

# Прямая задача о положении механизмов параллельной структуры

# Постановка задачи

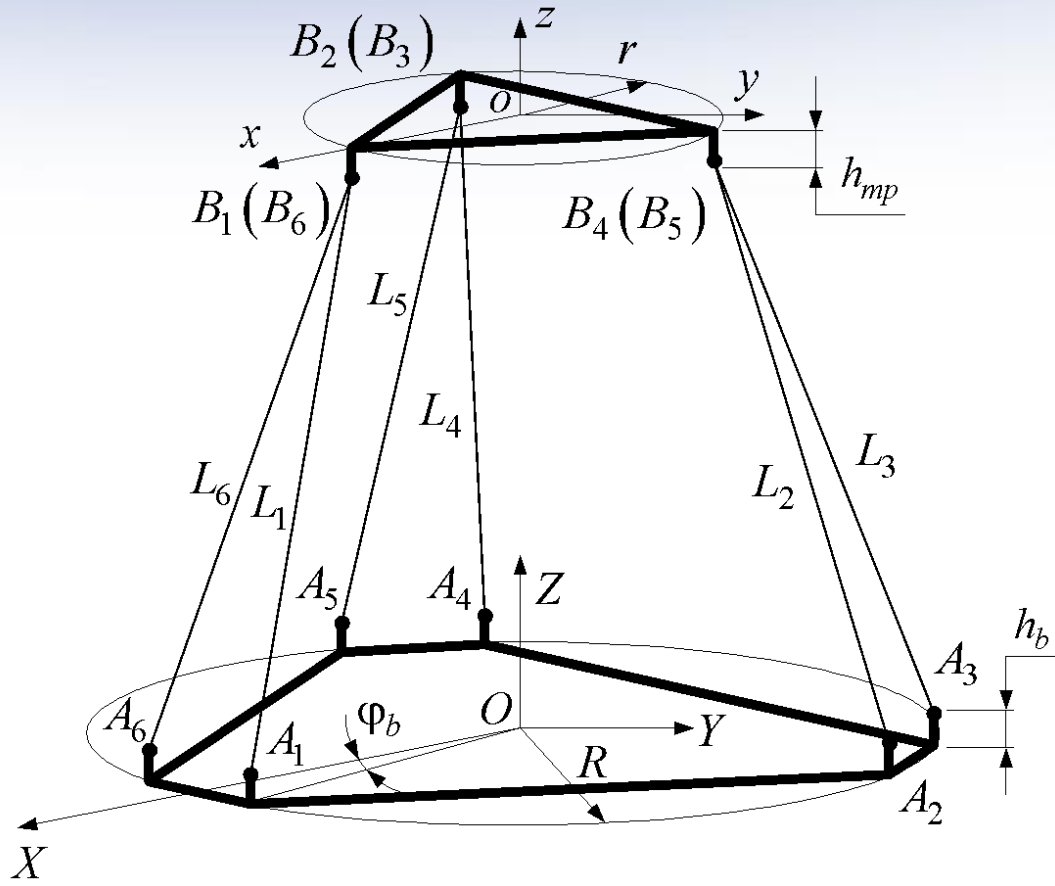


По заданному вектору обобщенных координат манипулятора

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T$$

найти положение и ориентацию его схвата  $\mathbf{s} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$ .

