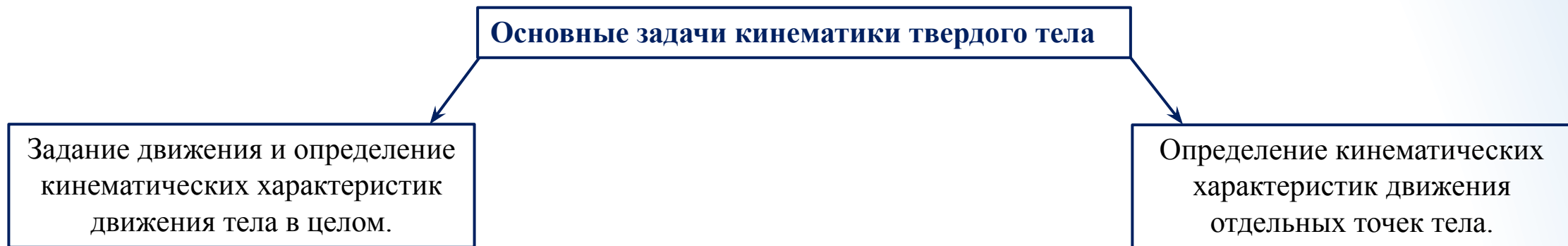


Абсолютно твёрдым телом в теоретической механике называется тело, у которого расстояние между любыми двумя точками остаются постоянными.

В кинематике форма твердого тела не влияет на кинематические параметры его движения. Считаем, что в движение вовлекаются любые точки из примыкающей области пространства, и их тоже можно отнести к рассматриваемому телу.



Для задания движения твердого тела необходимо установить **число степеней свободы твердого тела** – минимальное число независимых скалярных переменных, в совокупности однозначно определяющих положение материального тела в пространстве.

Взаимодействие твердого тела с другими телами осуществляется через **связи**.

Связи – любые материальные тела, накладывающие ограничения на положение или движение тела в пространстве.

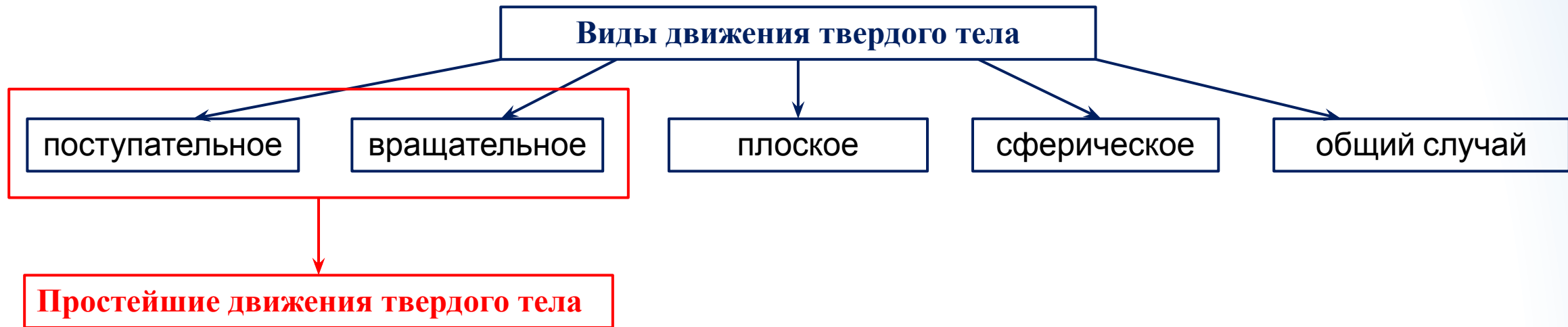
Будем рассматривать твердое тело как механическую систему, состоящую из материальных точек, расстояние между которыми остается постоянным.

Пусть система состоит из N материальных точек $\Rightarrow 3N$ координат.

