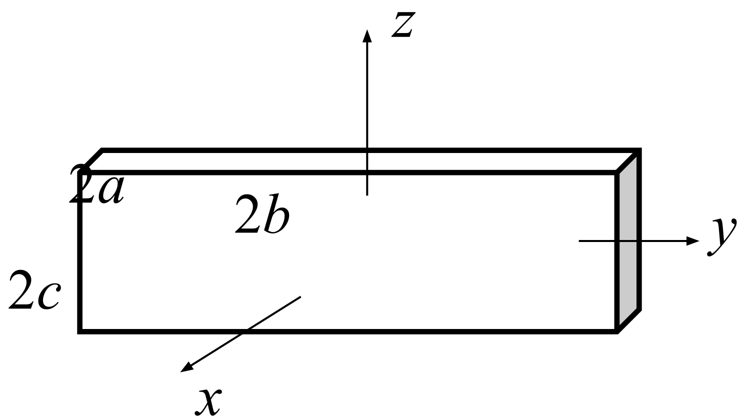
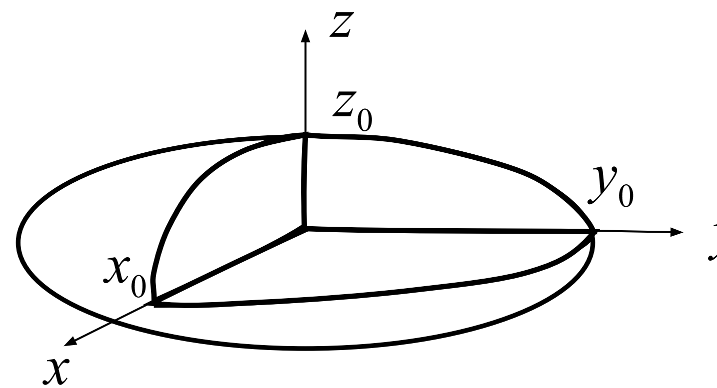
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ЛЕКЦИЯ 7:

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ. СЛУЧАЙ ЭЙЛЕРА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

1. Напоминание: эллипсоид инерции





$$C = M\left(b^2 + a^2\right)/3$$

$$A = M\left(b^2 + c^2\right)/3 \qquad C > A > B$$

$$B = M\left(c^2 + a^2\right)/3$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{B}} > x_0 = \frac{1}{\sqrt{A}} > z_0 = \frac{1}{\sqrt{C}}$$

Общий вид эллипсоида инерции «похож» на форму однородного тела

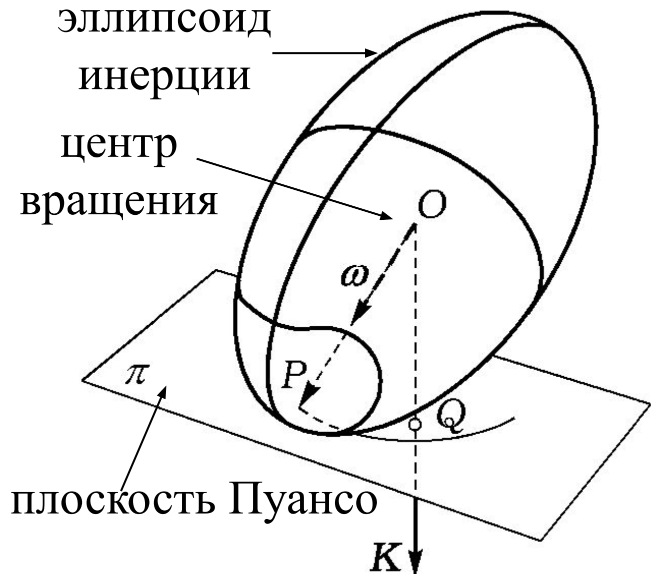
При геометрической интерпретации вращения ТТ удобно мысленно заменить его («вырезать из него») соответствующий эллипсоид инерции

2. Геометрическая интерпретация Пуансо

Эллипсоид инерции $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$

P - точка пересечения ЭИ с мгновенной осью вращения

π проходит через Р и касается ЭИ



1) Величина угловой скорости ω пропорциональна длине радиуса-вектора точки P относительно O

$$\overrightarrow{OP} = \lambda \boldsymbol{\omega} \quad \Rightarrow \quad x_p = \lambda p,\ y_p = \lambda q,\ z_p = \lambda r$$

$$\lambda^2 \big(\underbrace{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}_{2T}\big) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2T}} = \mathrm{const}$$

