ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. ДИНАМИКА

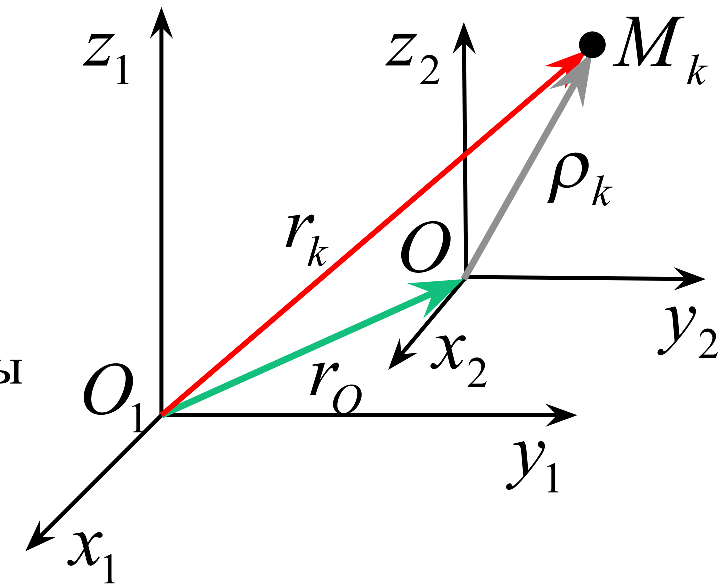
ЦЕЛЬ ЛЕКЦИИ

Ознакомиться с теоремой об изменении кинетической энергии системы.
Научится считать кинетическую энергии и работу для ряда специальных случаев.

ПЛАН ЛЕКЦИИ

- Кинетическая энергия материальной системы и способы её вычисления
- Кинетическая энергия твердого тела
- Закон сохранения полной механической энергии материальной системы
- Пример решения задачи

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ТЕОРЕМА КЕНИГА



Введем подвижную систему координат $O_2x_2y_2z_2$ перемещающуюся поступательно относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$

Пусть M_k одна из точек материальной системы массы m_k

$$\vec{r}_k = \vec{r}_O + \vec{\rho}_k \qquad \vec{v}_k = \vec{v}_O + \vec{v}_{kr}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k^{\,2}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\vec{v}_O + \vec{v}_{kr}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_O^2 + \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_O \cdot \vec{v}_{kr} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_{kr}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} v_O^2 \sum_{k=1}^{n} m_k + \vec{v}_O \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_{kr} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_{kr}^2$$

ТЕОРЕМА КЕНИГА

$$T = \frac{1}{2} v_O^2 \sum_{k=1}^{n} m_k + \vec{v}_O \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_{kr} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k v_{kr}^2$$

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k v_{kr}^2$$ - кинетическая энергия относительного движения

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k$$ - масса системы

$$\vec{v}_{Cr} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_{kr}$$ - скорость центра масс C относительно подвижной системы отсчета $Ox_2y_2z_2$

$$T = \frac{1}{2} M v_O^2 + M \vec{v}_O \cdot \vec{v}_{Cr} + T_r$$

ТЕОРЕМА КЕНИГА

$$T = \frac{1}{2} M v_O^2 + M \vec{v}_O \cdot \vec{v}_{Cr} + T_r$$

Если начало подвижных осей O совпадает с центром масс C системы, то $v_O = v_C, v_{Cr} = 0$

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + T_{Cr}$$

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий поступательного движения системы вместе с центром масс
и движения системы относительно центра масс

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2} \Rightarrow T = \frac{1}{2}\int v^2 dm$$

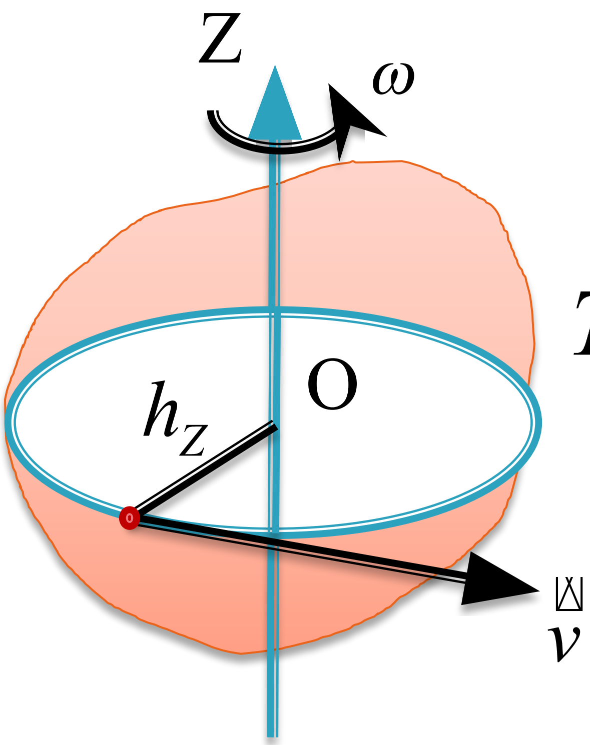
Кинетическая энергия поступательно движущегося тела