# Платформа Гью-Стюарта 6-3 (Робот 6-3)



$$\mathbf{L} = [L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_6]$$

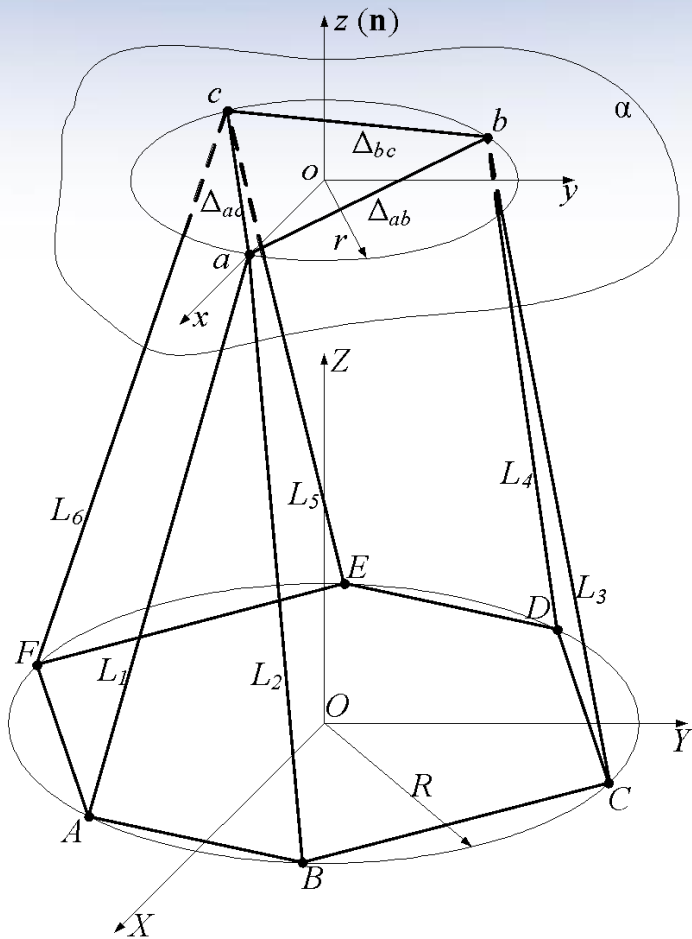
- обобщенные координаты

$$\mathbf{X} = [x_0 \quad y_0 \quad z_0 \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma],$$

- положение и ориентация платформы

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) & \mathbf{p}(x_0, y_0, z_0) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix},$$

# Решение с помощью вычисления аналитического уравнения плоскости



$$\begin{vmatrix} x - x_a & x_b - x_a & x_c - x_a \\ y - y_a & y_b - y_a & y_c - y_a \\ z - z_a & z_b - z_a & z_c - z_a \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x - x_a)d_1 - (y - y_a)d_2 + (z - z_a)d_3 = 0,$$

$$d_1 = (y_b - y_a)(z_c - z_a) - (y_c - y_a)(z_b - z_a),$$

$$d_2 = (x_b - x_a)(z_c - z_a) - (x_c - x_a)(z_b - z_a),$$

$$d_3 = (x_b - x_a)(y_c - y_a) - (x_c - x_a)(y_b - y_a).$$

# Координаты шарниров основания



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} Rc(\varphi_b) & Rc\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi_b\right) & Rc\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi_b\right) & Rc\left(\frac{4\pi}{3} - \varphi_b\right) & Rc\left(\frac{4\pi}{3} + \varphi_b\right) & Rc(-\varphi_b) \\ Rs(\varphi_b) & Rs\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi_b\right) & Rs\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi_b\right) & Rs\left(\frac{4\pi}{3} - \varphi_b\right) & Rs\left(\frac{4\pi}{3} + \varphi_b\right) & Rs(-\varphi_b) \\ h_b & h_b & h_b & h_b & h_b & h_b \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\cos(\varphi) = c(\varphi)$$

$$\sin(\varphi) = s(\varphi)$$

# Полученная система уравнений



$$(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2 = \Delta_{ab}^2,$$

$$(x_a - x_c)^2 + (y_a - y_c)^2 + (z_a - z_c)^2 = \Delta_{ac}^2,$$

$$(x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2 + (z_b - z_c)^2 = \Delta_{bc}^2,$$

$$(x_a - \mathbf{A}_{1,1})^2 + (y_a - \mathbf{A}_{2,1})^2 + (z_a - \mathbf{A}_{3,1})^2 = \mathbf{L}_1^2,$$