2) Плоскость π перпендикулярна кинетическому моменту $\boldsymbol{K}_0$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2Ax_p \\ 2By_p \\ 2Cz_p \end{pmatrix} = 2\lambda \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix} = 2\lambda \mathbf{K}_O$$

3) Проекция OQ радиуса-вектора OP на направление кинетического момента $\boldsymbol{K}_0$ есть величина постоянная.

$$OQ = \frac{\mathbf{K}_O \cdot \overrightarrow{OP}}{K_O} = \lambda \frac{\mathbf{K}_O \cdot \boldsymbol{\omega}}{K_O} = \lambda \frac{2T}{K_O} = \frac{\sqrt{2T}}{K_O} = \mathrm{const}$$

3. Геометрическая интерпретация Пуансо

Эллипсоид инерции для неподвижной точки катится без скольжения (А) по плоскости, неподвижной в пространстве (Б); эта плоскость перпендикулярна кинетическому моменту (В); угловая скорость тела пропорциональна длине радиуса-вектора точки касания (Г), а по направлению с ним совпадает (Д).

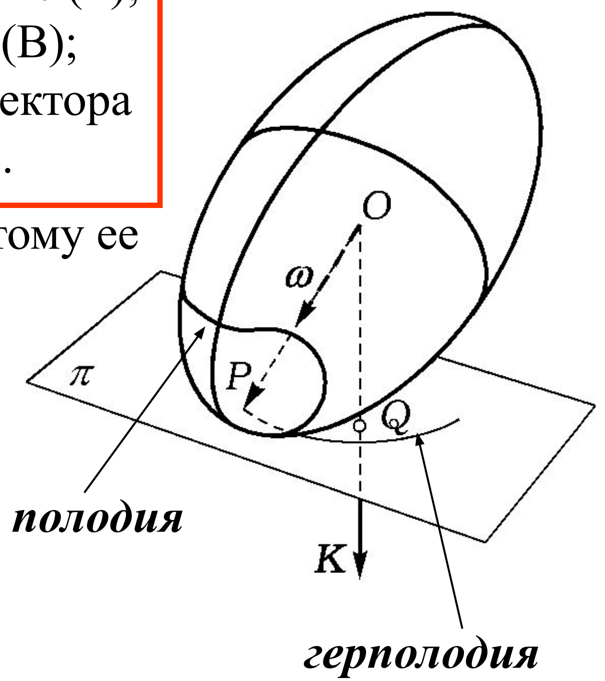
(А) точка P лежит на мгновенной оси вращения, и поэтому ее скорость равна нулю.

(Б) Следствие (2), (3), и того, что $\mathbf{K}_O = \mathrm{const}$

(В) Следствие (2)

(Г) Следствие (1)

(Д) по построению



При движении тела точка P на эллипсоиде инерции вычерчивает кривую, которая называется **полодией**. Соответствующая кривая на плоскости π называется **герполодией**.

Если эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения, то полодия и герполодия представляют собой окружности.

4. Интегрирование уравнений Эйлера в общем виде

$$\boxed{A > B > C}$$

$$\left.\begin{aligned} &A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K_O^2 \\ &Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} p^2 &= \frac{1}{A(C-A)}\left[\left(2TC - K_O^2\right) - B(C-B)q^2\right] \\ r^2 &= \frac{1}{C(C-A)}\left[\left(K_O^2 - 2TA\right) - B(B-A)q^2\right] \end{aligned}\right.$$

$$B\dot{q} + (A - C)rp = 0$$

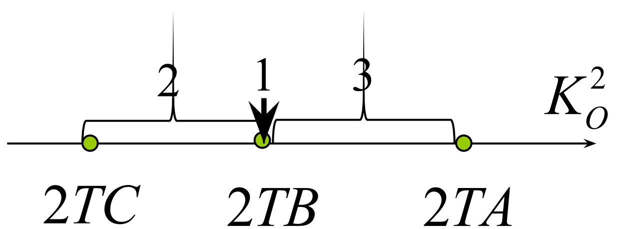
$$\boxed{\frac{dq}{dt} = \pm\frac{1}{B\sqrt{AC}}\sqrt{\left[\left(K_O^2 - 2TC\right) - B(B-C)q^2\right]\left[\left(2TA - K_O^2\right) - B(A-B)q^2\right]}}$$

$$\left.\begin{aligned} 2TA = A^2p^2 + BAq^2 + CAr^2 \ge A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K_O^2 \\ 2TC = ACp^2 + BCq^2 + C^2r^2 \le A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K_O^2 \end{aligned}\right\} \boxed{2TC \le K_O^2 \le 2TA}$$

