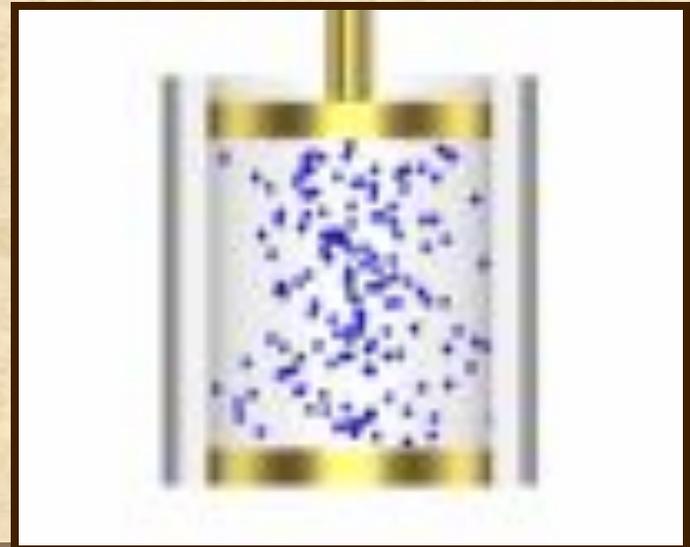
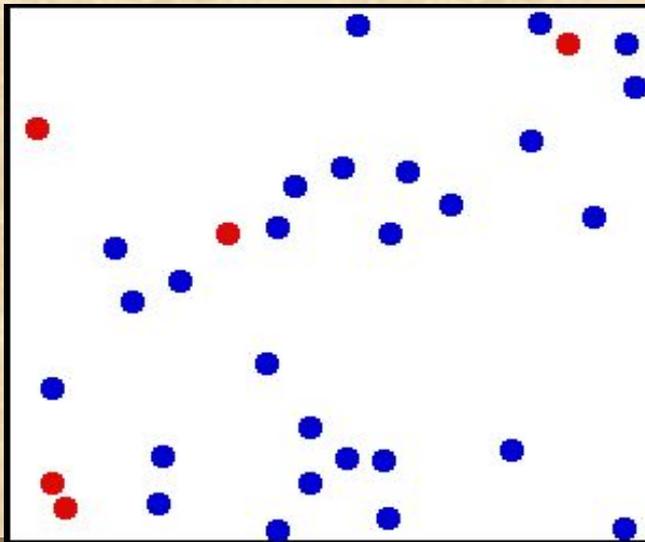


# Термодинамика и статистическая физика



# Лекция № 4

## Статистический метод описания.

1. Основная задача статистической физики.  
Микросостояние системы частиц.
2. Элементарные сведения из теории вероятностей.
3. Функция распределения. Среднее значение. Дисперсия

## Закон распределения Максвелла.

1. Пространство скоростей. Принцип детального равновесия.
2. Распределение молекул газа по скоростям в условиях термодинамического равновесия.
3. Закон распределения скоростей Максвелла.  
Характерные скорости молекул.

Состояние системы детально охарактеризованное на уровне каждой частицы называется микросостоянием.

Микросостояния системы описываются заданием в каждый момент времени координат и скоростей всех молекул, атомов, а также электронов, атомных ядер и прочих частиц, из которых построены тела системы.

Состояние системы описанное с помощью макроскопических параметров, характеризующих систему в целом ( $P, V, T, n, m$ ) называется макросостоянием.

Детальное описание состояний макроскопических систем, ввиду колоссальности числа частиц в них, не только невозможно осуществить фактически, но оно не представляет никакого интереса. В термодинамике имеют смысл средние значения, которые принимают при определённых условиях какие-то функции микросостояния системы. Про величины такого рода говорят, что они имеют статистический характер или являются статистическими. Например, давление, плотность, температура, средний квадрат смещения частицы.

**Основная задача статистической физики:** найти наиболее вероятные распределения молекул по скоростям, энергиям, импульсам и т.д. И средние значения соответствующих параметров.

# Элементарные сведения из теории вероятностей.

С точки зрения атомно-молекулярного строения вещества величины, встречающиеся в макроскопической физике, имеют смысл средних значений, которые принимают некоторые функции от микроскопических переменных системы.

Величины такого рода называются статистическими. Примерами таких величин являются давление, температура, плотность и др.

## Статистические закономерности

изучаются теорией вероятностей.

---

Событиями или случаями в теории вероятностей называют всякие явления, относительно которых имеет смысл ставить вопрос, могут они происходить или нет. **Опыт** в теории вероятностей называется **испытанием**. Если при данных условиях событие **обязательно произойдёт**, то оно называется **достоверным событием**.

Если **событие произойти не может**, то его называют **невозможным**.

---

**Событие** называют **случайным**, если в результате испытания оно **может как произойти, так и не произойти**.

Например, при игре в орлянку, может выпасть **либо орёл, либо решка**. Это-случайное событие. Но бросая много раз монету приблизительно в половине случаев будет герб. В этом случае **вероятность** выпадения герба равна  $\frac{1}{2}$ .

Математическое определение вероятности: вероятность *какого-либо события – это предел, к которому стремится отношение числа случаев, приводящих к осуществлению события, к общему числу случаев, при бесконечном увеличении последних:*

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n'}{n}$$

Здесь  $n'$  – число раз, когда событие произошло, а  $n$  – общее число опытов.

Отсюда следует, что  $P$  может принимать значения от нуля до единицы.

По определению Лапласа,  
вероятность - отношение  
числа благоприятных случаев к  
числу возможных случаев.

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n'}{n}$$

Если событие достоверно, то  $P = 1$ . Если событие не может произойти вообще, то  $P = 0$ .

**События несовместимы**, если появление **одного** из них **исключает появление любого из остальных**.

---

**Теорема сложения вероятностей.**

**Вероятность суммы несовместных** событий равна **сумме вероятностей этих событий**

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Событие, состоящее в появлении либо события  $A$ , либо события  $B$ . Например, в ящике красные, зелёные и белые шары.

Вероятность вынуть цветной шар:

$$P_{\text{цветн}} = P_{\text{красн}} + P_{\text{зелён}}$$

**Сумма вероятностей** всех единственно  
ВОЗМОЖНЫХ И НЕСОВМЕСТИМЫХ СОБЫТИЙ  
**равна единице:**

$P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$  - это утверждение является следствием теоремы сложения вероятностей. Т.к. события единственно ВОЗМОЖНЫ, то появление одного из них (безразлично какого) есть событие достоверное. Вероятность такого события равна единице. Но по теореме о сложении вероятностей вероятность этого события может быть представлена суммой  $P_1 + P_2 + \dots + P_n$

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$$

Это соотношение часто называют

условием нормировки вероятностей.

Теорема умножения вероятностей.

Вероятность произведения двух событий

A и B равна произведению вероятности одного из них  $P(A)$  на вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие произошло  $P(B/A)$  – это **условная вероятность** события  $B$ , при условии, что событие  $A$  произошло.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B / A)$$

Если события  $A$  и  $B$  **независимы** (их вероятности не зависят от того, произошло второе событие или нет), то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

вероятность произведения 2-х независимых событий равна произведению их вероятностей. Например, есть три шара: **красный**, **зелёный** и белый. Какова вероятность того, что при последовательном вынимании 2-х шаров они окажутся **зелёным** и **красным**? Если вынуть один шар, то вероятность, что он окажется

либо **зелёным**, либо **красным** (событие  $A$ ),  
равна по теореме сложения вероятностей:

$$P(A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Если событие  $A$  произошло, то осталось  
два шара один из которых будет либо **зе-  
лёный**, либо **красный**. **Вероятность** вы-  
нуть такой шар (событие  $B$ ) равна:

$P(B / A) = 1 / 2$ . **Искомая вероятность**

по теореме умножения равна:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B / A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Существует **ещё одна интерпретация вероятности**, применяющаяся в физике.

Пусть в закрытом сосуде имеется одна молекула. Сталкиваясь со стенками, молекула беспорядочно отражается от них и побывает в различных местах сосуда. Если наблюдать за молекулой в течение длительного времени  $T$  и при этом часть времени  $t$  она провела в объёме  $V$ . Отношение  $t/T$  называется относительным временем пребывания молекулы в объёме  $V$ . Предел этого отношения

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{t}{T}$$

- **вероятность нахождения молекулы в объёме  $V$ .**

Важным понятием в теории вероятностей и её приложениях является понятие **среднего значения**. Пусть произведено  $N$  однотипных измерений одной и той же величины  $x$  при неизменных условиях. Пусть в  $n_1$  случаях измеренное значение величины  $x$  оказалось равным  $x_1$ , в  $n_2$  случаях —  $x_2, \dots$ , в  $n_m$  случаях —  $x_m$ , ( $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_m = N$ ).

**Среднее значение** измеряемой величины определяется выражением:

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_m x_m}{N} = \sum_{i=1}^m \frac{n_i x_i}{N}$$

Отношение  $\frac{n_1}{N}$ , т.е. отношение числа наблюдений при которых величина  $x$  имеет значение  $x_1$ , к общему числу наблюдений  $N$ , есть вероятность появления при измерениях значений  $x_1$ , т.е.  $\frac{n_1}{N} = P_1$  (подразумевается,

что  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_1}{N} = P_1$  - вероятность события) и

т.д. для упрощения вместо  $\lim$  пишут

$\frac{n_2}{N} = P_2$  и получаем **среднее значение**:

$$\bar{x} = \langle x \rangle = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + \dots + P_m \cdot x_m = \sum_{i=1}^m P_i \cdot x_i$$

Введём понятие **отклонения** результатов отдельных измерений **от среднего значения**  $\langle x \rangle$ , т.е.  $\sigma x_i = x_i - \langle x \rangle$ , где  $i = 1, 2, \dots, N$

**Дисперсия** есть среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  случайной величины от их среднего значения:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

**Среднее квадратичное отклонение:**

$$\Delta x_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \approx \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Распространим полученные результаты на случай когда характеризующая систему величина  $x$  может принимать непрерывный ряд значений от  $0$  до  $\infty$ . В этом случае говорят, что величина  $x$  имеет сплошной (или непрерывный) спектр значений (в предыдущем случае спектр значений был дискретным).

Возьмём очень малую величину  $a$  ( скажем,  $a = 10^{-10}$  ) и получим  $\Delta n_0$  измерений, при которых  $0 < x < a$ ,  $\Delta n_1$ , при которых  $a < x < 2a$ , ...,  $\Delta n_x$ , при которых результат измерений находится в интервале от  $x$  до  $x + a$  и т.д.