Скорости всех точек тела одинаковы и равны v

$$T = \frac{1}{2} v^2 \int dm = \frac{1}{2} M v^2$$

M – масса тела

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ПРИ ВРАЩЕНИИ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

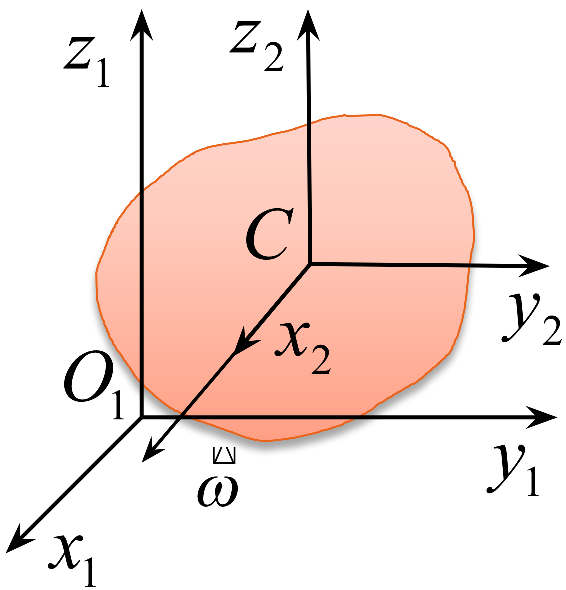


$$v = \omega h_Z$$

$$T = \frac{1}{2}\int v^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int h_Z^2 dm = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

I_z – момент инерции тела относительно оси вращения z

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ДВИЖУЩЕГОСЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНО



Введем поступательно движущуюся систему координат $Cx_2y_2z_2$ с началом в центре масс C тела. По теореме Кёнига

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + T_{Cr}$$

Движение тела относительно подвижной системы координат – вращение с угловой скоростью ω и поэтому

$$T_{Cr} = \frac{1}{2}I_C\omega^2$$

I_C -момент инерции тела относительно оси

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

$$\frac{m_1 v_{1_\text{к}}^2}{2} - \frac{m_1 v_{1_\text{н}}^2}{2} = A_1^e + A_1^i, \ldots, \frac{m_n v_{n_\text{к}}^2}{2} - \frac{m_n v_{n_\text{н}}^2}{2} = A_n^e + A_n^i$$

A_n^e - работа внешних сил системы, действующих на n-ю точку

A_n^i - работа внутренних сил системы, действующих на n-ю точку

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_{k_\text{к}}^2}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_{k_\text{н}}^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i$$

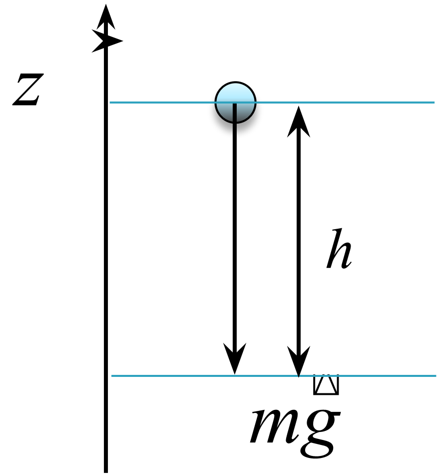
Учтём, что $T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2}$ -кинетическая энергия системы

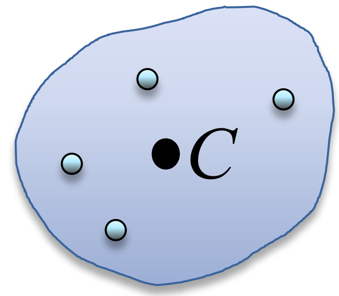
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

$$T - T_0 = A^e + A^i$$

Изменение кинетической энергии системы точек на некотором перемещении равно сумме работ <u>внешних</u> и <u>внутренних</u> сил системы на этом же перемещении

РАБОТА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ



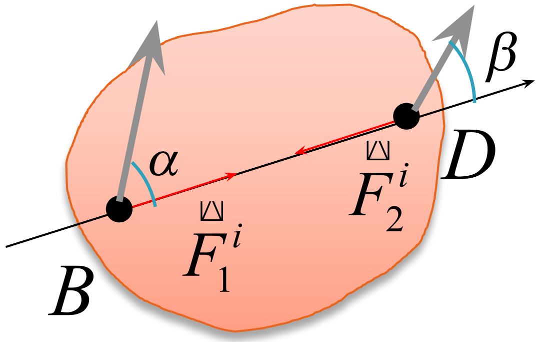


$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_k^e = \pm\sum_{k=1}^{n} m_k g h_k = \pm g\sum_{k=1}^{n} m_k h_k = \pm g M h_C$$

h_C – изменение высоты центра масс системы

Работа сил тяжести равна произведению модуля силы тяжести, действующей на систему, на вертикальное перемещение ее центра тяжести, взятому со знаком плюс или минус