Случай 1 $\quad K_O^2 = 2TB$

Случай 2 $\quad 2TB > K_O^2 \ge 2TC$

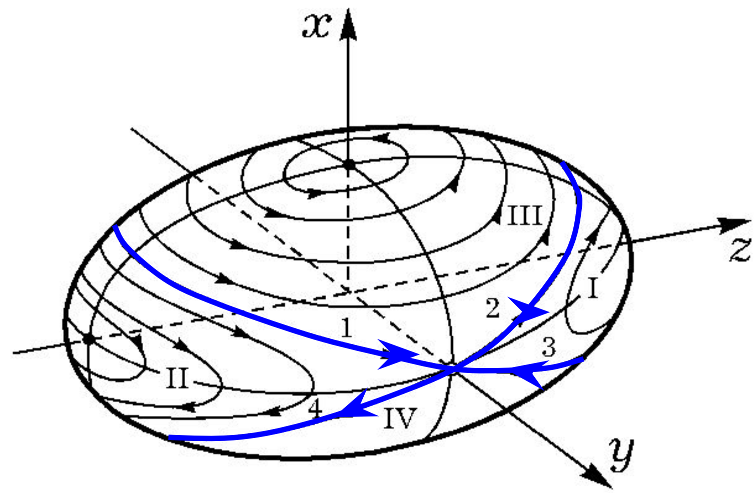
Случай 3 $\quad 2TA \ge K_O^2 > 2TB$



5. Интегрирование уравнений Эйлера (случай 1)

$$p^2 = \frac{(B-C)}{A(A-C)}\left[2T - Bq^2\right]$$

$$r^2 = \frac{(A-B)}{C(A-C)}\left[2T - Bq^2\right]$$



Полодии лежат в плоскостях

$$x = \pm\sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}}\,z$$

Ур-е для q

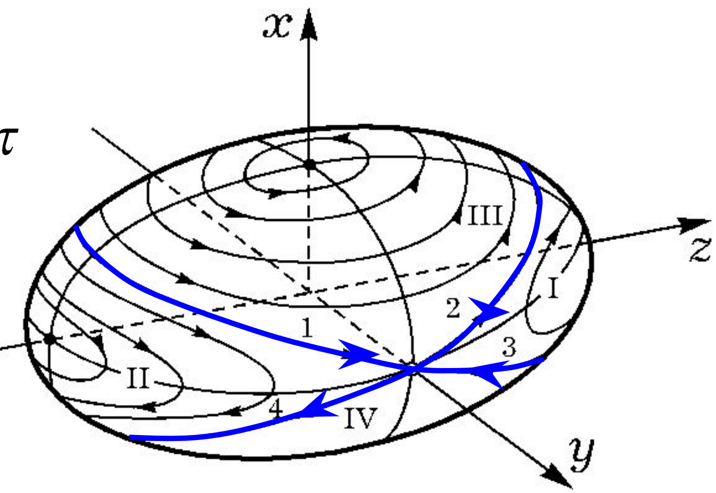
$$B\dot{q} + (A-C)rp = 0$$

$$B\dot{q} = \pm\cancel{(A-C)}\sqrt{\frac{(A-B)}{C\cancel{(A-C)}}\frac{(B-C)}{A\cancel{(A-C)}}}\left[2T - Bq^2\right]$$

$$\frac{dq}{d\tau} = \pm\frac{2T - Bq^2}{\sqrt{2TB}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{2T(A-B)(B-C)}{ABC}}\,t$$