**Вероятность** того, что результат измерений окажется в интервале от нуля до  $a$ , равна:

$$\Delta P_0 = \frac{\Delta n_0}{N},$$

в интервале от  $a$  до  $2a$ :  $\Delta P_1 = \frac{\Delta n_1}{N}, \dots,$

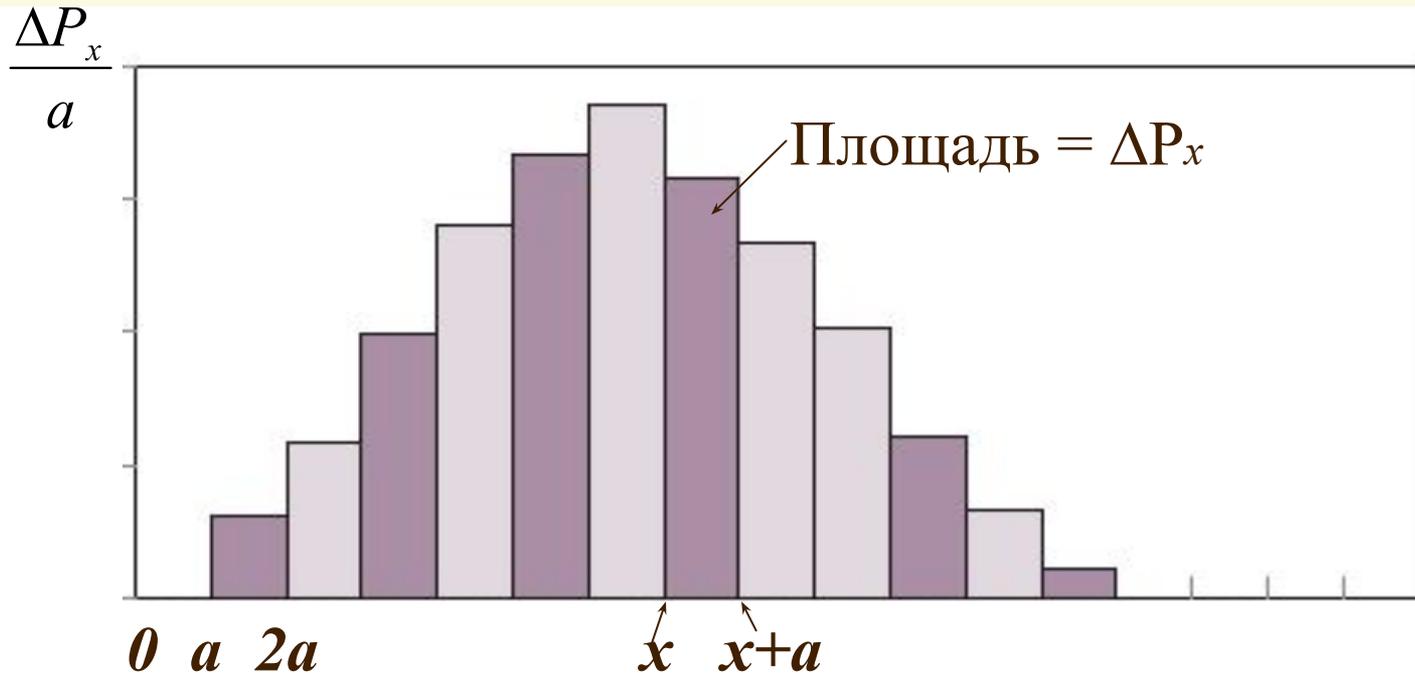
в интервале от  $x$  до  $x + a$ :

$$\Delta P_x = \frac{\Delta n_x}{N}.$$

Начертим ось  $x$  и отложим вверх от неё полоски шириной  $a$  и высотой  $\frac{\Delta P_x}{a}$ .

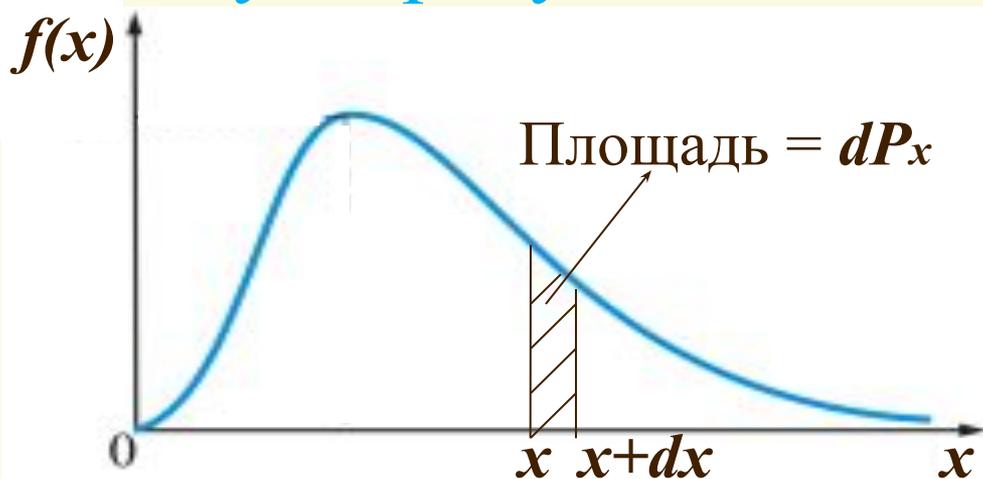
Получим **столбчатую диаграмму**,  $a$   
которая называется **гистограмма**.

# Столбчатая диаграмма ИЛИ гистограмма.



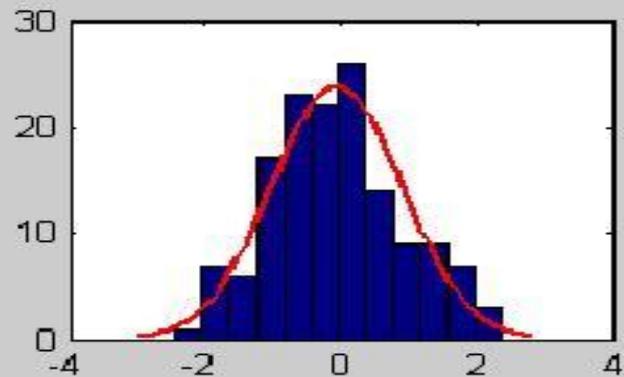
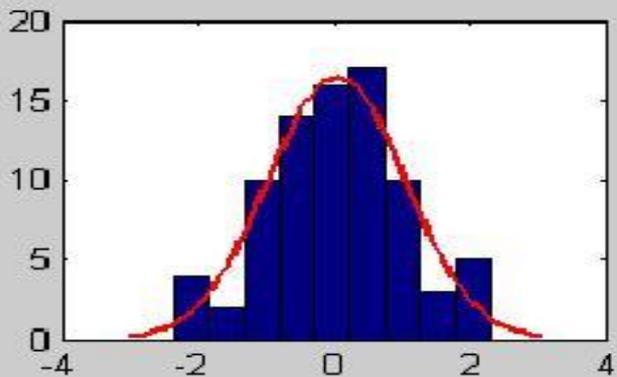
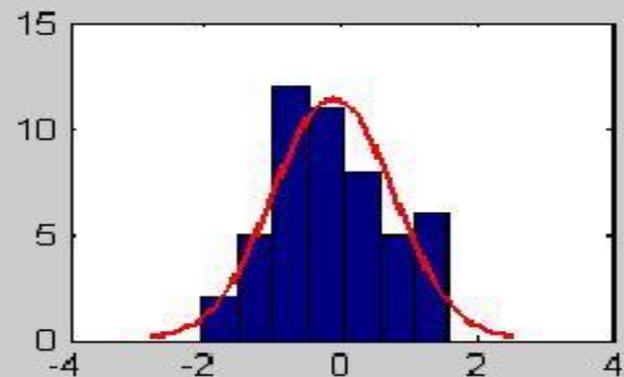
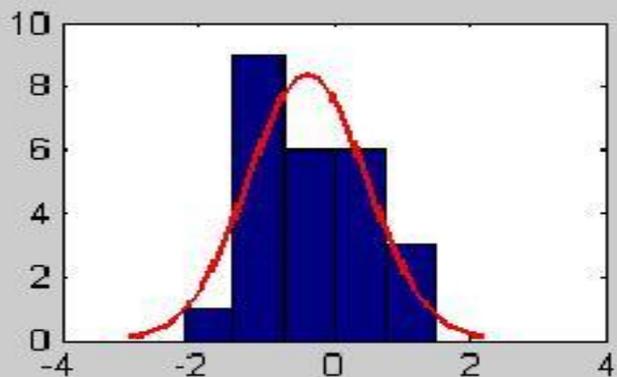
Площадь полоски, левый край которой имеет координату  $x$ , равна  $\Delta P_x$ , а площадь всей гистограммы – единице.  $\sum_{i=1}^m P_i = 1$

Гистограмма (столбчатая диаграмма) наглядно характеризует **вероятность** получения результатов измерений, заключающихся в **различных интервалах одинаковой ширины  $a$** . Чем **меньше ширина** интервала  $a$ , тем детальнее будет охарактеризовано распределение вероятностей значений величины  $x$ . В пределе при  $a \rightarrow 0$  ступенчатая линия превратится в **гладкую кривую**.



Функция  $f(x)$  называется **функцией распределения вероятностей**

# ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



В пределе вместо ступенек будет гладкая кривая, которая называется функцией распределения вероятностей.

Площадь столбика ширины  $dx$  равна вероятности того, что результат измерения окажется в пределах от  $x$  до  $x+dx$ . Обозначив эту вероятность через  $dP_x$ , получим:

$$dP_x = f(x) \cdot dx$$

Индекс “ $x$ ” при  $dP$  указывают на то, что имеется в виду вероятность для интервала, левый край которого лежит в точке с координатой  $x$ . **Площадь**, ограниченная кривой распределения, так же как и площадь гистограммы, **равна единице**. Это означает:

$$\int f(x)dx = \int dP_x = 1 - \underline{\text{условие нормировки}}$$

Зная функцию распределения  $f(x)$ , можно найти среднее значение результатов измерения величины  $x$ . В  $dN_x = N \cdot dP_x$  случаях получается результат, равный  $x$ . Сумма таких результатов определяется выражением:

$x \cdot dN_x = x \cdot N \cdot dP_x$ . Сумма всех возможных результатов равна:

$$\int x \cdot dN_x = \int x \cdot N \cdot dP_x$$

Разделив это на число измерений  $N$ , получим **среднее значение величины  $x$** .

$$\langle x \rangle = \int x \cdot dP_x = \int f(x) \cdot x \cdot dx$$

Аналогичные рассуждения дают, что **среднее значение некоторой функции  $\varphi(x)$**

МОЖНО ВЫЧИСЛИТЬ по формуле:

$$\langle \varphi(x) \rangle = \int \varphi(x) \cdot f(x) \cdot dx$$

Например:

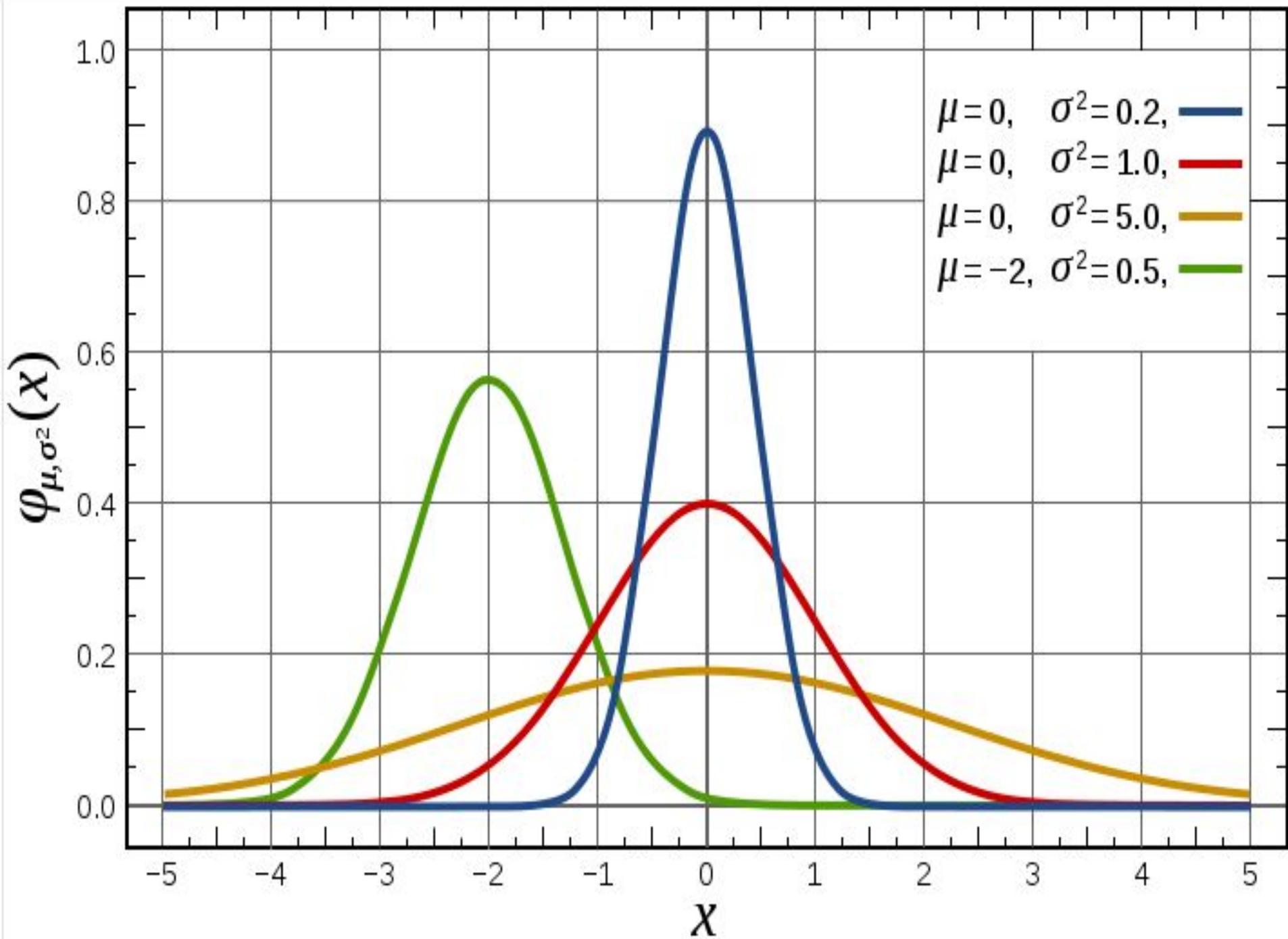
$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 \cdot f(x) \cdot dx$$