РАБОТА ВНУТРЕННИХ СИЛ ТВЁРДОГО ТЕЛА



$\vec{F}_1^{\,i}$ и $\vec{F}_2^{\,i}$ – внутренние силы взаимодействия точек B и D твердого тела

$$\vec{F}_1^{\,i} = -\vec{F}_2^{\,i}$$

Теорема о проекциях:

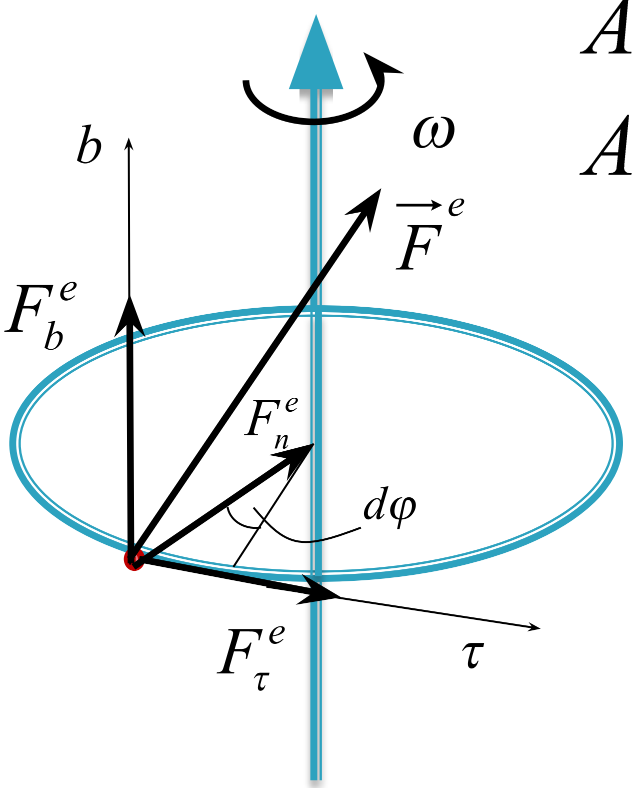
$$v_{B\,x} = v_{D\,x} \qquad v_B \cos\alpha = v_D \cos\beta$$

$$\sum dA^i = \vec{F}_1^{\,i} \cdot d\vec{s}_B + \vec{F}_2^{\,i} \cdot d\vec{s}_D = F_1^i\, ds_B \cos\alpha - F_2^i\, ds_D \cos\beta$$

$$\sum A^i = 0$$

Сумма работ всех внутренних сил абсолютно твердого тела на любом его перемещении равна нулю

РАБОТА ДЛЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ ОСИ



$$A(F_b^e) = 0$$

$$A(F_n^e) = 0$$

$$A(F^e) = A(F_\tau^e)$$

$$\delta A^e = F_\tau{}^e ds$$

$$ds = R d\varphi$$

$$\delta A^e = F_\tau^e ds = F_\tau^e R d\varphi$$

$$M_z(\vec{F}^e) = F_\tau^e R$$

Работа силы на малом перемещении:

$$\delta A^e = M_z(\vec{F}^e) d\varphi$$

РАБОТА ДЛЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ ОСИ

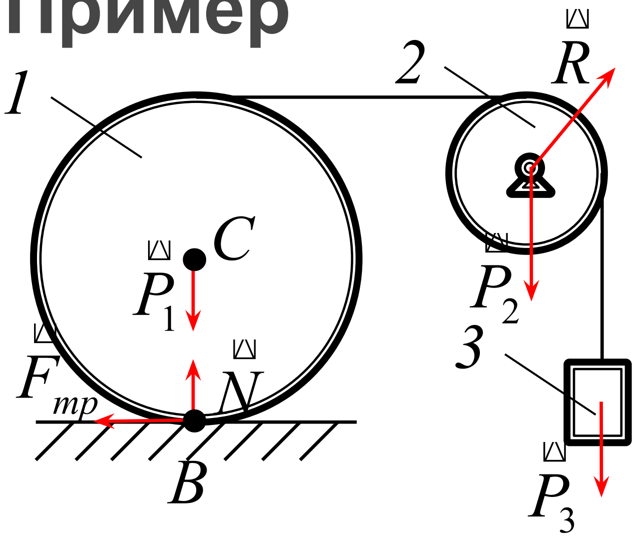
Работа силы на конечном перемещении:

$$A = \int_{S_1}^{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z(F)\,d\varphi$$

$$A = \pm \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left|M_z(F)\right| \left|d\varphi\right|$$

Если $M_z^e = const,$ то $A^e = M_z^e\left(\varphi - \varphi_0\right)$

Пример



Материальная система состоит из трех тел. Груз *3* под действием силы тяжести опускается вниз из состояния покоя. Определить скорость груза *3* при опускании его на высоту h.