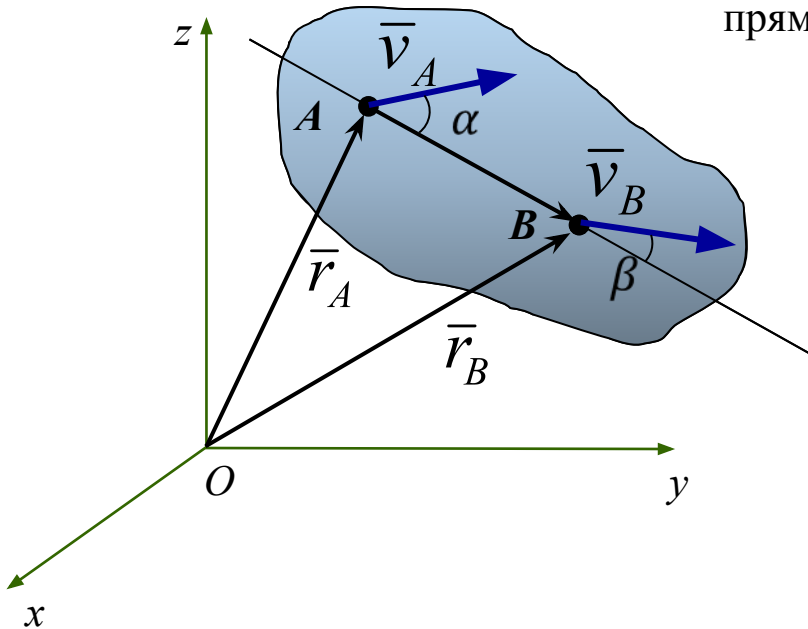
На систему наложено m связей вида $f_l(x_k, y_k, z_k, t) = 0, l = \overline{1, m}$

Число независимых координат: $n = 3N - m$

Обобщенные координаты $q_i, i = \overline{1, n}$ – независимые координаты, однозначно определяющие положение механической системы в пространстве в любой момент времени. **Число степеней свободы механической системы равно числу ее обобщенных координат.**



Теорема. При любом виде движения твердого тела проекции скоростей точек тела на прямую, соединяющую эти точки равны.



$$\bar{r}_B - \bar{r}_A = \overline{AB}.$$

Возводя в квадрат правую и левую части, получим:

$$(\bar{r}_B - \bar{r}_A)^2 = \overline{AB}^2$$

$$|\overline{AB}| = \text{const}$$

Дифференцируем по времени это соотношение

$$2(\bar{r}_B - \bar{r}_A) \left(\frac{d\bar{r}_B}{dt} - \frac{d\bar{r}_A}{dt} \right) = 0.$$

Поскольку в этом равенстве $(\bar{r}_B - \bar{r}_A) = \overline{AB}$; $\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \bar{v}_B$; $\frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{v}_A$, то $2\overline{AB}(\bar{v}_B - \bar{v}_A) = 0$ или $\overline{AB} \cdot \bar{v}_B = \overline{AB} \cdot \bar{v}_A$.

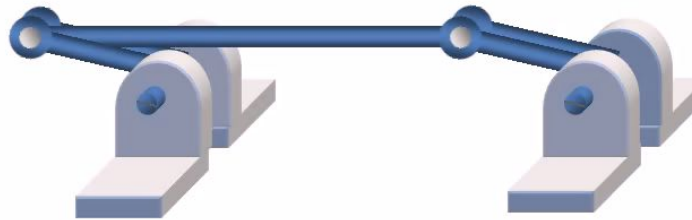
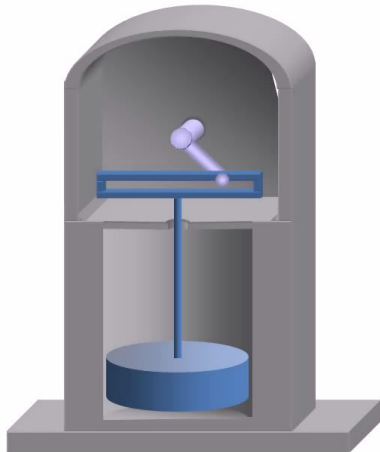
Раскрывая скалярное произведение, получим:

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha$$

Поступательное движение твердого тела

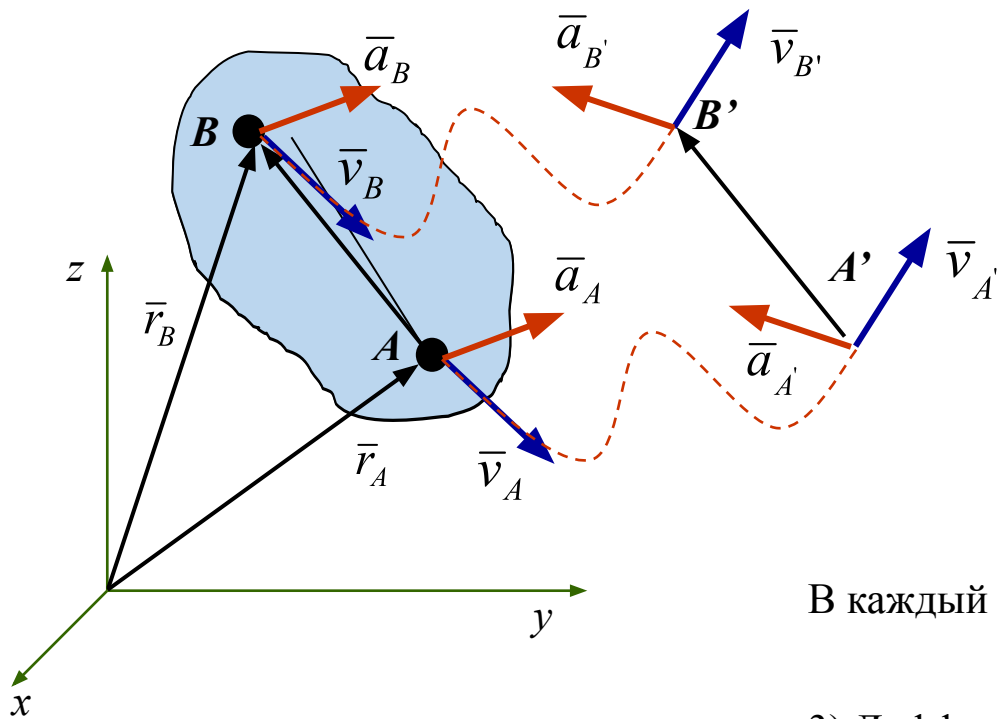


Поступательным движением твердого тела называется такое его движение, при котором прямая, проходящая через любые две точки в этом теле, будет оставаться параллельной своему первоначальному положению на протяжении всего времени движения.



Свойства поступательного движения:

- 1) траектории всех точек тела, совершающего поступательное движение конгруэнтны, т.е. одинаковы и могут быть совмещены друг с другом параллельным переносом;
- 2) скорости всех точек тела одинаковы;
- 3) ускорения всех точек тела одинаковы.



1) Для любых двух точек A и B

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}, \quad \overline{AB} = \text{const.}$$

Траектории точек A и B , как годографы \bar{r}_A , \bar{r}_B смещены на одну и ту же величину в одном и том же направлении.

2) Дифференцируя по времени правую и левую части соотношения для радиус-векторов, получим:

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AB}}{dt}, \quad \frac{d\overline{AB}}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{r}_B(t)}{dt} = \frac{d\bar{r}_A(t)}{dt}.$$

В каждый момент времени скорость точки B геометрически равна скорости точки A :

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A.$$

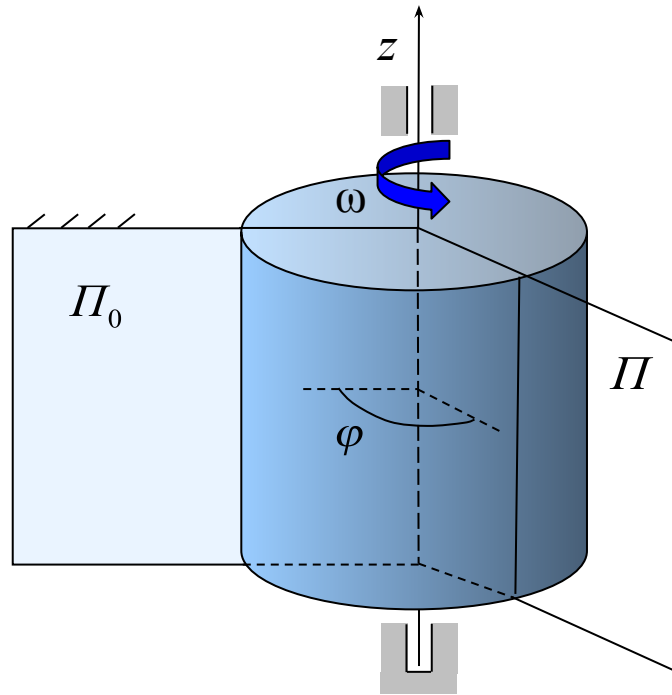
3) Дифференцируя левую и правую части соотношения для скоростей, получим:

$$\frac{d\bar{r}_A^2(t)}{dt^2} = \frac{d\bar{r}_B^2(t)}{dt^2}, \quad \bar{a}_B = \bar{a}_A.$$

Для описания поступательного движения тела, достаточно задать движение любой одной его точки.