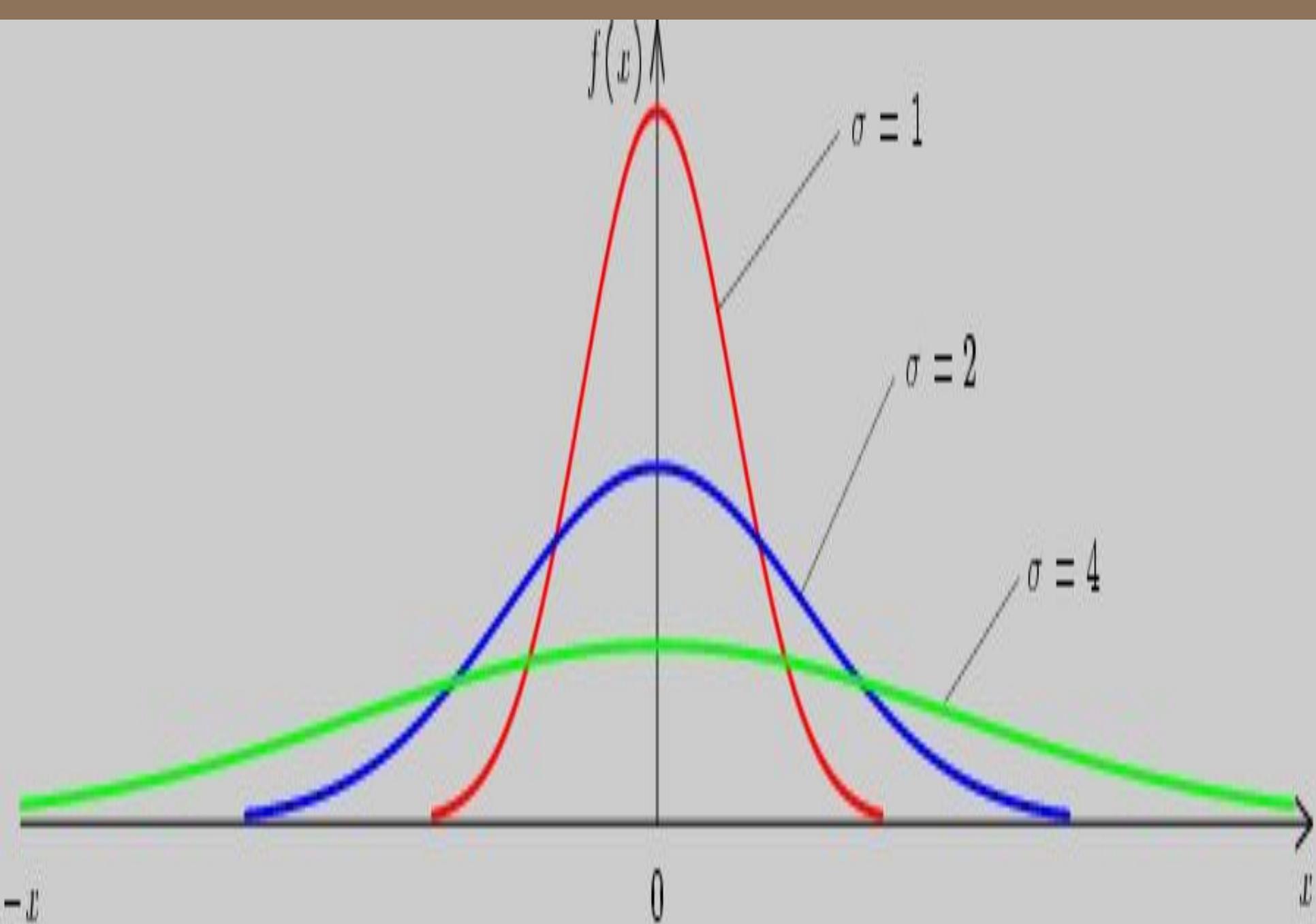
# Закон распределения Гаусса.

Нормальное распределение, также называемое гауссовским распределением или распределением Гаусса — распределение вероятностей, которое задается функцией плотности распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

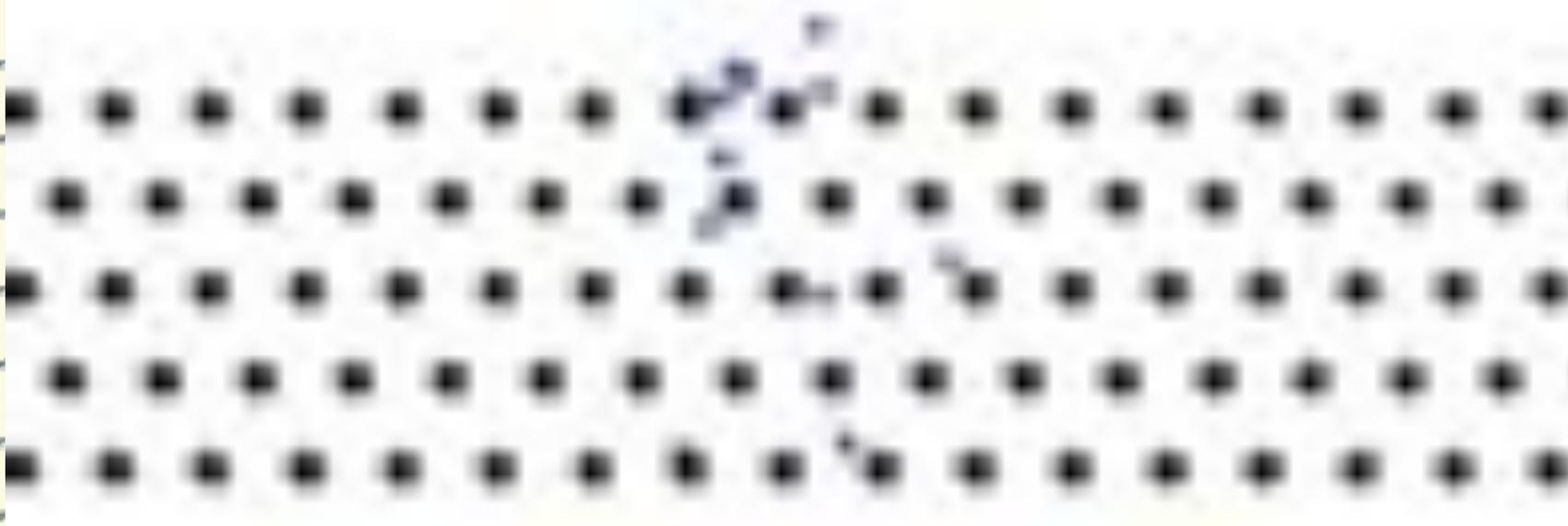
где параметр  $\mu$  — среднее значение (математическое ожидание) случайной величины и указывает координату максимума кривой плотности распределения, а  $\sigma^2$  — дисперсия.







**Гаусс (Gauss) Карл  
Фридрих (30.4.1777,  
Брауншвейг, -  
23.2.1855, Гёттинген),  
немецкий математик,  
внёсший  
фундаментальный  
вклад также в  
астрономию и  
геодезию.**



VTS\_31\_1.VOB

# Закон распределения скоростей молекул при тепловом равновесии

Возьмём **газ**, состоящий из очень большого числа  $N$  тождественных молекул, находящихся **в состоянии беспорядочного теплового движения при определённой температуре  $T$**  ( т.е. в условиях термодинамического равновесия ).

Предполагается, что силовые поля, действующие на газ, отсутствуют.

В газе в состоянии **хаотического движения должны компенсировать**

друг друга всякие два противоположно направленные процесса. Скорости

таких противоположно направленных процессов должны быть одинаковыми.

Это положение называется принципом детального равновесия. Если бы оно не

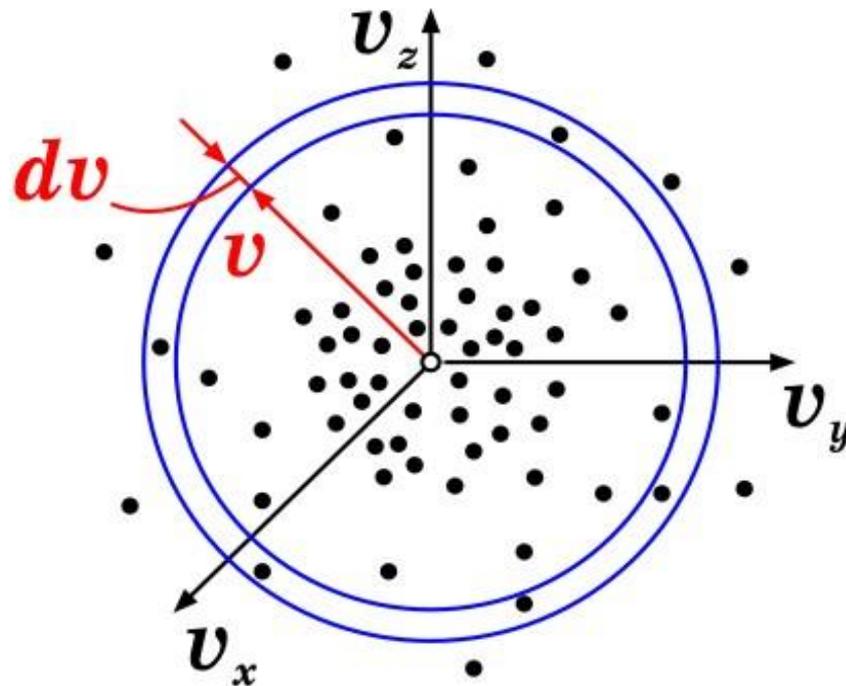
выполнялось, то тепловое движение молекул в какой-то мере устранило бы беспорядочный характер и приобрело бы черты, свойственные упорядоченному.

Принцип детального равновесия справедлив для любых систем в состоянии хаоса.