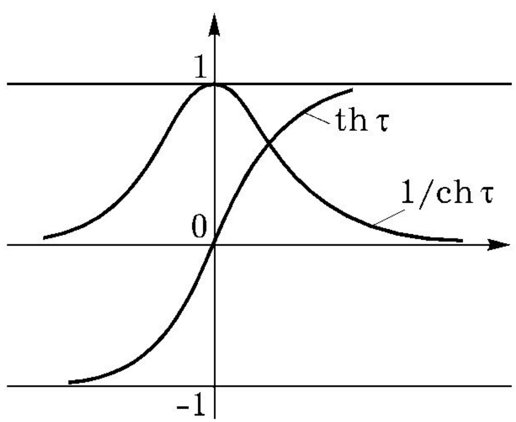
6. Интегрирование уравнений Эйлера (случай 1)

$$\frac{dq}{d\tau}=\pm\frac{2T-Bq^2}{\sqrt{2TB}} \qquad \frac{\sqrt{2TB}}{2T-Bq^2}dq=\pm d\tau$$



$$\pm\tau=\int\frac{\sqrt{2TB}}{2T-Bq^2}dq=c\int\frac{dq}{c^2-q^2} \qquad c=\sqrt{\frac{2T}{B}}$$

$$\pm\tau+\text{const}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{c+q}{c-q}\right|$$



Полодия 1 $\qquad q=\sqrt{\frac{2T}{B}}\,\mathrm{th}\left(\tau+\cancel{\text{const}}\right)$

$$r=-\sqrt{\frac{2T(A-B)}{A(A-C)}}\frac{1}{\mathrm{ch}\,\tau} \qquad p=\sqrt{\frac{2T(B-C)}{A(A-C)}}\frac{1}{\mathrm{ch}\,\tau}$$

Случай 1 : движение неустойчиво

7. Интегрирование уравнений Эйлера (случай 2)

$$2TB > K_O^2 \geq 2TC$$

$$\frac{dq}{dt} = \pm\frac{1}{B\sqrt{AC}}\sqrt{\left[\left(K_O^2 - 2TC\right) - B\left(B - C\right)q^2\right]\left[\left(2TA - K_O^2\right) - B\left(A - B\right)q^2\right]}$$

подстановка $q = \sqrt{\dfrac{\left(K_O^2 - 2TC\right)}{B\left(B - C\right)}}Q$

$$t_0\frac{dQ}{dt} = \pm\sqrt{\left(1 - Q^2\right)\left(1 - k^2Q^2\right)}$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{ABC}{\left(B - C\right)\left(2TA - K_O^2\right)}} \qquad k^2 = \frac{\left(A - B\right)\left(K_O^2 - 2TC\right)}{\left(B - C\right)\left(2TA - K_O^2\right)} < 1$$

$$\left|Q\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad Q = \sin\lambda \qquad \tau = \frac{t}{t_0} \qquad \boxed{\frac{d\lambda}{d\tau} = \sqrt{1 - k^2\sin^2\lambda}}$$

$$\tau + \cancel{\text{const}} = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\lambda}} = F\left(\lambda, k\right)$$ эллиптический интеграл первого рода

$$K\left(k\right) = F\left(\pi/2, k\right)$$ полный эллиптический интеграл первого рода

$F\left(\lambda + 2\pi, k\right) = F\left(\lambda, k\right) + 4K \quad \Rightarrow \quad Q\left(\tau\right)$ периодична с периодом $4K\left(k\right)$

8. Интегрирование уравнений Эйлера (случай 2)

Функция, являющаяся результатом обращения эллиптического интеграла первого рода, называется амплитудой и обозначается $\mathrm{am}(\tau, k)$