$$(x_b - \mathbf{A}_{1,2})^2 + (y_b - \mathbf{A}_{2,2})^2 + (z_b - \mathbf{A}_{3,2})^2 = \mathbf{L}_2^2,$$

$$(x_b - \mathbf{A}_{1,3})^2 + (y_b - \mathbf{A}_{2,3})^2 + (z_b - \mathbf{A}_{3,3})^2 = \mathbf{L}_3^2,$$

$$(x_c - \mathbf{A}_{1,4})^2 + (y_c - \mathbf{A}_{2,4})^2 + (z_c - \mathbf{A}_{3,4})^2 = \mathbf{L}_4^2,$$

$$(x_c - \mathbf{A}_{1,5})^2 + (y_c - \mathbf{A}_{2,5})^2 + (z_c - \mathbf{A}_{3,5})^2 = \mathbf{L}_5^2,$$

$$(x_a - \mathbf{A}_{1,6})^2 + (y_a - \mathbf{A}_{2,6})^2 + (z_a - \mathbf{A}_{3,6})^2 = \mathbf{L}_6^2.$$

$$\Delta_{ab}, \Delta_{ac}, \Delta_{bc}$$

– расстояние между шарнирами  
подвижной платформы

$$\mathbf{L}_i, i = \overline{1..6}$$

– элементы вектора  
обобщенных координат  
манипулятора



Координаты вспомогательной точки:

$$x_o = \frac{x_a + x_b + x_c}{3} \quad y_o = \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \quad z_o = \frac{z_a + z_b + z_c}{3}$$

Каноническое уравнение

плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$A = d_1 \quad B = -d_2 \quad C = d_3 \quad D = -x_a d_1 + y_a d_2 - z_a d_3$$

# Элементы матрицы поворота



Направляющие косинусы оси OZ

$$\cos \alpha_{oz} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta_{oz} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \gamma_{oz} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

Направляющие косинусы оси OX

$$\cos \alpha_{ox} = \frac{x_a - \frac{x_a + x_b + x_c}{3}}{\sqrt{\left(x_a - \frac{x_a + x_b + x_c}{3}\right)^2 + \left(y_a - \frac{y_a + y_b + y_c}{3}\right)^2 + \left(z_a - \frac{z_a + z_b + z_c}{3}\right)^2}},$$

$$\cos \beta_{ox} = \frac{y_a - \frac{y_a + y_b + y_c}{3}}{\sqrt{\left(x_a - \frac{x_a + x_b + x_c}{3}\right)^2 + \left(y_a - \frac{y_a + y_b + y_c}{3}\right)^2 + \left(z_a - \frac{z_a + z_b + z_c}{3}\right)^2}},$$

$$\cos \gamma_{ox} = \frac{z_a - \frac{z_a + z_b + z_c}{3}}{\sqrt{\left(x_a - \frac{x_a + x_b + x_c}{3}\right)^2 + \left(y_a - \frac{y_a + y_b + y_c}{3}\right)^2 + \left(z_a - \frac{z_a + z_b + z_c}{3}\right)^2}},$$



# Элементы матрицы поворота и вектора переноса



Направляющие косинусы оси OY

$$\cos \alpha_{oy} = \cos \beta_{oz} \cos \gamma_{ox} - \cos \gamma_{oz} \cos \beta_{ox},$$

$$\cos \beta_{oy} = \cos \gamma_{oz} \cos \alpha_{ox} - \cos \alpha_{oz} \cos \gamma_{ox},$$

$$\cos \gamma_{oy} = \cos \alpha_{oz} \cos \beta_{ox} - \cos \beta_{oz} \cos \alpha_{ox}.$$

