# *Практическое занятие №9*

*Дистанционная форма обучения*

*Старший преподаватель кафедры математики НГМУ*
*Константиновская Наталья Валерьевна*

# *Тема. Основы дифференциального и интегрального исчисления при решении прикладных задач*

# 1. Производная функции, основные понятия

**Производной** функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ называется предел отношения приращения функции $\Delta y$ к соответствующему приращению независимой переменной (аргумента) $\Delta x$, когда $\Delta x$ стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция, имеющая производную в каждой точке некоторого промежутка, называется **дифференцируемой** на этом промежутке.

Для производной функции $y = f(x)$ употребляются следующие обозначения

$y'$ («игрек штрих») или

$f'(x)$ («эф штрих от икс») или

$\frac{dy}{dx}$ («дэ игрек по дэ икс»).

Операция нахождения производной называется **дифференцированием функции.**

# Основные формулы дифференцирования

| | |
|---|---|
| $(x^n)' = nx^{n-1}$ | $(\cos x)' = -\sin x$ |
| $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $(a^x)' = a^x \ln a$ | $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $(e^x)' = e^x$ | $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ | $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ |
| $(\sin x)' = \cos x$ | $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |

# Производная сложной функции

Если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, т.е. если $y$ зависит от $x$ через посредство промежуточного аргумента $u$, то $y$ называется сложной функцией от $x$.

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной: $y' = f'(u) \cdot u'(x)$.

**Пример 1.**
*Найти производную функции* $y=(1+5x)^4$.
*Решение.*

Полагая, что $1+5x=u$ и $y=u^4$, применяя правило дифференцирования сложной функции, имеем:

$$y' = 4u^3(1+5x)' = 4(1+5x)^3\cdot 5 = 20(1+5x)^3.$$

**Пример 2.**

*Найти производную функции* $y = \ln\sin^2 2x.$

*Решение.*

$$y' = \left(\ln\sin^2 2x\right)' = \frac{1}{\sin^2 2x}\cdot\left(\sin^2 2x\right)' =$$

$$= \frac{2\sin 2x}{\sin^2 2x}\cdot\left(\sin 2x\right)' = \frac{2\cdot 2\cos 2x}{\sin 2x} = 4ctg\,2x$$

# 2. Первообразная и неопределенный интеграл

**Первообразной** для функции $y = f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x$ из области определения $f(x)$.

**Неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных этой функции.

Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ обозначается $\int f(x)dx$.

Если функция $F(x)$ является одной из первообразных для функции $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ .$$

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется интегрированием этой функции.

В дифференциальном исчислении решается задача: по данной функции $f(x)$ найти ее производную (или дифференциал). Интегральное исчисление решает обратную задачу: найти функцию $F(x)$, зная ее производную (или дифференциал). Искомую функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$.

# Таблица основных неопределённых интегралов

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^{x}dx = \frac{1}{\ln a}a^{x} + C, a > 0, a \neq 1$

4. $\int e^{x}dx = e^{x} + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^{2} x} = tgx + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin^{2} x} = -ctgx + C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^{2} - x^{2}}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

10. $\int \frac{dx}{a^{2} + x^{2}} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

11. $\int \frac{dx}{x^{2} - a^{2}} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2} + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^{2} + a}\right| + C$

# Примеры:

$$\int (\sin x + e^x) dx = -\cos x + e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

# 3. Определенный интеграл, основные понятия

**Определенным интегралом** от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)dx$$

Числа $a$ и $b$ называют пределами интегрирования

( $a$ - верхний предел, $b$ -нижний предел интегрирования), а

отрезок $[a;b]$- называется отрезком интегрирования.

Функцию $f(x)$ – называют подынтегральной функцией.

Для любой функции $y = f(x)$ непрерывной на отрезке $[a;b]$, всегда существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Функция $f(x)$, для которой существует определенный интеграл, называется интегрируемой на отрезке $[a;b]$.

# Формула Ньютона-Лейбница

Формула Ньютона–Лейбница связывает неопределенный и определенный интегралы.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $F(x)$– какая-либо ее первообразная (т.е. $F'(x) = f(x)$), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Эта формула сводит нахождение определенных интегралов к нахождению неопределенных интегралов.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^\pi \sin\, x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$$