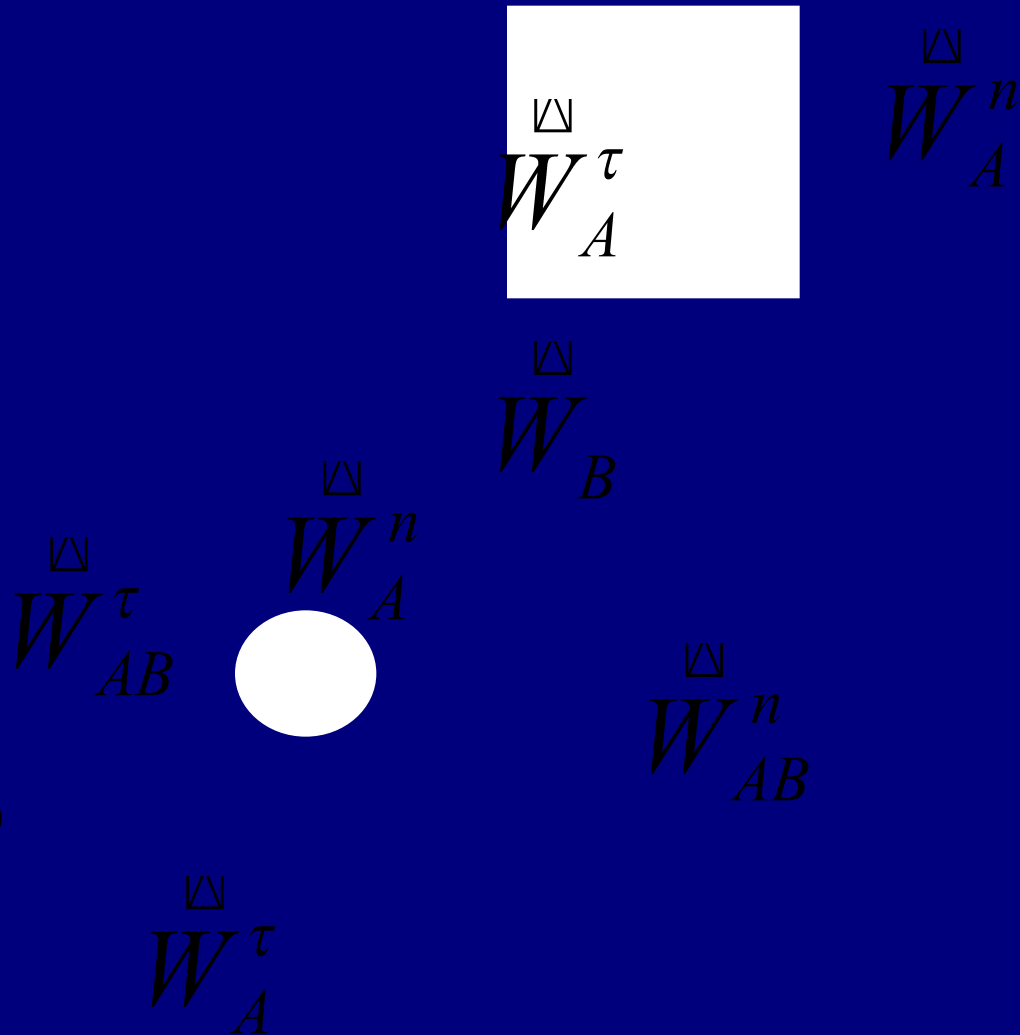


Рис.5

Вектор центростремительного ускорения направлен от В к А.

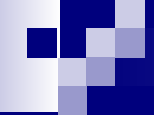
Вектор ускорения точки В направлен по вертикали вдоль направляющих ползуна.

Вектор вращательного ускорения направлен перпендикулярно АВ. (рис. 5).

Определим эти ускорения, спроецировав векторное равенство (3.1) на направление АВ:

$$W_B \cos 30 = W_A^n \cos 30 + W_{AB}^n - W_A^\tau \cos 60$$

отсюда  $W_B = 16,7 \text{ см} / \text{с}^2$



Проецируя равенство (3.1) на  
направление перпендикулярное АВ,  
имеем

$$W_B \cos 60 = W_A^\tau \cos 30 + W_A^n \cos 60 + W_{AB}^\tau$$

Отсюда

$$W_{AB}^\tau = -20,2 \text{ см} / \text{с}^2$$

Направление  $\overline{W}_{AB}^\tau$  противоположно  
показанному на рис. 5

Угловое ускорение находим по формуле

$$\varepsilon_{AB} = \frac{W_{AB}^{\tau}}{AB} = 0,34c^{-2}$$

Направление ускорения  $\varepsilon_{AB}$  относительно полюса A определяет направление углового ускорения  $W_{AB}^{\tau}$

$\varepsilon_{AB}$