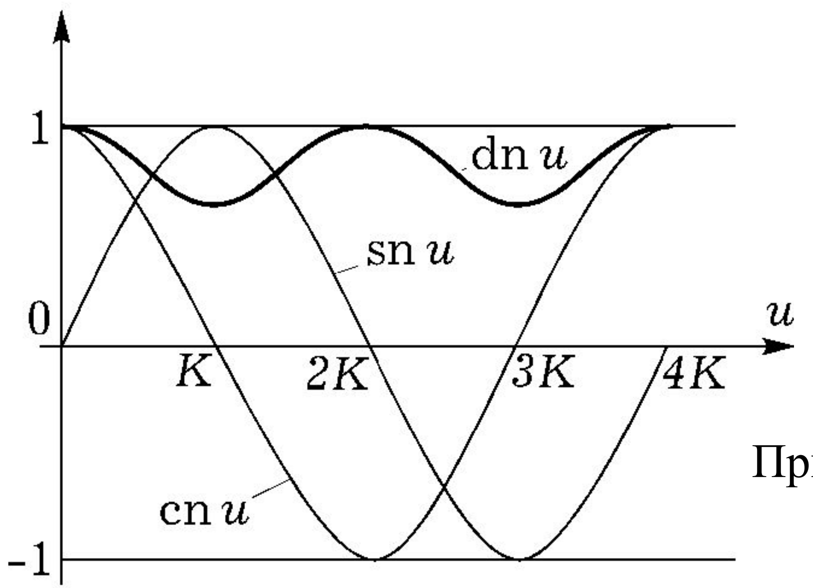
Функции эллиптический синус (sn) и эллиптический косинус (cn) определяются как

$$\mathrm{sn}(\tau, k) = \sin(\mathrm{am}(\tau, k)), \quad \mathrm{cn}(\tau, k) = \cos(\mathrm{am}(\tau, k))$$

они периодичны с периодом 4K

Функция дельта амплитуды (dn) определяется как $\mathrm{dn}(\tau, k) = \sqrt{1 - k^2 \mathrm{sn}^2(\tau, k)}$

Некоторые полезные формулы



$$\mathrm{sn}^2(\tau) + \mathrm{cn}^2(\tau) = 1$$

$$k^2 \mathrm{sn}^2(\tau) + \mathrm{dn}^2(\tau) = 1$$

$$\frac{d}{d\tau}\mathrm{sn}(\tau) = \mathrm{cn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau)$$

$$\frac{d}{d\tau}\mathrm{cn}(\tau) = -\mathrm{sn}(\tau)\,\mathrm{dn}(\tau)$$

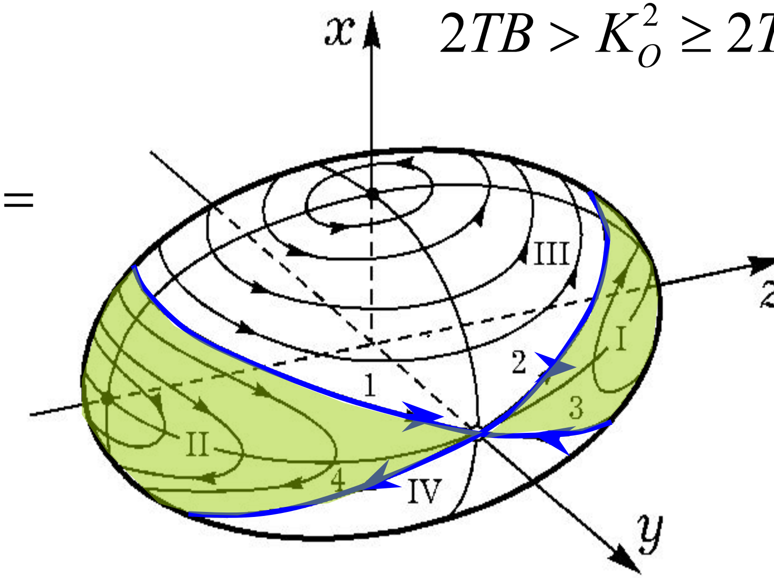
При $k \to 0$ $\quad \mathrm{am}(\tau, k) \to \tau \quad \mathrm{sn}(\tau, k) \to \sin(\tau)$

$\mathrm{dn}(\tau, k) \to 1 \quad \mathrm{cn}(\tau, k) \to \cos(\tau)$

9. Интегрирование уравнений Эйлера (случай 2)

$$\boxed{q = \pm\sqrt{\frac{K_O^2 - 2TC}{B(B-C)}}\,\mathrm{sn}(\tau, k)}$$

$2TB > K_O^2 \geq 2TC$



$$p^2 = \frac{1}{A(C-A)}\left[\left(2TC - K_O^2\right) - B(C-B)q^2\right] = $$

$$= \frac{\left(2TC - K_O^2\right)}{A(C-A)}\underbrace{\left(1 - \mathrm{sn}^2(\tau, k)\right)}_{\mathrm{cn}^2(\tau,k)}$$