Элементы вектора переноса

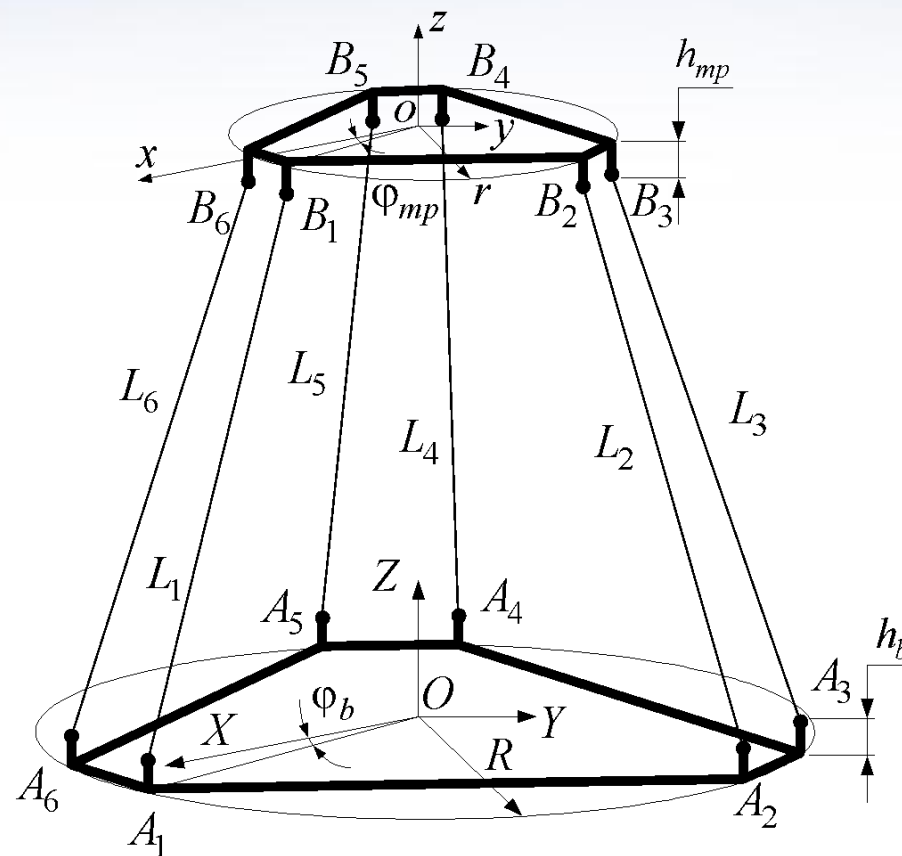
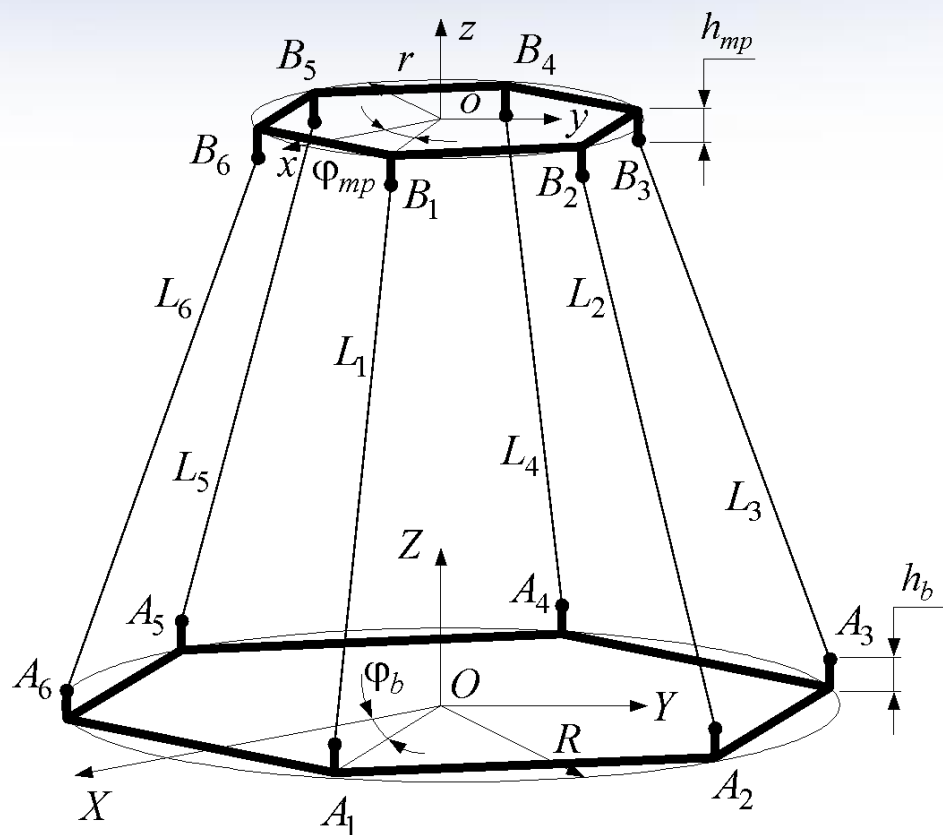
$$o(x_o \quad y_o \quad z_o) = \begin{bmatrix} \frac{x_a + x_b + x_c}{3} \\ \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \\ \frac{z_a + z_b + z_c}{3} \end{bmatrix} + h_{mp} \mathbf{n}.$$