$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad z_A = z_A(t) \text{ уравнения поступательного движения твердого тела}$$

Свободное твердое тело при поступательном движении имеет **три степени свободы**.



Вращением твердого тела вокруг неподвижной оси или вращательным движением называется такое движение, при котором в теле можно выделить прямую, все точки которой будут оставаться неподвижными во время движения. Эта прямая называется **осью вращения** твердого тела.

Проведем через ось вращения неподвижную плоскость Π_0 и подвижную Π , жестко связанную с вращающимся телом. Пусть в начальный момент времени обе плоскости совпадают.

Тогда в момент времени t положение подвижной плоскости и самого вращающегося тела можно определить двугранным углом между плоскостями. Этот угол называется углом поворота тела.

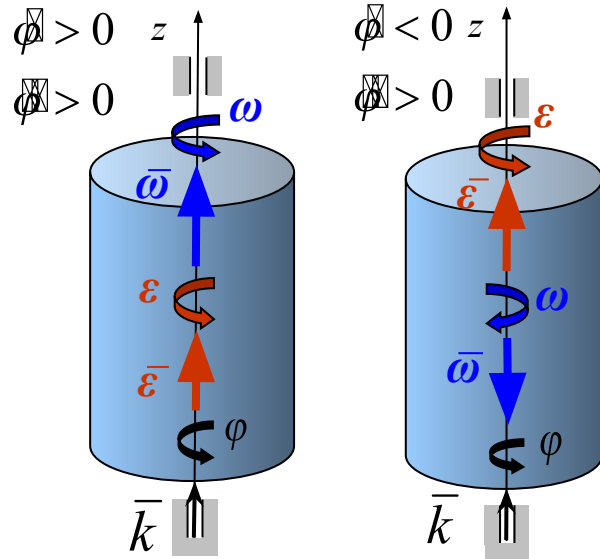
$\varphi = \varphi(t)$ – закон вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Таким образом, при вращательном движении тело имеет **одну степень свободы**.

Угловая скорость.

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \omega_{cp} \text{ – средняя угловая скорость, } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega \text{ – алгебраическая угловая скорость. } [\omega] = \text{рад/с}$$

Угловая скорость на чертеже изображается дуговой стрелкой, направленной в сторону вращения.



Вектор угловой скорости

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi} \bar{k}, \quad \omega_z = \bar{\omega} \bar{k} = \dot{\varphi}, \quad \omega = |\bar{\omega}| = |\omega_z| = |\dot{\varphi}|.$$

Техническая характеристика – частота n , $[n] = \text{об/мин}$, $\omega = \frac{2\pi n}{60} \approx 0,1n$

Алгебраическое угловое ускорение

$$\varepsilon_z = \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad [\varepsilon] = \text{рад/с}^2$$

Вектор углового ускорения

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \ddot{\varphi} \bar{k}, \quad \varepsilon_z = \bar{\varepsilon} \bar{k} = \ddot{\varphi}, \quad \varepsilon = |\bar{\varepsilon}| = |\varepsilon_z| = |\ddot{\varphi}|.$$

$\bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$ - это скользящие вектора

$\bar{\omega} \uparrow \uparrow \bar{\varepsilon}$ ускоренное вращение

$\bar{\omega} \uparrow \downarrow \bar{\varepsilon}$ замедленное вращение

Частные случаи.