Массы тел m_1, m_2, m_3. Тела *1* и *2* считать однородными дисками с радиусами r_1 и r_2.

Решение

Расставим внешние силы, действующие на систему. Внутренние силы учитывать не нужно, так как сумма их работ равна нулю.

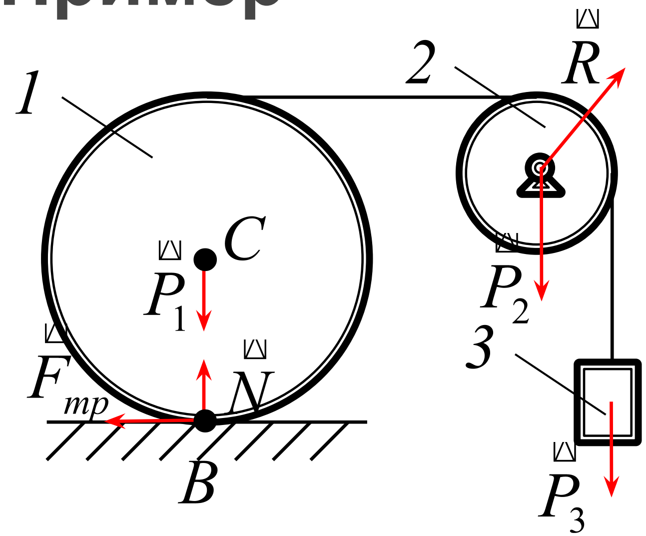
Запишем теорему об изменении кинетической энергии системы

$$T - T_0 = A^e + A^i$$

$T_0 = 0$ так как движение начинается из состояния покоя

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

Пример



Решение

Тело *1* совершает плоское движение

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_{C1} \omega_1^2, \qquad I_{C1} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2$$

Тело *2* вращается относительно неподвижной оси

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2, \quad I_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2$$

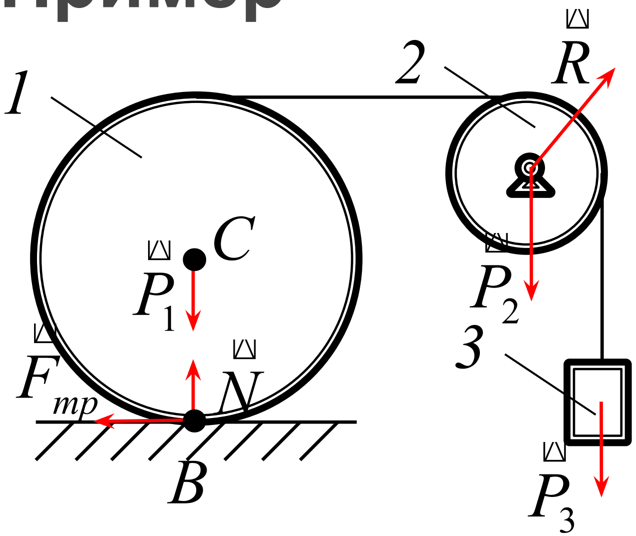
Тело *3* движется поступательно $T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2$

Выразим все скорости через v_3 и запишем суммарную кинетическую энергию

$$\omega_1 = v_3/2r_1, \qquad v_1 = v_C = \omega_1 r_1 = v_3/2, \qquad \omega_2 = v_3/r_2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + m_3\right) v_3^2 = \frac{1}{2} M_{пр} v_3^2, \quad M_{пр} = \frac{3}{8} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + m_3$$

Пример



Решение

Вычислим работы всех сил

Работа сил $\vec{P}_2, \vec{R}$ равна нулю, так как точка их приложения неподвижна

Работа силы $\vec{P}_1$ равна нулю, так как эта сила перпендикулярна к перемещению точки ее приложения *C*

Работа сил $\vec{F}_{тр}, \vec{N}$ равна нулю, так как эти силы приложены в мгновенном центре скоростей *B* катка *1*

Тогда $A^e + A^i = A(\vec{P}_3) = P_3 h = m_3 g h, \quad \frac{1}{2} M_{пр} v_3^2 = m_3 g h$

$$v_3 = \sqrt{2m_3 gh / M_{пр}} = \sqrt{\frac{2m_3 gh}{\frac{3}{8}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + m_3}}$$