$$\boxed{p = \pm\sqrt{\frac{K_O^2 - 2TC}{A(A-C)}}\,\mathrm{cn}(\tau, k)}$$

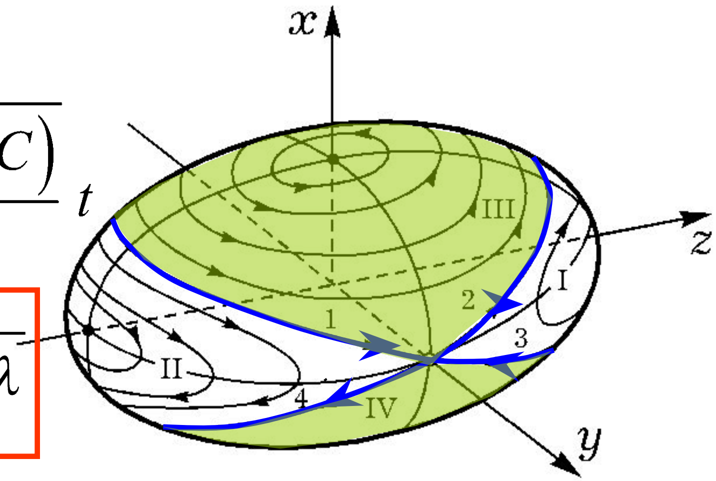
Аналогично $\boxed{r = \sqrt{\frac{2TA - K_O^2}{C(A-C)}}\,\mathrm{dn}(\tau, k)}$

В пределе $K_O^2 = 2TC$ $\quad p = q = 0, \quad r = \pm\omega$ стационарное вращение вокруг оси z

10. Интегрирование уравнений Эйлера в общем виде (случай 3)

Случай 3 $\quad 2TA \geq K_O^2 > 2TB$

$$q = \pm\sqrt{\frac{2TA - K_O^2}{B(A-B)}}\sin\lambda \qquad \tau = \sqrt{\frac{(A-B)\left(K_O^2 - 2TC\right)}{ABC}}\,t$$



$$k^2 = \frac{(B-C)\left(2TA - K_O^2\right)}{(A-B)\left(K_O^2 - 2TC\right)} < 1 \qquad \boxed{\frac{d\lambda}{d\tau} = \sqrt{1 - k^2\sin^2\lambda}}$$

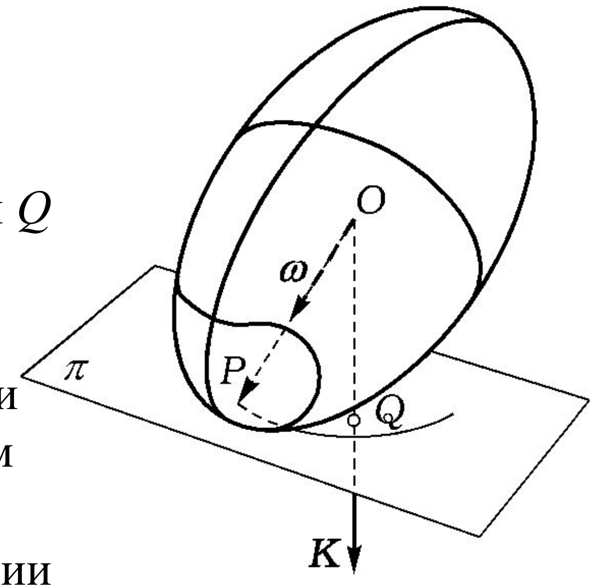
$$\boxed{p = \square\sqrt{\frac{K_O^2 - 2TC}{A(A-C)}}\,\mathrm{dn}(\tau,k), \quad q = \pm\sqrt{\frac{2TA - K_O^2}{B(A-B)}}\,\mathrm{sn}(\tau,k), \quad r = \pm\sqrt{\frac{2TA - K_O^2}{C(A-C)}}\,\mathrm{cn}(\tau,k)}$$