1) Равномерное вращение $\omega_z = \text{const}$. $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = 0$, $\varphi(t) = \omega_z t + \varphi_0$

2) Равнопеременное вращение $\varepsilon_z = \text{const}$. $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z$, $\omega_z = \varepsilon_z t + \omega_0$, $\varphi(t) = \varepsilon_z \frac{t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0$

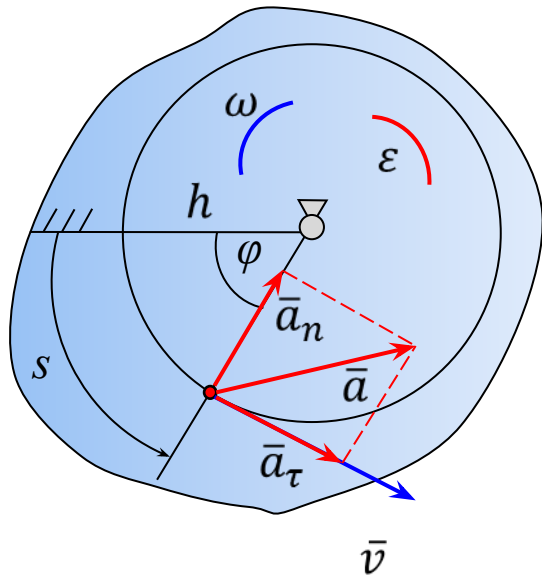
Скорости и ускорения точек тела при вращательном движении



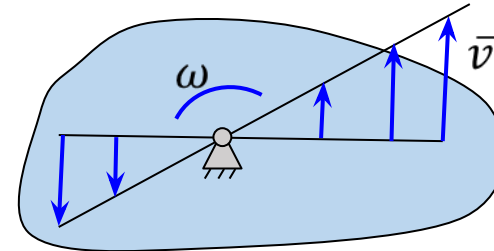
Скалярные выражения для скоростей и ускорений точек тела при вращательном движении.

$$s(t) = h\varphi(t); \quad v_\tau = \dot{s} = h\dot{\varphi}; \quad v = h\omega.$$

Скорости точек тела при вращении вокруг неподвижной оси пропорциональны их кратчайшим расстояниям до этой оси.



Поле скоростей точек тела при вращательном движении:

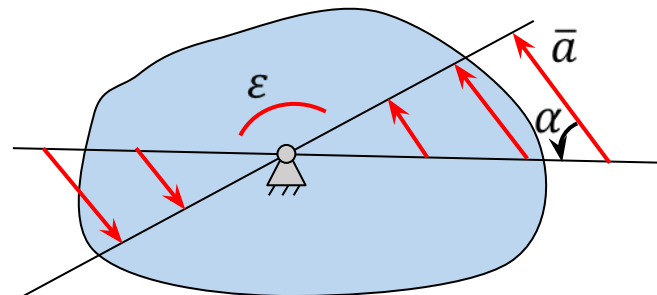


$$a_n = v^2/\rho = h^2\omega^2/h = h\omega^2 \quad a_\tau = \dot{s} = h\dot{\varphi} = h\epsilon;$$

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n; \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}.$$

Ускорения точек тела при вращении вокруг неподвижной оси пропорциональны их кратчайшим расстояниям до этой оси.

Поле ускорений точек тела при вращательном движении:

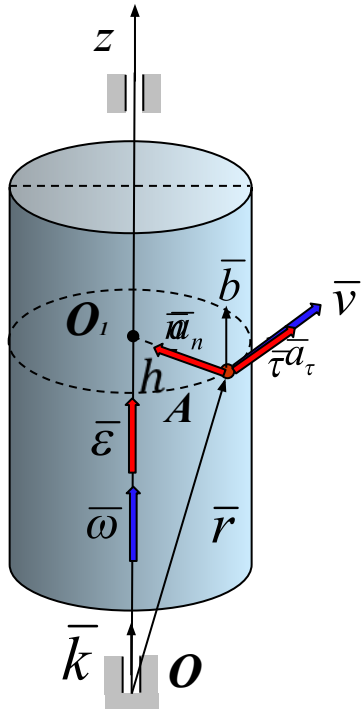


$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{\epsilon}{\omega^2}$$

Скорости и ускорения точек тела при вращательном движении



Векторные выражения для скоростей и ускорений точек тела при вращательном движении.