# Искомая матрица однородного преобразования

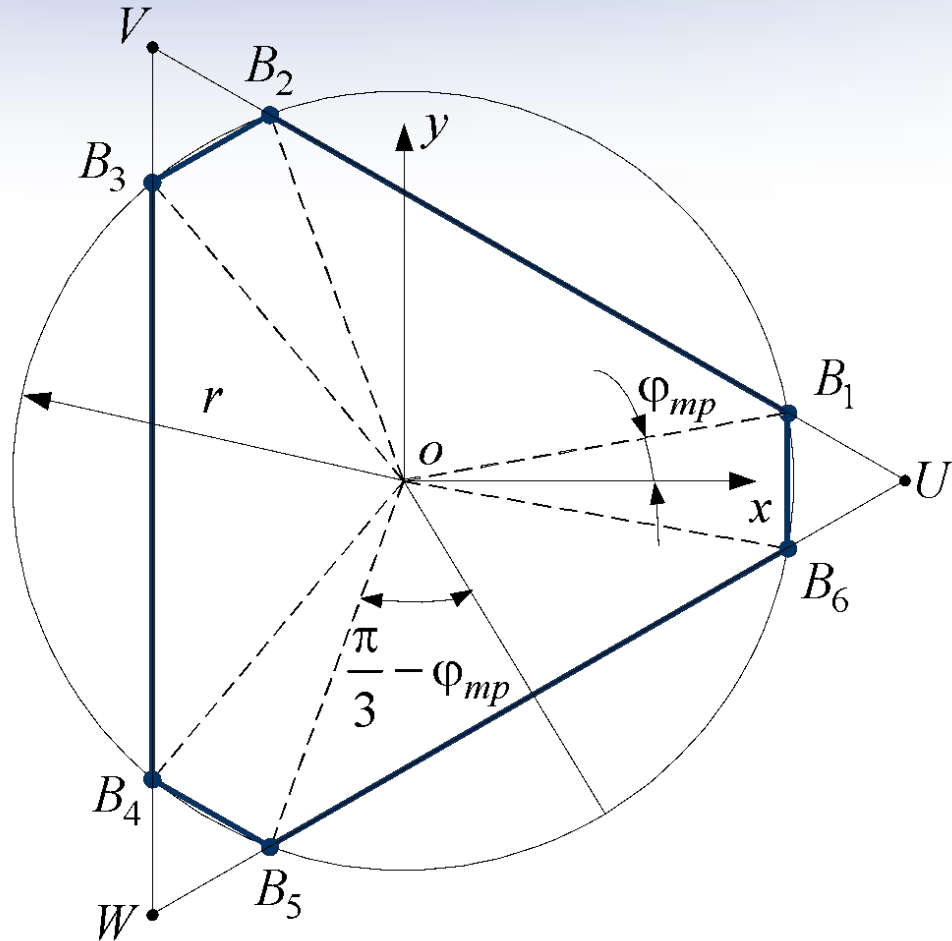


$$\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ox} & \cos \alpha_{oy} & \cos \alpha_{oz} & x_o \\ \cos \beta_{ox} & \cos \beta_{oy} & \cos \beta_{oz} & y_o \\ \cos \gamma_{ox} & \cos \gamma_{oy} & \cos \gamma_{oz} & z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

