

**Кафедра медицинской и биологической физики**

**Тема: Введение. Понятие производной.  
Дифференциал функции. Использование  
дифференциала в приближенных  
вычислениях.**

---

лекция № 1 для студентов 1 курса,  
обучающихся по специальности  
31.05.01 – Лечебное дело

**к.п.н., доцент  
Шилина Наталья Георгиевна  
Красноярск, 2016**

## 2 СЕМЕСТР – 18 НЕДЕЛЬ

---

- ФИЗИКА, МАТЕМАТИКА – ЗАЧЕТ
- ФИЗИКА – РЕЙТИНГ

### **ЧТОБЫ ПОВЫСИТЬ СВОЙ РЕЙТИНГ МОЖНО:**

1. НАПИСАТЬ РЕФЕРАТ
  2. ВЫПОЛНИТЬ НАУЧНУЮ РАБОТУ И СДЕЛАТЬ ДОКЛАД НА КОНФЕРЕНЦИИ
  3. СДЕЛАТЬ СТЕНД, ИЛИ ФИЛЬМ, ИЛИ ПРЕЗЕНТАЦИЮ ПО ЗАДАНИЮ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ
-

# План лекции:

---

- Место и роль математики в современном мире, мировой культуре и истории
  - Понятие производной. Таблица производных от основных функций
  - Правила дифференцирования, производная сложной функции
  - Понятие дифференциала. Частные производные. Полный дифференциал
  - Использование дифференциала в приближенных вычислениях
  - Оценка погрешностей измерений
-

# Понятие производной

---

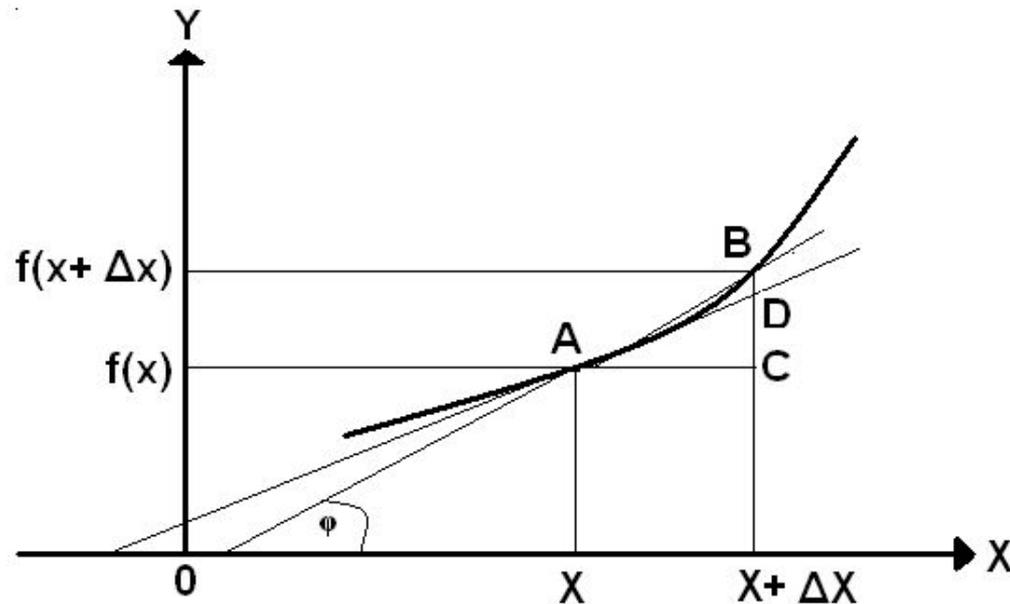
Производной функции  $f(x)$  называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю, т.е.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

---

# Геометрический смысл производной

---



$$y' = \operatorname{tg} \varphi$$

---

# Таблица производных от основных функций

---

Функция	Производная
$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$
$a^x$	$a^x \cdot \ln a$
$e^x$	$e^x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

---

# Правила дифференцирования производная сложной функции

---

$$(U \pm V)' = U' \pm V'$$

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + V' \cdot U$$

$$(C \cdot U)' = C \cdot U' \quad C' = 0$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - V' \cdot U}{V^2}$$