$$\bar{r} = \overline{OO_1} + \overline{O_1A}, \quad \overline{OO_1} = OO_1\bar{k}, \quad \overline{O_1A} = -h\bar{n}, \quad \overline{OO_1} = \overline{const}$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overline{OO_1} + \overline{O_1A}) = \frac{d}{dt}(\overline{OO_1} - h\bar{n}) = -h \frac{d\bar{n}}{dt}, \quad \frac{d\bar{n}}{dt} = -\phi\bar{\tau} \Rightarrow \bar{v} = h\phi\bar{\tau}$$

Поскольку $\bar{\tau} = \bar{n} \times \bar{b} = \bar{n} \times \bar{k}$, то:

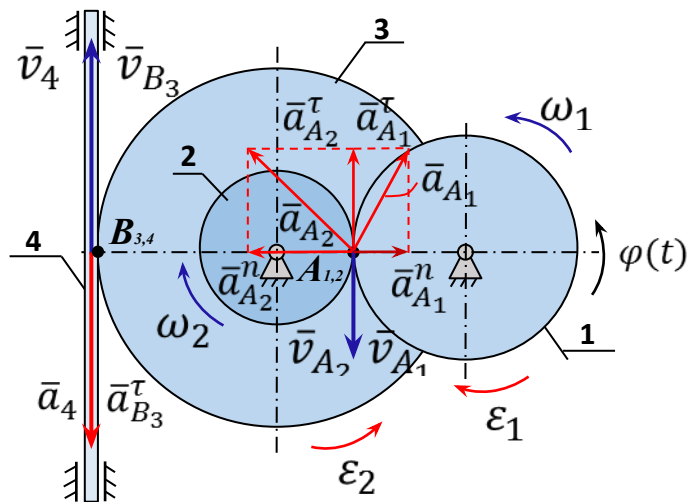
$$\bar{v} = h\phi(\bar{n} \times \bar{k}) = \phi\bar{k} \times (-h\bar{n}) = \phi\bar{k} \times (OO_1\bar{k} - h\bar{n})$$

Окончательно получаем: $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ – **формула Эйлера**.

Дифференцируя формулу Эйлера по времени, получим:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(\bar{\omega} \times \bar{r})}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}$$

$$\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}; \quad \bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$



Дано:

$$\varphi(t) = 3t - t^2 \text{ рад}, \quad R_1 = 10 \text{ см}, \quad R_2 = 5 \text{ см}, \quad R_3 = 20 \text{ см}, \quad t = 1 \text{ с}$$

Найти: $v_{A_1}, v_{A_2}, a_{A_1}, a_{A_2}, v_4, a_4$

Решение.

$$\omega_{1z} = \dot{\varphi} = 3 - 2t = 1 \text{ рад/с}, \quad \omega_1 = |\omega_{1z}| = 1 \text{ рад/с}$$

$$v_{A_1} = \omega_1 R_1 = 10 \text{ см/с}, \quad v_{A_1} = v_{A_2}$$

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2, \quad \omega_2 = \frac{v_{A_1}}{R_2} = 2 \text{ рад/с}$$

$$\omega_3 = \omega_2, \quad v_{B_3} = v_{B_4} = v_4 = \omega_3 R_3 = 40 \text{ см/с}$$

$$\varepsilon_{1z} = \ddot{\varphi} = -2 \text{ рад/с}^2, \quad \varepsilon_1 = |\varepsilon_{1z}| = 2 \text{ рад/с}^2,$$

$$a_{A_1}^{\tau} = \varepsilon_1 R_1 = 20 \text{ см/с}^2, \quad a_{A_1}^{\tau} = a_{A_2}^{\tau}, \quad \varepsilon_1 R_1 = \varepsilon_2 R_2,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{A_1}^{\tau}}{R_2} = 4 \text{ рад/с}^2, \quad a_{A_1}^n = \omega_1^2 R_1 = 10 \text{ см/с}^2, \quad a_{A_2}^n = \omega_2^2 R_2 = 20 \text{ см/с}^2, \quad a_{B_3}^{\tau} = a_{B_4}^{\tau} = a_4 = \varepsilon_3 R_3 = 80 \text{ см/с}^2$$

$$a_{A_1} = \sqrt{a_{A_1}^{\tau 2} + a_{A_1}^{n 2}} \approx 22,36 \text{ см/с}^2, \quad a_{A_2} = \sqrt{a_{A_2}^{\tau 2} + a_{A_2}^{n 2}} \approx 28,28 \text{ см/с}^2$$