# Платформа Гью-Стюарта 6-6 (Робот 6-6)



# Введение виртуальных точек



$$WB_5 = B_6U = 2r \sin(\varphi_{mp})$$

$$B_5B_6 = 2r \sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi_{mp}\right)$$

# Координаты шарниров, выраженные через виртуальные точки



$$B_1 \begin{pmatrix} x_{B_1} & y_{B_1} & z_{B_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_U + K(x_V - x_U) & y_U + K(y_V - y_U) & z_U + K(z_V - z_U) \end{pmatrix},$$

$$B_2 \begin{pmatrix} x_{B_2} & y_{B_2} & z_{B_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_V + K(x_V - x_U) & y_V + K(y_V - y_U) & z_V + K(z_V - z_U) \end{pmatrix},$$

$$B_3 \begin{pmatrix} x_{B_3} & y_{B_3} & z_{B_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_V + K(x_W - x_V) & y_V + K(y_W - y_V) & z_V + K(z_W - z_V) \end{pmatrix},$$

$$B_4 \begin{pmatrix} x_{B_4} & y_{B_4} & z_{B_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_W + K(x_V - x_W) & y_W + K(y_V - y_W) & z_W + K(z_V - z_W) \end{pmatrix},$$

$$B_5 \begin{pmatrix} x_{B_5} & y_{B_5} & z_{B_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_W + K(x_U - x_W) & y_W + K(y_U - y_W) & z_W + K(z_U - z_W) \end{pmatrix},$$

$$B_6 \begin{pmatrix} x_{B_6} & y_{B_6} & z_{B_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_U + K(x_W - x_U) & y_U + K(y_W - y_U) & z_U + K(z_W - z_U) \end{pmatrix},$$

Коэффициент линейной пропорциональности

$$K = \frac{r \sin(\varphi_{mp})}{2r \sin(\varphi_{mp}) + r \sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi_{mp}\right)}$$



$$(x_U - x_V)^2 + (y_U - y_V)^2 + (z_U - z_V)^2 = \Delta_{UV}^2,$$

$$(x_U - x_W)^2 + (y_U - y_W)^2 + (z_U - z_W)^2 = \Delta_{UW}^2,$$

$$(x_V - x_W)^2 + (y_V - y_W)^2 + (z_V - z_W)^2 = \Delta_{VW}^2,$$

$$(\mathbf{C}_{1,1} - \mathbf{A}_{1,1})^2 + (\mathbf{C}_{2,1} - \mathbf{A}_{2,1})^2 + (\mathbf{C}_{3,1} - \mathbf{A}_{3,1})^2 = \mathbf{L}_1^2,$$

$$(\mathbf{C}_{1,2} - \mathbf{A}_{1,2})^2 + (\mathbf{C}_{2,2} - \mathbf{A}_{2,2})^2 + (\mathbf{C}_{3,2} - \mathbf{A}_{3,2})^2 = \mathbf{L}_2^2,$$

$$(\mathbf{C}_{1,3} - \mathbf{A}_{1,3})^2 + (\mathbf{C}_{2,3} - \mathbf{A}_{2,3})^2 + (\mathbf{C}_{3,3} - \mathbf{A}_{3,3})^2 = \mathbf{L}_3^2,$$

$$(\mathbf{C}_{1,4} - \mathbf{A}_{1,4})^2 + (\mathbf{C}_{2,4} - \mathbf{A}_{2,4})^2 + (\mathbf{C}_{3,4} - \mathbf{A}_{3,4})^2 = \mathbf{L}_4^2,$$