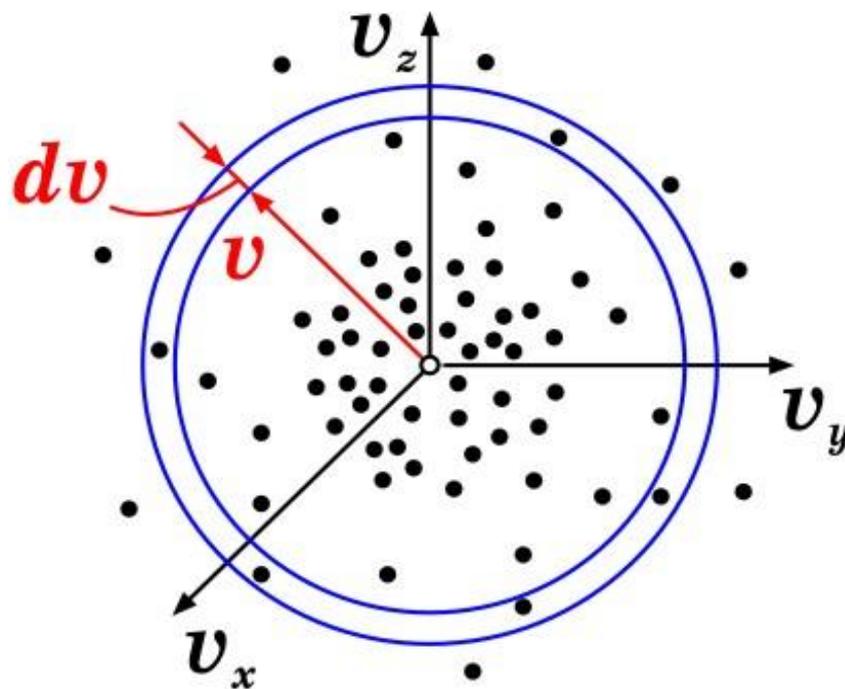
# Закон распределения скоростей Максвелла.

Возьмём в воображаемом пространстве, которое назовём  $v$  – **пространством** (пространством скоростей), прямоугольные координатные оси, по которым будем откладывать значения  $U_x, U_y, U_z$  отдельных молекул (имеются в виду **компоненты скорости по осям  $x, y, z$ , взятым в обычном пространстве**).

Скорости каждой молекулы будет соответствовать точка в этом пространстве. Из-за столкновений положение точек будет непрерывно меняться, но их плотность в каждом месте будет оставаться неизменной (т.к. у нас равновесное состояние газа).



Вследствие **равноправности всех направлений движения** расположение точек относительно начала координат будет **сферически симметричным**. **Плотность** точек в  $v$  – пространстве будет **зависеть только от модуля скорости  $v$**  (или от  $v^2$ ).



Молекулы движутся **хаотически**. Среди них есть и очень **быстрые**, и очень **медленные**. Благодаря беспорядочному движению и случайному характеру их взаимных столкновений, молекулы определённым образом распределяются по скоростям. Это распределение оказывается **однозначным и единственно возможным**, и не только не противоречит хаотическому движению, но именно им и обусловлено.

Мы будем искать **число частиц** ( $\Delta n$ ) **скорости** которых лежат в определённом **интервале значения скорости**  $\Delta v$  ( т.е. от  $v$  до  $v + \Delta v$  ).

Здесь  $\Delta n$  – **число благоприятных частиц**, попавших в этот **интервал**.

Очевидно, что в единице объёма **число таких благоприятных частиц** **тем больше, чем больше  $\Delta v$** .

Ясно так же, что  $\Delta n$  должно быть пропорционально концентрации молекул  $n$ . Число  $\Delta n$  зависит и от самой скорости, так как в одинаковых по величине интервалах, но при разных абсолютных значениях скорости, число молекул будет различным.

Смысл сказанного легко понять из простого примера: *неодинаково, число людей в возрасте от 20 до 21 года и от 90 до 91 года.*

И так: 
$$\Delta n = f(v)n\Delta v$$

$$\Delta n = f(v)n\Delta v$$

Здесь  $f(v)$  – **функция распределения молекул по скоростям**,  $n$  – концентрация

молекул и  $\Delta v$  - интервал значений скоростей.

В пределе, получим:  $dn = f(v)n dv$

**Физический смысл  $f(v)$  в том, что это отношение числа молекул, скорости которых лежат в определенном интервале скоростей, к общему числу молекул в единичном интервале скоростей:**

$$f(v) = \frac{dn}{n}$$

Таким образом,  $f(v)$  – имеет  
смысл вероятности, то есть

---

показывает, какова **вероятность**  
любой молекулы газа в единице  
объёма иметь скорость, заключён-  
ную в единичном интервале, вклю-  
чающем заданную скорость  $v$ .

В данном случае  $f(v)$  называют  
плотностью вероятности.

# Функция распределения Максвелла

Пусть имеется  $n$  тождественных молекул, находящихся в состоянии беспорядочного теплового движения при определенной температуре. После каждого акта столкновения между молекулами, их скорости меняются случайным образом.

В результате невообразимо большого числа столкновений устанавливается стационарное равновесное состояние, когда число молекул в заданном интервале скоростей сохраняется постоянным.

В результате каждого **СТОЛКНО-**  
**ВЕНИЯ** проекции скорости молекулы  
испытывают **случайное изменение**  
на  $\Delta v_x$ ,  $\Delta v_y$ ,  $\Delta v_z$ , причем изменения  
каждой проекции скорости незави-  
симы друг от друга.

Найдем в этих условиях, каково  
**число частиц**  $dn$  из общего числа  $n$   
имеет **скорость в интервале**  
от  $v$  до  $v + dv$ .

При этом, мы не можем ничего определенного сказать о **точном значении скорости** той или иной частицы  $v_i$ , поскольку за столкновениями и движениями каждой из молекул **невозможно** проследить ни в опыте, ни в теории. Такая детальная информация вряд ли имела бы практическую ценность.

*Распределение молекул идеального газа по скоростям впервые было получено знаменитым английским ученым Дж. Максвеллом в 1860 году с помощью методов теории вероятностей.*



# Максвелл Джеймс Клерк

(1831 – 1879) –

английский физик.

Работы посвящены

электродинамике,

молекулярной физике,

общей статике, оптике,

механике, теории упрукос-

ти. Установил статистический закон,

описывающий распределение молекул

газа по скоростям.

**Скорость** – векторная величина.

Для **проекции скорости на ось  $x$**  ( $x$ -ой составляющей скорости), имеем:

$$dn_x = f(v_x) n dv_x,$$
$$f(v_x) = \frac{dn_x}{n \cdot dv_x} = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}},$$

ИЛИ

$$f(v_x) = \frac{dn_x}{n \cdot dv_x} = A_1 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}},$$

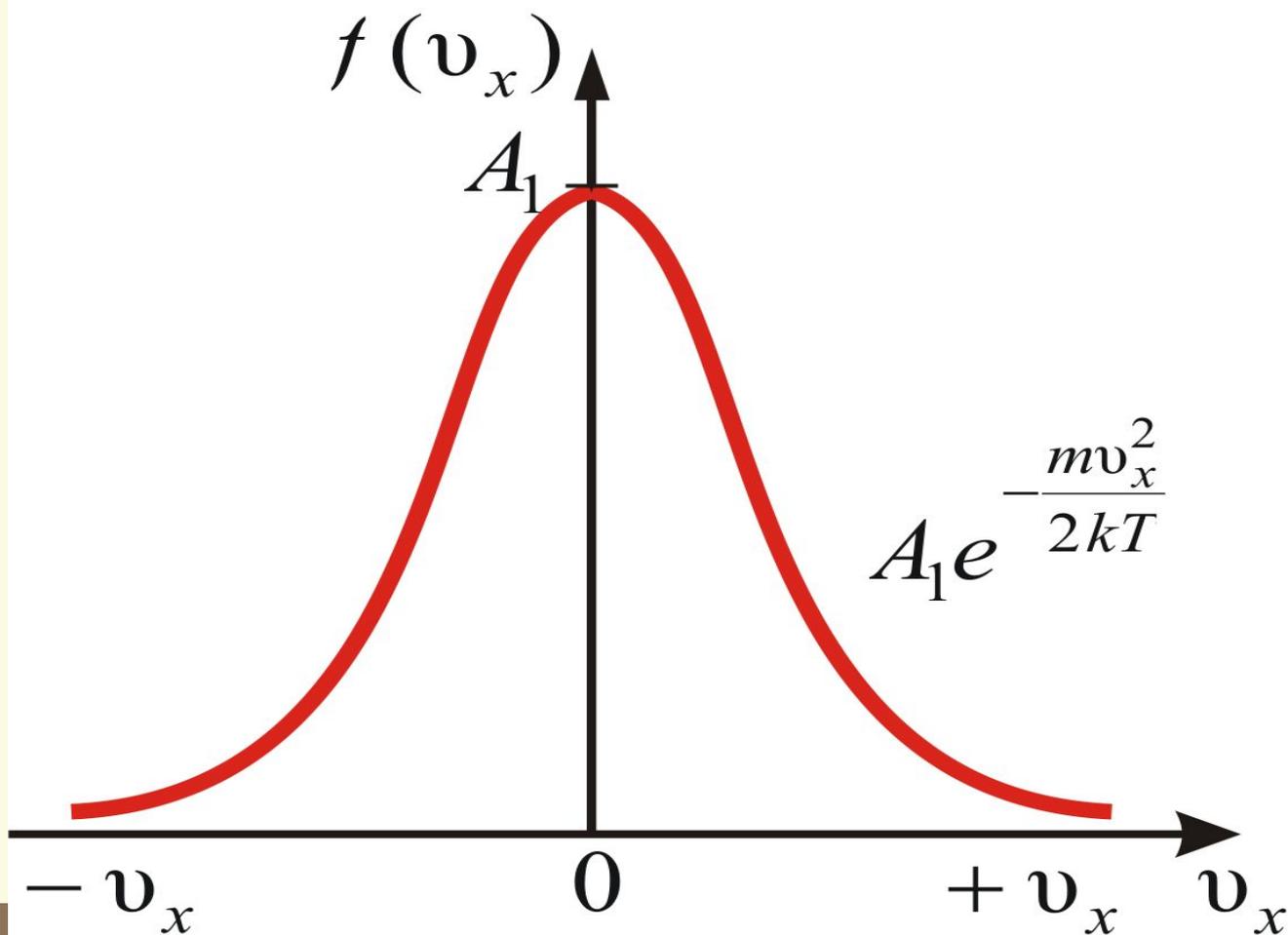
где  $A_1$  из условия нормировки.

Видно, что доля молекул со скоростью

$v_x$  не равна нулю.

При  $v_x = 0$ ,  $f(v_x) = A_1$

(в этом физический смысл постоянной  $A_1$ ).