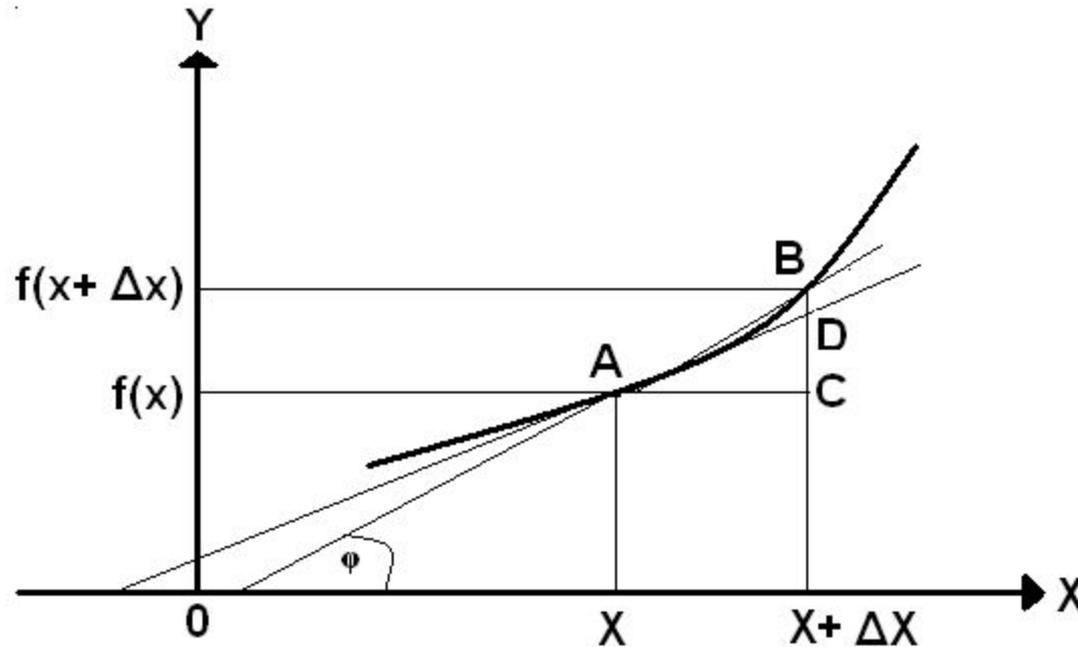
$$y = f[z(x)]$$

$$y' = f'_z \cdot z'_x$$

---

# Понятие дифференциала. Геометрический смысл дифференциала

---



$$dy = y' \cdot dx$$

$$BC = \Delta y$$

$$DC = dy$$

$$\Delta y = dy + \varepsilon$$

Дифференциал функции – это главная линейная часть приращения функции ( $DC$ ). Отличается от приращения на бесконечно малую величину.

---

# Частные производные

---

$$z = f(x, y)$$

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad dz = d_x z + d_y z = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

---

# Использование дифференциала в приближенных вычислениях

---

- Для нахождения приближенного значения приращения функции

$$\Delta y \approx dy = y' dx$$

- Для нахождения приближенного значения функции в заданной точке

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'_x \cdot dx$$

- Для вычисления погрешностей

$$\Delta N_{абс} \approx dN; \Delta N_{отн} \approx \frac{dN_{абс}}{N}$$

---

# Оценка погрешностей измерений

---



Общая черта измерений – **невозможность** получения истинного значения измеряемой величины (всегда есть некоторая ошибка)

---

# Классификация ошибок

---

- **Систематическая погрешность** остается постоянной или закономерно изменяется при повторных измерениях одной и той же величины.
  - **Случайная погрешность** вызывается действием не поддающихся контролю многочисленных, независимых друг от друга факторов.
  - **Промех** - это такая погрешность измерения, которая оказывается значительно больше ожидаемой при данных условиях.
-

# Определение погрешностей при прямых измерениях

- **случайная погрешность много меньше систематической**

отношение абсолютной погрешности  $\Delta x$  к предельному значению  $x_{пр}$  измеряемой величины (т. е. к наибольшему ее значению, которое может быть измерено по шкале прибора):  $E_p = |\Delta x / x_{пр}|$  - относительная погрешность (%).

По приведенной погрешности приборы делятся на семь классов: 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4. Приборы класса точности 0,1; 0,2; 0,5 применяются для точных лабораторных измерений и называются прецизионными. В технике применяют приборы классов 1; 1,5; 2,5 и 4.

Можно определять погрешность как половину цены деления прибора (например, для линейки – 0,5мм; для штангенциркуля – 0,1 мм; для микрометра – 0,01 мм)

# Определение погрешностей при прямых измерениях

- систематическая погрешность много меньше случайной

Порядок нахождения ошибки:

1. Определяется среднее арифметическое ряда  $n$  одинаковых измерений (в теории вероятности и теории ошибок доказывается, что оно является наиболее вероятным значением измеряемой величины) 
$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$
2. Вычисляется случайная абсолютная погрешность каждого (или единичного) измерения  $\Delta x_{K_i} = x_i - \bar{X}$
3. Находятся квадраты погрешностей каждого измерения и их сумма  $(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2$
4. Вычисляется средняя квадратическая погрешность среднего значения:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n(n-1)}}$$

---

Результаты измерений записываются в виде:  $x = \bar{x} \pm \Delta x$   
где  $\Delta x = t_{df,P} S_{\bar{x}}$ .  $P = 0,95$  – доверительная вероятность,  
 $t_{df,P}$  – критерий Стьюдента.

**ВАЖНО** - если в процессе измерений, вы получили результат, отличающийся от среднего на величину большую тройной ошибки, то такое измерение может быть отброшено, как заведомо **неверное**.

**ПОЛНАЯ ОШИБКА** –  $\sigma_{\text{полн}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \frac{\delta^2}{3}}$   
где  $\delta$  – погрешность прибора (или инструментальная погрешность),  
 $\sigma_{\bar{x}}^2$  – средняя квадратичная погрешность.

---

# Заключение

---

Нами рассмотрены:

- понятия производной и дифференциала, а также показаны на примерах способы их решения;
  - виды погрешностей и способы их вычисления.
-

# Тест-контроль

---

Геометрический смысл производной:

1. главная линейная часть приращения функции
  2. приращение функции
  3. тангенс угла наклона касательной к функции
  4. тангенс угла наклона секущей к функции
-

# РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

---

## **Обязательная:**

1. Павлушков И.В. Основы высшей математики и математической статистики: учебник для мед.вузов.- М.: ГЭОТАР-Медиа, 2007.-

## **Дополнительная:**

1. Математика в примерах и задачах: учебное пособие /Л.Н.Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В.Никонова и др.- М.: ИНФРА-М, 2010.-
2. Шаповалов К.А. Основы высшей математики: учебное пособие. - Красноярск: Печатные технологии, 2004
3. Математика: метод. указания к внеаудит. работе для студ. по спец. – педиатрия /сост. Л.А.Шапиро и др.- Красноярск: тип.КрасГМУ, 2009.-

## **Электронные ресурсы:**

1. ЭБС КрасГМУ
  2. Ресурсы интернет
-



Красноярский  
Государственный  
Медицинский  
Университет  
им. проф.  
В.Ф.Войно-Ясенецкого



**БЛАГОДАРЮ  
ЗА ВНИМАНИЕ**