Механика.

- Лектор:
- Парахин А.С., к. ф.-м. наук, доцент.

8. Основы релятивистской механики.

- 8.1. Преобразования Лоренца. Релятивистский закон сложения скоростей.
- Изложенная выше т.н. классическая механика справедлива только для медленных движений, скорость которых на много меньше скорости света. Для движений со скоростями близкими к скорости света нужно использовать релятивистскую механику, основанную не специальной теории относительности, созданной Альбертом Эйнштейном.

Первый постулат СТО.

- Экспериментальной основой СТО является опыт Майкельсона, установивший, что скорость света во всех инерциальных системах отсчёта одна и та же. Это утверждение и носит название первого постулата СТО. Из него сразу же вытекает, что классический закон сложения скоростей не справедлив. Для достаточно больших скоростей он даёт большую ошибку.

Следствие из первого постулата СТО.

- Поскольку закон сложения скоростей вытекает из преобразований Галилея, значит и преобразования Галилея не верны. Необходимо найти новые преобразования, которые бы удовлетворяли первому постулату СТО. Это первое следствие первого постулата.

Относительность одновременности.

- Второе следствие есть относительность одновременности.
- Пусть вагон равномерно движется по рельсам. В его середине вспыхивает лампочка. Вопрос: одновременно ли свет дойдёт до передней и задней стенки вагона?

- Progr D: Progr E: Progr F: Progr G: Progr H:

В разных СО по-разному.

- Ответ состоит в том, что результат зависит от системы отсчёта. В системе отсчёта «вагон» – да, в системе отсчёта «платформа» – нет. Значит, время относительно. В разных системах отсчёта оно течёт по-разному.

Второй постулат СТО.

- Второй постулат СТО называется принципом относительности Эйнштейна, он гласит: «Ни какими физическими экспериментами нельзя установить, движется ли система отсчёта равномерно и прямолинейно или покоится». Это означает, что все системы отсчёта полностью равноправны, нет какой-либо выделенной системы отсчёта.

Преобразования координат. Прямые.

- Для отыскания новых преобразований координат при переходе из одной системы отсчёта (условно неподвижной) в другую будем предполагать, что эти преобразования линейны
- $x' = \alpha(v)x + \beta(v)t$
- $t' = \gamma(v)x + \delta(v)t.$
- Это прямые преобразования.

Преобразования координат. Обратные.

- И обратные преобразования:
- $x = \alpha(-v)x' + \beta(-v)t'$
- $t = \gamma(-v)x' + \delta(-v)t'$

Особенности новых преобразований.

- Поскольку время относительно, как было сказано выше, его так же нужно преобразовывать при переходе из системы в систему. Поэтому наряду с формулами преобразования координат в новых преобразованиях используется и формула преобразования времени.

Изотропность пространства.

- Кроме того параметры преобразований не должна зависеть от направления скорости движения систем (изотропность пространства), так что
- $\alpha(v) = \alpha(-v) = \alpha$
- $\beta(v) = \beta(-v) = \beta$
- $\gamma(v) = \gamma(-v) = \gamma$
- $\delta(v) = \delta(-v) = \delta$

Использование условия $x' = 0$.

- Для отыскания коэффициентов в первую очередь используем тот факт, что подвижная система движется относительно неподвижной со скоростью v, и в начальный момент времени её начало совпадало с началом неподвижной системы координат. Точке подвижной системы отсчёта с координатой $x' = 0$ соответствует начало координат, которое относительно неподвижной системы отсчёта движется со скоростью v и за время t в неподвижной системе отсчёта пройдёт расстояние $x = vt$. Тогда из первого уравнения
- $\alpha vt = -\beta t$ и, значит, $\alpha v = -\beta$

Использование условия $x = 0$

- С другой стороны, точке с координатами $x = 0$ в неподвижной системе координат соответствует точка с координатами $x^{'} = -vt'$ относительно подвижной систем координат. Подставив это в преобразования координат, получим
- $-vt^{'} = -\alpha vt$
- $t^{'} = \delta t \Longrightarrow \delta = \alpha$

Формулы преобразования с учётом найденных соотношений.