Приведённое выражение и график справедливы для *распределения молекул газа по x-ым компонентам скорости*. Очевидно, что и *по y-ым и z-ым компонентам скорости также можно получить:*

$$f(v_y) = \frac{dn_y}{n \cdot dv_y} = A_1 e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}}$$

$$\text{и } f(v_z) = \frac{dn_z}{n \cdot dv_z} = A_1 e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} .$$

**Вероятность** того, что **скорость**

молекулы одновременно удовлетворяет

трём условиям:  $x$  – компонента скорости

лежит в интервале от  $v_x$  до  $v_x + dv_x$ ;  $y$  –

компонента, в интервале от  $v_y$  до  $v_y + dv_y$ ;

$z$  – компонента, в интервале от  $v_z$  до  $v_z + dv_z$

будет равна **произведению вероятностей**

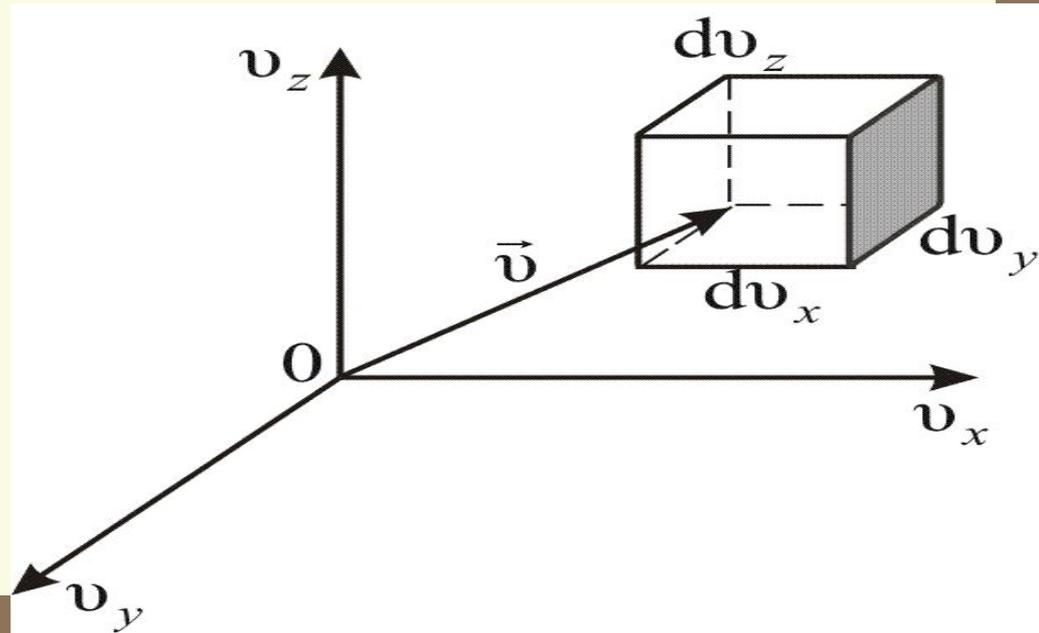
**каждого из условий в отдельности:**

$$\frac{dn_{xyz}}{n} = A_1^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z,$$

где  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ ,  $A_1^3 = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}}$

Или 
$$dn_{xyz} = n \cdot \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z$$

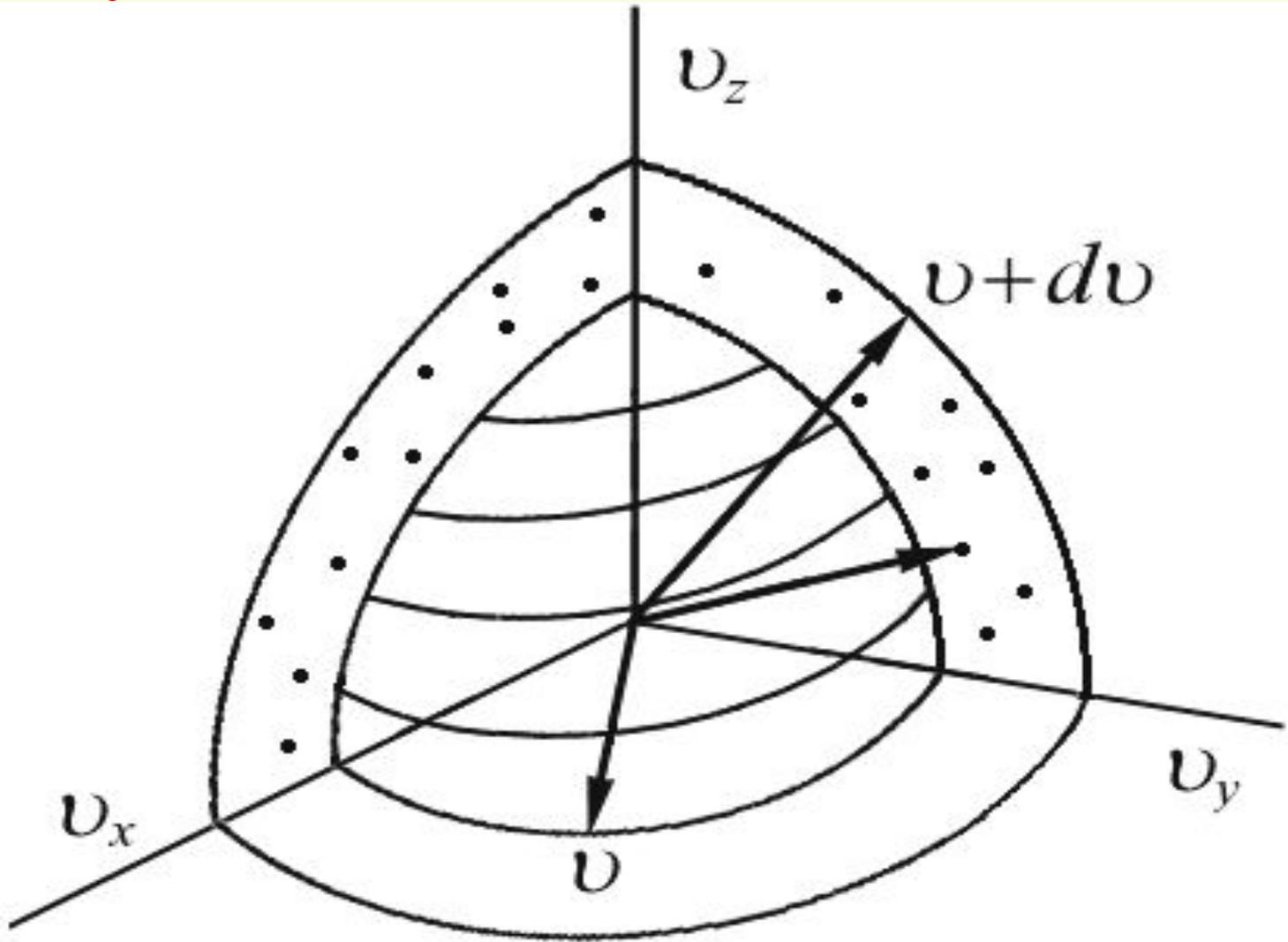
Этой формуле можно дать геометрическое истолкование:  $dn_{xyz}$  – это **число молекул в параллелепипеде** со сторонами  $dv_x$ ,  $dv_y$ ,  $dv_z$ , то есть в объёме  $dV = dv_x dv_y dv_z$ , находящемся на расстоянии  $v$  от начала координат в пространстве скоростей.

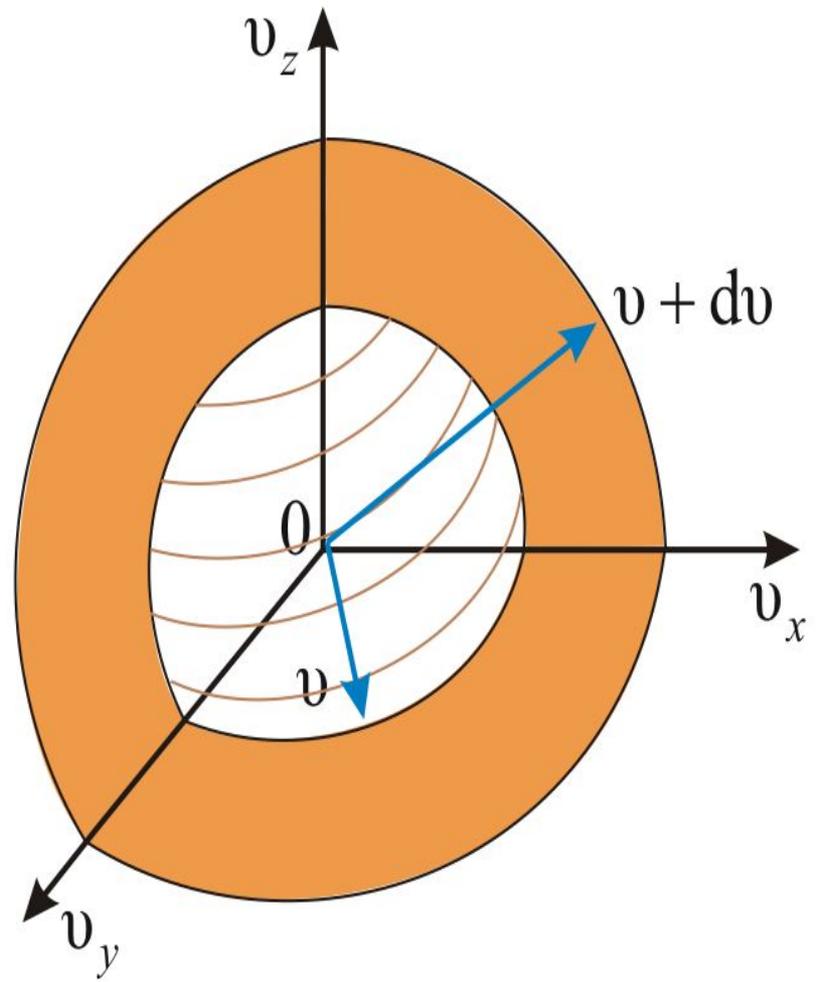
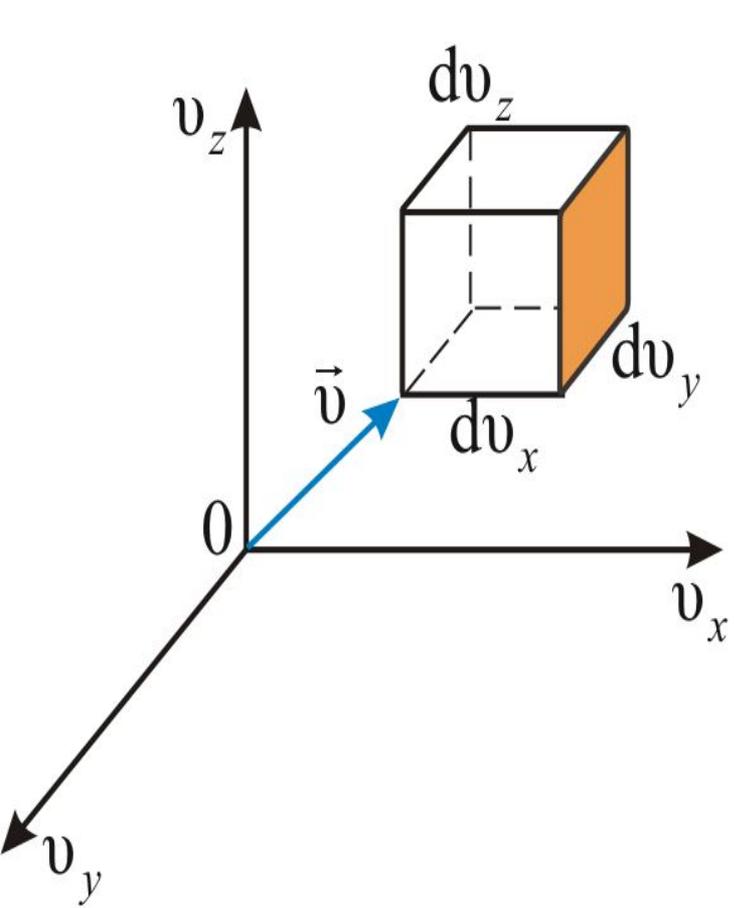


Величина  $dn_{xyz}$  не может зависеть от направления вектора скорости. Поэтому надо получить функцию распределения молекул по скоростям независимо от их направления, то есть по абсолютному значению скорости.

Если собрать вместе **все молекулы** в единице объёма, скорости которых заключены **в интервале** от  $v$  до  $v + dv$  по всем направлениям, и выпустить их, то они окажутся через одну секунду в **шаро-вом слое толщиной  $dv$  и радиусом  $v$ .**

**Шаровой слой толщиной  $dv$  и радиусом от  $v$  до  $v+dv$ .**





Этот **шаровой слой** складывается из тех **параллелепипедов**, о которых говорилось выше.