В пределе $\quad K_O^2 = 2TA \qquad r = q = 0, \quad r = \pm\omega$

стационарное вращение вокруг оси x

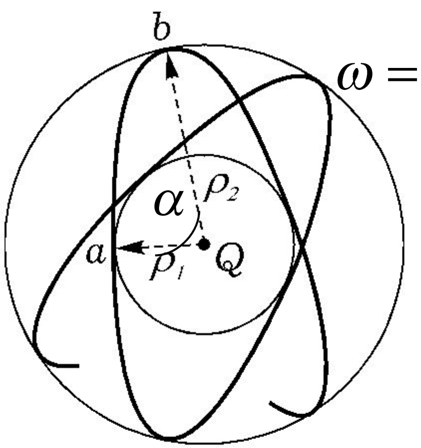
11. О герполодиях

$$QP = \sqrt{OP^2 - OQ^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{2T} - \frac{2T}{K_O^2}}$$



Для стационарных вращений герполодия совпадает с точкой Q

В общем случае $A > B > C$ при $K_O^2 \neq 2TB$



$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ изменяется периодично и достигает минимума и максимума; им отвечают ρ_1, ρ_2

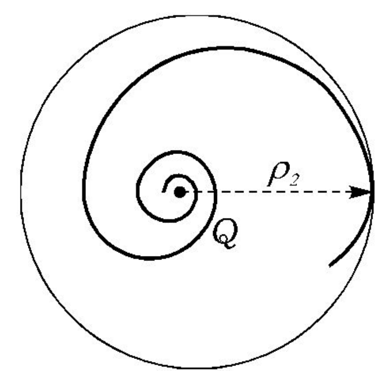
Дуга *ab* отвечает четверти полной полодии

После того как будет описана полная полодия вектор QP повернется н

угол 4α Если α / π-рационально, то герплодия замкнется

В общем случае $A > B > C$ при $K_O^2 = 2TB$

Каждой из полодий 1-4 соответствует герполодия, являющаяся спиралью, навивающейся на точку Q. Эта спираль бесконечно много раз обходит точку Q. Однако ее общая длина конечна, так как она равна длине соответствующей дуги полодии



12. Определение ориентации тела в абсолютном пространстве

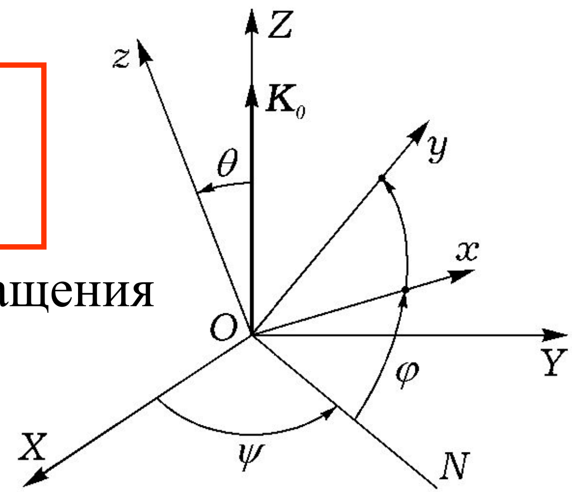
$(1)\, K_{Ox} = Ap = K_O \sin\theta \sin\varphi$

$(2)\, K_{Oy} = Bq = K_O \sin\theta \cos\varphi$

$(3)\, K_{Oz} = Cr = K_O \cos\theta$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{Cr}{K_O}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{Ap}{Bq}}$$

угол нутации   угол вращения



$$\text{КС}\begin{cases} p = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi \\ q = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi \\ r = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi \end{cases}$$

угол прецессии $\dot\psi = \dfrac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\theta}$

Из (1),(2) $\dot\psi = \dfrac{Ap^2 + Bq^2}{K_O \sin^2\theta}$

Из (3) $$\boxed{\dot\psi = K_O \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2}}$$

ДУ для нахождения $\psi(t)$

$p(t), q(t), r(t)$ периодичны с периодом T $\Rightarrow$ $\cos\theta, \cos\varphi$ периодичны с периодом T

$$\psi(t+T) - \psi(t) = K_O \int_0^T \frac{Ap^2(t) + Bq^2(t)}{A^2p^2(t) + B^2q^2(t)} dt = c > 0 \qquad \cos\psi(t+T) \neq \cos\psi(t)$$

Если число $c/2\pi$ не рационально, то твердое тело никогда не возвратится к своей первоначальной ориентации в абсолютном пространстве.