- Формулы преобразования приобретают вид:
- $x^{'} = \alpha x - \alpha v t$
- $t' = \gamma x + \alpha t.$

Воспользуемся принципом относительности.

- Воспользуемся теперь принципом относительности о равноправии систем. В данном случае это означает, что обратные преобразования должны выполняться по тем же формулам, что и прямые. Необходимо учесть только тот факт, что подвижная система движется относительно неподвижной в положительном направлении, а неподвижная относительно подвижной в – в обратном. Т.о., для обратных преобразований нужно заменить v на $-v$, в остальном формулы должны остаться прежними.

Формулы с учётом принципа относительности.

- Для использования этого принципа, выразим из формул преобразования координату x. Для этого второе уравнение умножим на v и сложим с первым. В результате получим:
- $x = \frac{1}{\alpha+\gamma v} x' + \frac{v}{\alpha+\gamma v} t'.$
- Сравнивая это с формулами обратных преобразований, необходимо положить
- $\frac{1}{\alpha+\gamma v} = \alpha \ \Longrightarrow \alpha^2 + \alpha\gamma v = 1.$

Воспользуемся первым постулатом СТО.

- Наконец, воспользуемся первым постулатом СТО. Для этого из формул преобразования найдём скорость. Для чего в свою очередь продифференцируем первое и второе уравнения, т.е. найдём дифференциалы $dx^{'}$ и dt':
- $dx^{'} = \alpha dx - \alpha v dt$
- $dt^{'} = \gamma dx + \alpha dt$.

Формула преобразования скоростей.

- Поделим первое уравнение на второе
- $\frac{dx'}{dt'} = \frac{\alpha dx - \alpha v dt}{\gamma dx + \alpha dt}$.
- В правой части поделим числитель и знаменатель на dt
- $\frac{dx'}{dt'} = \frac{\alpha \frac{dx}{dt} - \alpha v}{\gamma \frac{dx}{dt} + \alpha}$.

Закон сложения скоростей.

- Слева, очевидно стоит скорость перемещения материальной точки относительно подвижной системы координат $\frac{dx'}{dt'} = U'_x$. В правой части $\frac{dx}{dt} = U_x$ есть, очевидно, скорость перемещения материальной точки относительно неподвижной системы координат.

Закон сложения скоростей.

- Поэтому
- $U'_x = \frac{\alpha U_x - \alpha v}{\gamma U_x + \alpha}$.
- Это есть по сути дела новый закон сложения скоростей. Его и будем использовать для определения параметров α и γ.

Второе уравнение для искомых параметров.

- Если в неподвижной системе отсчёта скорость перемещения равна скорости света, то и в подвижной системе отсчёта она должна быть равна скорости света. Тогда из закона сложения скоростей следует
- $c = \frac{\alpha c - \alpha v}{\gamma c + \alpha}$.
- Отсюда находим второе уравнение для искомых параметров
- $\gamma c^2 = -\alpha v$.

Формулы преобразования Лоренца.

- Вместе эти два уравнения дают
- $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \ \gamma = -\frac{v}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$
- Теперь можно окончательно записать формулы прямых преобразований координат
- $x^{'} = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ \ t^{'} = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ \ y^{'} = y, \ z^{'} = z,$
- которые называются формулами преобразования Лоренца

Формулы преобразования скоростей.

- Аналогично находим формулы прямых преобразований скоростей, или релятивистский закон сложения скоростей
- $U_x^{'} = \frac{U_x - v}{1 - \frac{U_x v}{c^2}}$
- Для обратных преобразований нужно просто поменять знак у скорости движения системы отсчёта, т.е. v заменить на $-v$.

Обратные преобразования Лоренца.

-
- $x = \frac{x^{'} + vt^{'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ $t = \frac{t^{'} + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ $y = y', \; z = z',$

Закон сложения скоростей для поперечных направлений.

- Из преобразований поперечных координат следует:

- $dy' = dy,\ dz' = dz$ и $dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Для оси y

- Поделив первые два равенства на последнее, получим соотношение для поперечных скоростей:
- $\frac{dy'}{dt'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{dy}{dt - \frac{v}{c^2} dx}$
- Поделим на dt числитель и знаменатель справа от равенства.