*Объём этого шарового слоя:*

$$d\Omega = 4\pi v^2 dv$$

*Общее число молекул в слое:*

$$dn = n \cdot \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} d\Omega.$$

Отсюда следует **закон Максвелла –  
распределение молекул по  
абсолютным значениям скоростей:**

$$\frac{dn}{n} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv,$$

где  $\frac{dn}{n}$  – **доля всех частиц** единичного объёма, скорости которых лежат в интервале от  $v$  до  $v + dv$ .

При  $dv = 1$  получаем плотность вероятности, или функцию Максвелла распределения молекул по скоростям:

$$F(v) = \frac{dn}{n \cdot dv} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2.$$

Эта функция обозначает долю молекул единичного объёма газа, абсолютные скорости которых заключены в единичном интервале скоростей, включающем данную скорость.

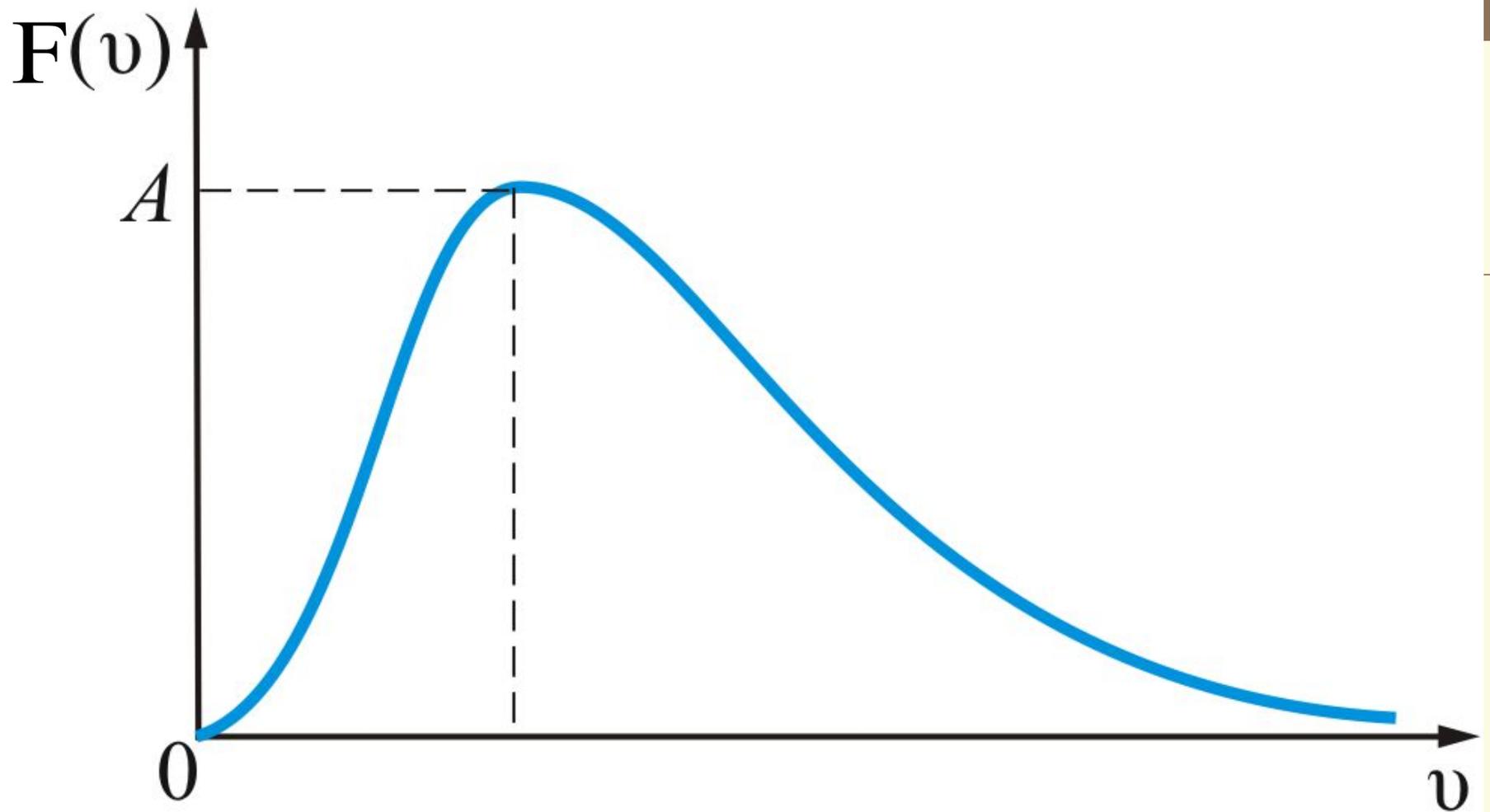
Обозначим  $A = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}},$

---

тогда получим:

$$F(v) = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2.$$

График этой функции показан на рис.



$$F(v) = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2.$$

## **Выводы:**

- Вид распределения молекул газа по скоростям, для каждого газа **зависит от рода газа ( $m$ ) и от параметра состояния ( $T$ )**. Давление  $P$  и объём газа  $V$  на распределение молекул **не влияют**.

- В показателе степени стоит  $\frac{mv^2}{2kT}$  отношение, **кинетической энергии**, соответствующей данной скорости  $v$  к **средней энергии теплового движения молекул при данной температуре:**

*Распределение Максвелла характеризует распределение молекул по значениям кинетической энергии (то есть показывает, какова вероятность при данной температуре иметь именно такое значение кинетической энергии).*

$$F(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

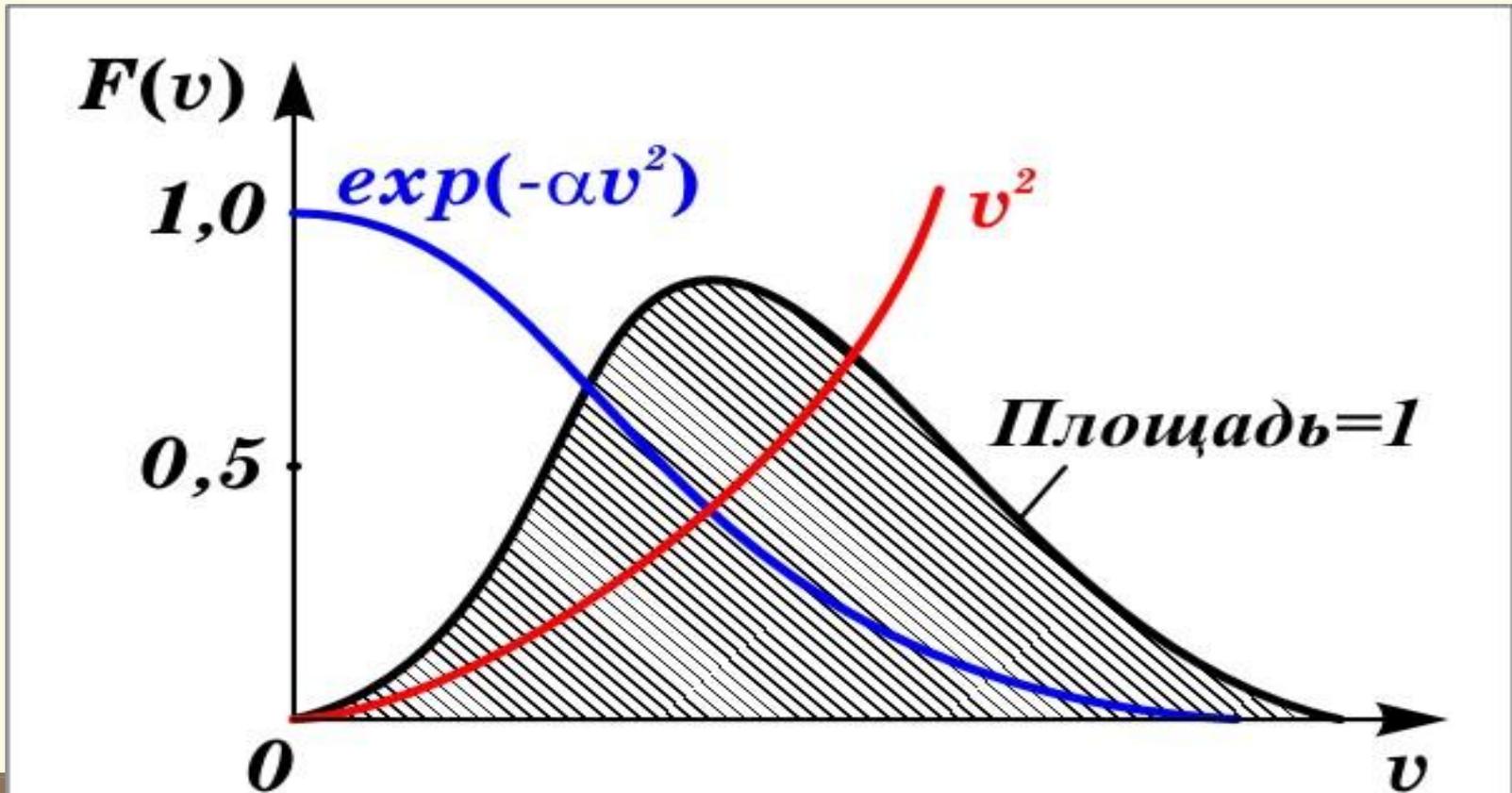
*Характерные скорости (наиболее вероятная, среднеквадратичная и средняя скорости молекул газа).*

Рассмотрим, как изменяется с абсолютной величиной скорости число частиц, приходящихся на единичный интервал скоростей, при единичной концентрации частиц.

$$F(v) = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2.$$

Из графика видно, что при «малых»  $v$ , т.е. при  $\left(\frac{mv^2}{2kT} \ll 1\right)$ , имеем  $F(v) \sim v^2$ ; затем  $F(v)$

достигает максимума  $A$  и далее экспоненциально спадает  $F(v) \sim e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$ .



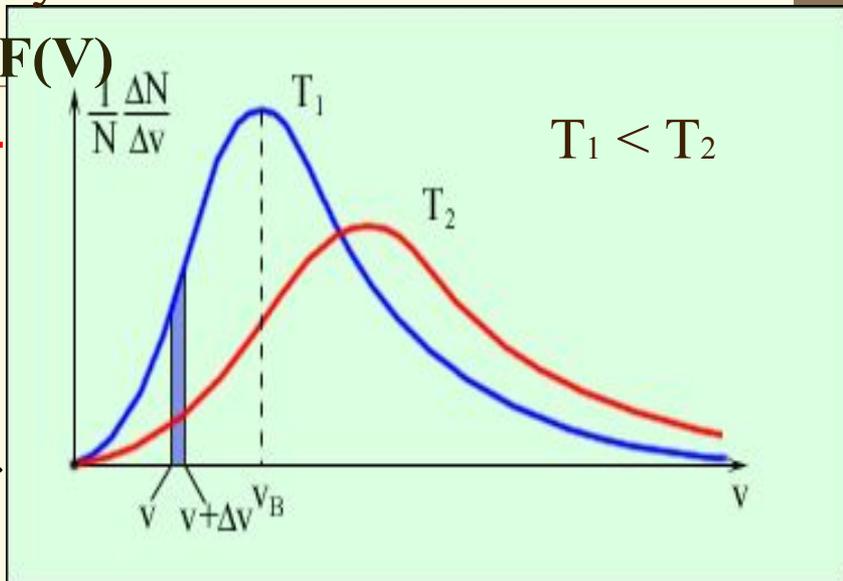
# НАИБОЛЕЕ ВЕРОЯТНАЯ СКОРОСТЬ

**Наиболее вероятной** называют такую

скорость молекул  $V_B$ , для которой  $F(V)$

функция распределения  **$F(V)$  принимает максимальное значение,**

т.е.  $F'(V_B) = 0$ .



$$F'(V) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left[ V^2 \exp\left( -\frac{m_0 V^2}{2kT} \right) \right]' \Rightarrow$$

$$F'(V) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left[ 2V \exp\left( -\frac{m_0 V^2}{2kT} \right) - V^2 \exp\left( -\frac{m_0 V^2}{2kT} \right) \frac{2m_0 V}{2kT} \right] \Rightarrow$$

$$F'(V) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} V \exp\left( -\frac{m_0 V^2}{2kT} \right) \left[ 2 - \frac{m_0 V^2}{kT} \right]; F'(V_B) = 0 \Rightarrow$$

$$V_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2kN_A T}{m_0 N_A}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

Величина скорости, на которую приходится **максимум** зависимости  $F(v)$

называют **наиболее вероятной**

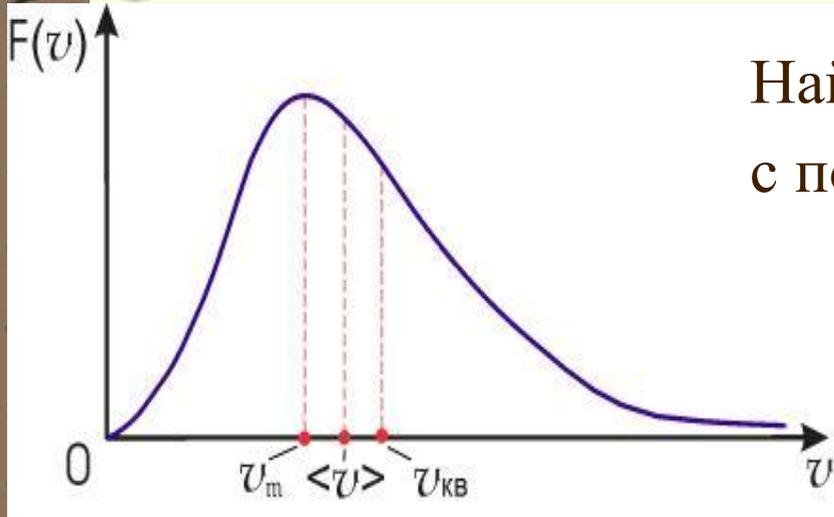
**скоростью**  $v_{\text{вер}}$ . Величину этой

скорости находят из условия равенства нулю производной:

$$F'_v = \frac{dF(v)}{dv} = 0$$

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

# СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ



Найдем среднюю скорость молекул  $V_c$  с помощью функции распределения:

$$V_c = \int_0^c VF(V)dV = \int_0^{\infty} VF(V)dV \Rightarrow$$

$$V_c = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{m_0 V^2}{2kT}\right) V^3 dV = 2\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{m_0 V^2}{2kT}\right) V^2 d(V^2).$$

$$\frac{m_0 V^2}{2kT} \equiv \xi \Rightarrow V^2 = \frac{2kT}{m_0} \xi \Rightarrow d(V^2) = \frac{2kT}{m_0} d\xi \Rightarrow$$

$$V_c = 2\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \frac{2kT}{m_0} \xi \frac{2kT}{m_0} d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi d\xi = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Средняя скорость —  $v_{\text{ср}}$

$$v_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v \cdot n \cdot F(v) dv,$$

где  $n \cdot F(v)dv = dn$  — число молекул со скоростью от  $v$  до  $v + dv$ . Если подставить сюда  $F(v)$  и вычислить, то получим:

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx \sqrt{\frac{2,25kT}{m}}$$

ИЛИ

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \approx \sqrt{\frac{2,25RT}{\mu}}$$

# СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧНАЯ СКОРОСТЬ

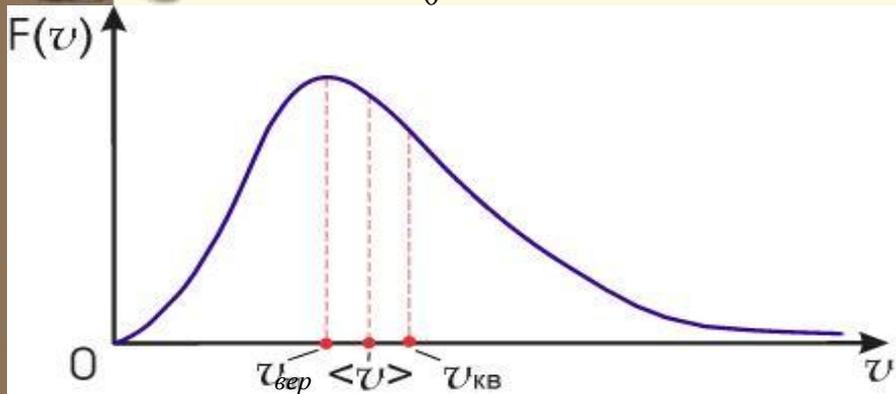
**Средней квадратичной скоростью молекул**  $V_{\text{кв}}$  называется квадратный корень из среднего значения квадрата скорости

$V_{\text{кв}} = \sqrt{(V^2)_c}$ , то есть по теореме о равнораспределении энергии по степеням свободы:

$$\frac{m_0(V^2)_c}{2} = \frac{3}{2}kT \Rightarrow (V^2)_c = \left(\frac{3kT}{m_0}\right) = \left(\frac{3RT}{M}\right) \Rightarrow V_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Нахождении  $(V^2)_c$  с помощью функции распределения:

$$(V^2)_c = \int_0^{\infty} V^2 F(V) dV = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{m_0 V^2}{2kT}\right) V^4 dV = \frac{3kT}{m_0}.$$



$$V_v : V_c : V_{\text{кв}} = \sqrt{2} : \sqrt{8/\pi} : \sqrt{3}.$$

$$V_v : V_c : V_{\text{кв}} = 1 : 1,13 : 1,22.$$

## *Среднюю квадратичную скорость*

находят используя соотношение :

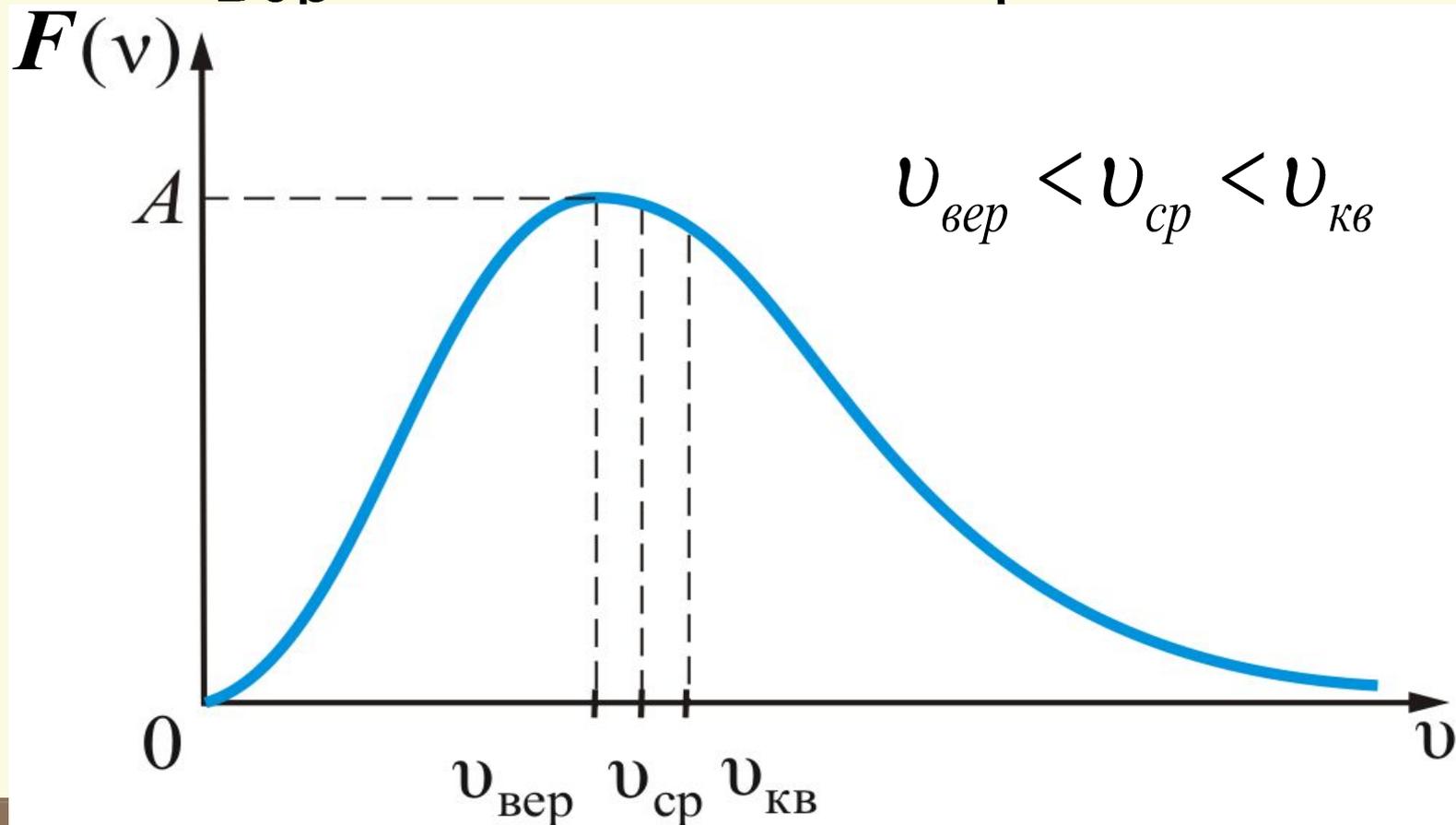
---

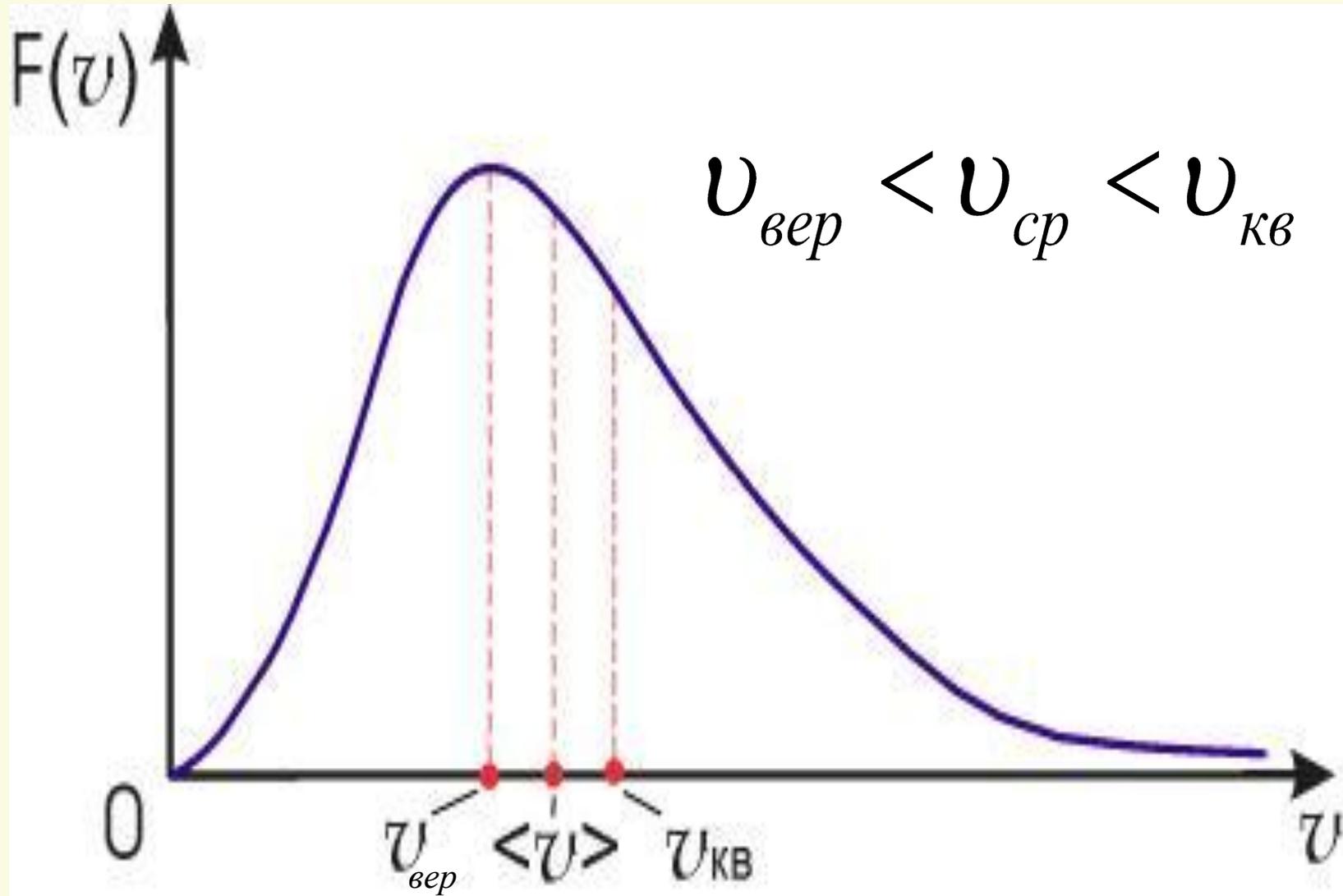
$$\frac{m v_{\text{КВ}}^2}{2} = \frac{3}{2} kT$$