Преобразование скорости вдоль оси oy.

-
- $\frac{dy'}{dt'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\frac{dy}{dt}}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}$
- Заменяя производные скоростями, получим:
- $U_y' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{U_y}{1 - \frac{v}{c^2} U_x}$
- Это и есть закон преобразования скорости точки вдоль оси oy

Преобразование скорости вдоль оси oz

- Аналогично находим закон преобразования скорости вдоль оси oz:
- $U_z^{'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{U_z}{1 - \frac{v}{c^2} U_x}$

Обратные преобразования скоростей.

-
- $U_x = \frac{U_x^{'} + v}{1 + \frac{U_x^{'} v}{c^2}}$
- $U_y = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{U_y^{'}}{1 + \frac{v}{c^2} U_x^{'}}$
- $U_z = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{U_z^{'}}{1 + \frac{v}{c^2} U_x^{'}}$

8.2. Относительность временных и пространственных промежутков.

- Из формул преобразования координат вытекает относительность временных и пространственных промежутков.
- Пусть в подвижной системе отсчёта покоится стержень вдоль направления движения системы. Поскольку стержень покоится, его концы также неподвижны, поэтому определить их координаты можно в любой момент времени, не обязательно одновременно левый и правый.

Демонстрация.

- Progr D: Progr E: Progr F: Progr G: Progr H:

Длина стержня в неподвижной системе отсчёта.

- В неподвижной системе координат стержень движется, поэтому для определения его длины нужно одновременно определить координаты его концов. Тогда разность между большей и меньшей координатой и будет длина стержня в системе отсчёта, в которой он движется.

Преобразование координат концов стержня.

- Пусть $x_1^{'}$ и $x_2^{'}$ - координаты концов стержня в подвижной системе отсчёта, а x_1 и x_2 - координаты концов стержня в неподвижной системе отсчёта. При этом$t_1 = t_2 = t$. Воспользуемся формулами преобразования координат
- $x_1^{'} = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, x_2^{'} = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Связь длин стержня в разных СО.

- Вычтем из второго равенства первое
- $x_2^{'} - x_1^{'} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.
- Или
- $l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.
- Здесь l_0 - длина стержня в системе отсчёта, которой он покоится, или собственная его длина, l - длина стержня в системе отсчёта, относительно которой он движется или относительная длина.

Максимальность скорости света.

- Из этой формулы видно, что собственная длина наибольшая из всех возможных длин. Выразим длину стержня в системе отсчёта, в которой он движется
- $l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$
- Отсюда видно, что при стремлении скорости движения к скорости света длина отрезка стремится к нулю, что очевидно не возможно. А для скорости, большей скорости света, длина отрезка становится мнимой. Отсюда следует, что скорость любого материального тела не может быть больше или равна скорости света.

Преобразование моментов времени.

- Предположим теперь, что в подвижной системе отсчёта покоятся часы. Сравним их показания с часами в неподвижной системе отсчёта. Для этого засечём два момента времени начала и конца некоторого процесса по часам в подвижной системе отсчета, происходившего рядом с часами. Поскольку в подвижной системе отсчёта начало и конец процесса происходили в одной точке, то $x_2' = x_1' = x'$. Найдём моменты времени начала и конца процесса в неподвижной системе координат
- $t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Преобразование временных промежутков.

- Снова вычтем из второго первое
- $t_2 - t_1 = \frac{t_2^{'} - t_1^{'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.
- Промежуток времени между событиями, измеренный часами, находящимися в той же точке, где происходило событие, называется собственным промежутком времени и обозначается $\Delta\tau$.

Относительность промежутков времени.

- В нашем случае это промежуток относительно подвижной системы отсчёта. Тогда
- $\Delta t = \dfrac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.
- Отсюда следует, что собственный промежуток времени наименьший среди всех промежутков. Или движущиеся часы идут медленнее покоящихся. И снова отсюда следует, что скорость не может быть больше скорости света.

Экспериментальное подтверждение.