$$v_{\text{КВ}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

*Полезно знать, что*

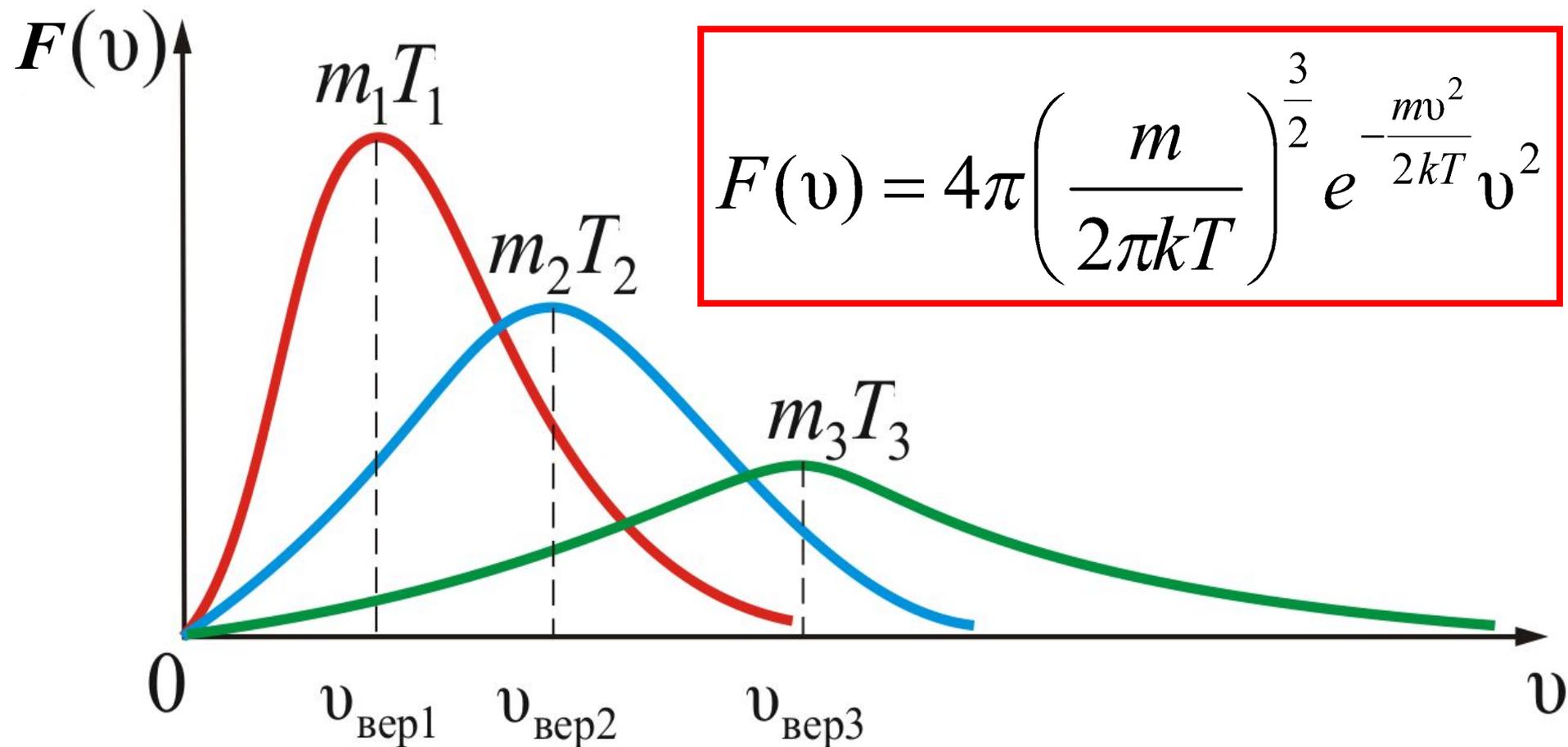
$$\frac{v_{KB}}{v_{вер}} = 1,22 \quad \frac{v_{cp}}{v_{вер}} = 1,13;$$





# Зависимость функции распределения Максвелла от массы молекул и температуры газа

$m_3 < m_2 < m_1, T = const;$        $T_1 < T_2 < T_3, m = const$

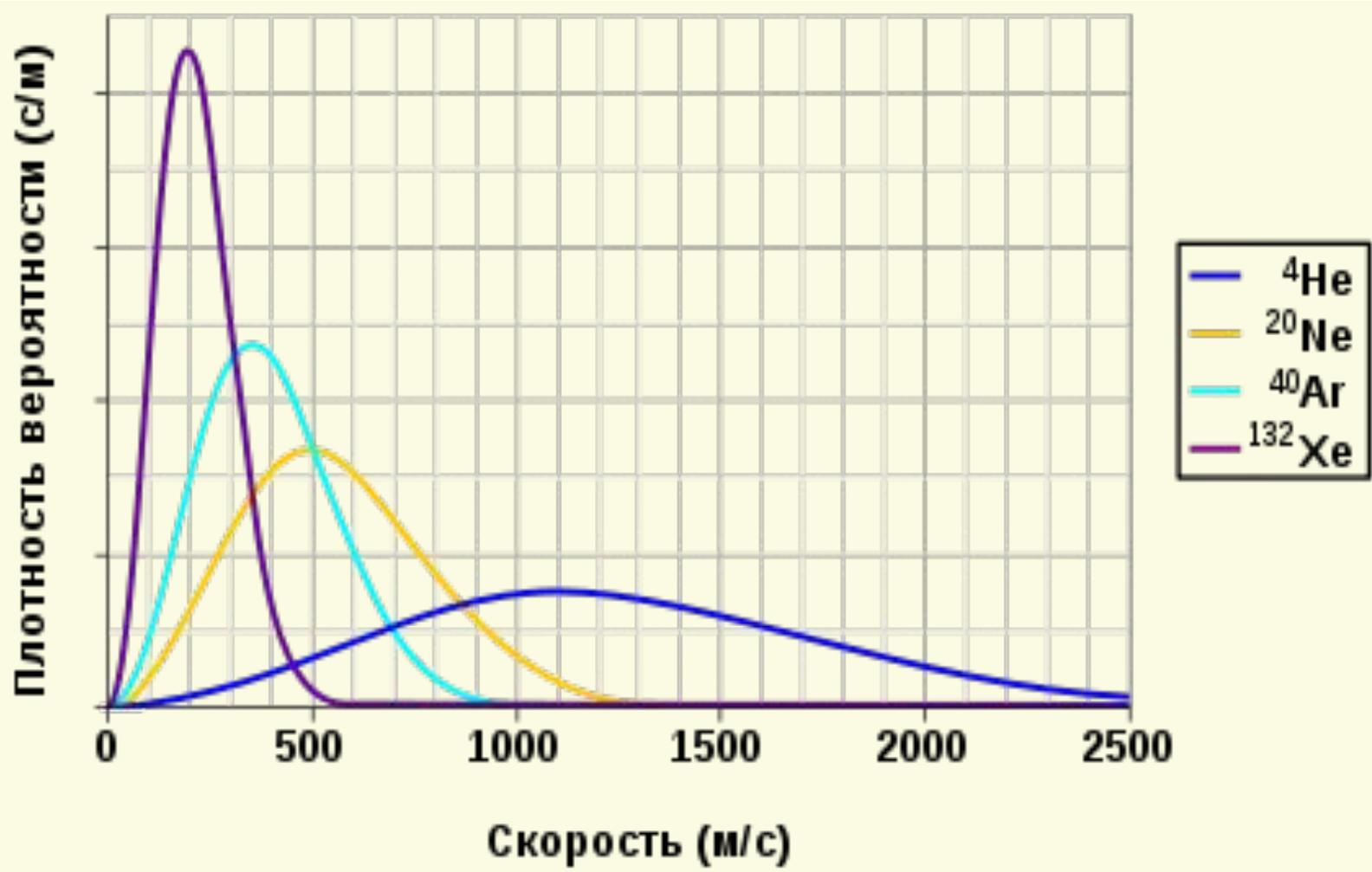


Из рис. можно проследить за изменением  $F(\nu)$  при изменении  $m$  и  $T$ :  $m_3 < m_2 < m_1$  (при  $T = \text{const}$ ) или  $T_1 < T_2 < T_3$  (при  $m = \text{const}$ ).

**Площадь под кривой величина постоянная, равная единице** ( $F(\nu) = \text{const} = 1$ ), поэтому важно знать как будет изменяться положение максимума кривой:

$$F(\nu_{\text{вер}}) \sim \sqrt{\frac{m}{T}}, \quad \nu_{\text{вер}} \sim \sqrt{\frac{T}{m}}.$$

## Распределение плотности вероятности скоростей молекул для благородных газов



# Распределение Максвелла

Распределение Максвелла - распределение молекул по скоростям

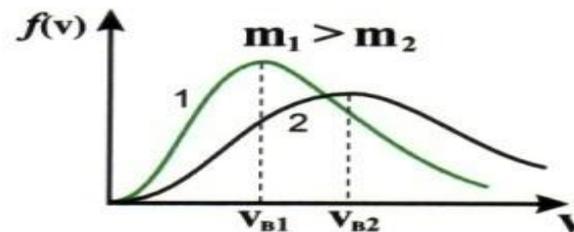
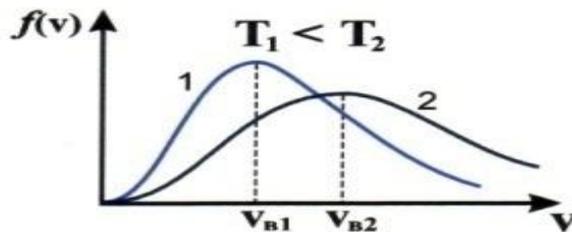
$f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv}$  функция распределения молекул по скоростям - это доля молекул, скорости которых лежат в единичном интервале в окрестностях некоторого значения  $v$

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$



## Задание

Объясните изменение графика зависимости функции распределения молекул по скоростям от температуры ( $T$ ) газа и массы молекулы ( $m$ )





Лекция закончена