- В верхних слоях атмосферы космические лучи порождают поток вторичных элементарных частиц, среди которых присутствуют мю-мезоны. Энергия их столь велика, что скорость близка к скорости света. В лаборатории такие частицы тоже получают, их скорость не велика. Поэтому время их жизни относительно лабораторной СО можно считать собственным, оно равно примерно две микросекунды.

Замедление времени

- Если бы время жизни космических мю-мезонов было таким же, то длина их пробега была бы примерно 600 м. Поскольку они порождаются на высоте 30 км, то до Земли они долететь бы не могли. Но их уверенно регистрируют на уровне моря. Объясняется это тем, что в системе отсчёта Земля время жизни мю-мезонов увеличивается. Они долетают до Земли.

Укорачивание длины.

- Этот же эксперимент подтверждает и формулу длины движущегося отрезка. В системе отсчёта, связанной с мю-мезоном, Земля движется, и в направлении движения сокращаются отрезки, в том числе и расстояние до Земли уже не 30 км, а 600 м. И хотя собственное время жизни мю-мезона мало, расстояние, которое ему нужно пройти до Земли тоже мало, так что мю-мезон успевает его пройти.

8.3. Релятивистская динамика материальной точки.

- Законы Ньютона не применимы в релятивистском случае. В случае высоких скоростей, поскольку скорость света не достижима, разгонять тело становится всё труднее и труднее, хотя и сила, и масса тела одни и те же. Это означает, что законы Ньютона должны быть преобразованы.

Второй закон Ньютона для СТО.

- Опыт показывает, что уравнение движения (Второй закон Ньютона, записанный через импульс) остаётся справедливым и в релятивистском случае, но импульс в СТО определяется по-другому
- $\vec{p} = \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ и $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$.

Уравнение движения в СТО.

- А уравнение движения будет иметь вид
- $\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\vec{F}.$

Зависимость скорости от времени в СТО.

- В частности, если сила есть постоянная величина. Решение этого уравнения будет иметь вид:
- $$\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \vec{F}t + const.$$
- Если в начальный момент времени скорость была равна нулю, константа будет равна нулю. В этом случае можно найти скорость, как функцию времени
- $$\vec{v} = \frac{\vec{F}t}{m\sqrt{1+\frac{(Ft)^2}{(mc)^2}}}.$$

Скорость света недостижима.

- Отсюда снова видно, что при стремлении времени к бесконечности скорость точки по модулю стремится к скорости света, но ни когда её не достигает. Это снова говорит о том, что скорость материальных тел не может превысить скорости света в вакууме.

Работа постоянной силы в СТО.

- Поскольку по-другому выражается импульс материальной точки, то по-другому будет выражаться и кинетическая энергия материальной точки. Найдём работу постоянной силы, используя релятивистский закон движения
- $A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, d\vec{r}) = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} (d \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \vec{v}).$

Релятивистская энергия.

- Этот интеграл легко берётся по частям, он равен
- $\int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2}(d\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\vec{v}) = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2}\frac{m(\vec{v},d\vec{v})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \left.\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right|_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} = \Delta(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})$

Полная релятивистская энергия.

- Таким образом, в релятивистской механике можно записать
- $$\Delta\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = A.$$
- Однако величина, стоящая в скобках не есть кинетическая энергия по той причине, что при нулевой скорости движения материальной точки она не равна нулю. Эта величина называется полной релятивистской энергией и обозначается E.
- $$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Энергия покоя.

- При $v = 0$
- $E = mc^2$.
- Эта величина называется энергией покоя и имеет чисто релятивистское происхождение. В классической механике такой энергии нет.

Кинетическая энергия м.т.

- Вычтя из полной релятивисткой энергии энергию покоя, получим, очевидно, величину, которая при нулевой скорости становится равной нулю. Её и можно считать кинетической энергией в релятивистской механике.
- $K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2.$

Связь между импульсом и релятивистской энергией.

- Сравнивая равенство выражение для полной релятивистской энергии и импульса, приходим к одному из самых фундаментальных равенств в СТО
- $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$,
- оно устанавливает связь между полной релятивистской энергией и релятивистским импульсом.