$$(\mathbf{C}_{1,5} - \mathbf{A}_{1,5})^2 + (\mathbf{C}_{2,5} - \mathbf{A}_{2,5})^2 + (\mathbf{C}_{3,5} - \mathbf{A}_{3,5})^2 = \mathbf{L}_5^2,$$

$$(\mathbf{C}_{1,6} - \mathbf{A}_{1,6})^2 + (\mathbf{C}_{2,6} - \mathbf{A}_{2,6})^2 + (\mathbf{C}_{3,6} - \mathbf{A}_{3,6})^2 = \mathbf{L}_6^2.$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} x_{B_1} & x_{B_2} & x_{B_3} & x_{B_4} & x_{B_5} & x_{B_6} \\ y_{B_1} & y_{B_2} & y_{B_3} & y_{B_4} & y_{B_5} & y_{B_6} \\ z_{B_1} & z_{B_2} & z_{B_3} & z_{B_4} & z_{B_5} & z_{B_6} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

# Элементы матрицы поворота



Направляющие косинусы оси OZ

$$\cos \alpha_{oz} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta_{oz} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \gamma_{oz} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

Направляющие косинусы оси OX

$$\cos \alpha_{ox} = \frac{x_U - \frac{x_U + x_V + x_W}{3}}{\sqrt{\left(x_U - \frac{x_U + x_V + x_W}{3}\right)^2 + \left(y_U - \frac{y_U + y_V + y_W}{3}\right)^2 + \left(z_U - \frac{z_U + z_V + z_W}{3}\right)^2}},$$

$$\cos \beta_{ox} = \frac{y_U - \frac{y_U + y_V + y_W}{3}}{\sqrt{\left(x_U - \frac{x_U + x_V + x_W}{3}\right)^2 + \left(y_U - \frac{y_U + y_V + y_W}{3}\right)^2 + \left(z_U - \frac{z_U + z_V + z_W}{3}\right)^2}},$$

$$\cos \gamma_{ox} = \frac{z_U - \frac{z_U + z_V + z_W}{3}}{\sqrt{\left(x_U - \frac{x_U + x_V + x_W}{3}\right)^2 + \left(y_U - \frac{y_U + y_V + y_W}{3}\right)^2 + \left(z_U - \frac{z_U + z_V + z_W}{3}\right)^2}},$$

# Элементы матрицы поворота и вектора переноса



Направляющие косинусы оси OY

$$\cos \alpha_{oy} = \cos \beta_{oz} \cos \gamma_{ox} - \cos \gamma_{oz} \cos \beta_{ox},$$

$$\cos \beta_{oy} = \cos \gamma_{oz} \cos \alpha_{ox} - \cos \alpha_{oz} \cos \gamma_{ox},$$

$$\cos \gamma_{oy} = \cos \alpha_{oz} \cos \beta_{ox} - \cos \beta_{oz} \cos \alpha_{ox}.$$

Элементы вектора переноса

$$o(x_o \quad y_o \quad z_o) = \begin{bmatrix} \frac{x_U + x_V + x_W}{3} \\ \frac{y_U + y_V + y_W}{3} \\ \frac{z_U + z_V + z_W}{3} \end{bmatrix} + h_{mp} \mathbf{n}.$$



# Искомая матрица однородного преобразования



$$\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ox} & \cos \alpha_{oy} & \cos \alpha_{oz} & x_o \\ \cos \beta_{ox} & \cos \beta_{oy} & \cos \beta_{oz} & y_o \\ \cos \gamma_{ox} & \cos \gamma_{oy} & \cos \gamma_{oz} & z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

# Моделирование движения механизма



Алгоритм:

1. Выбрать закон изменения обобщенных координат.
2. Если закон непрерывный – дискретизировать.
3. Для набора дискретных значений решить прямую задачу.
4. Отобразить график движения.

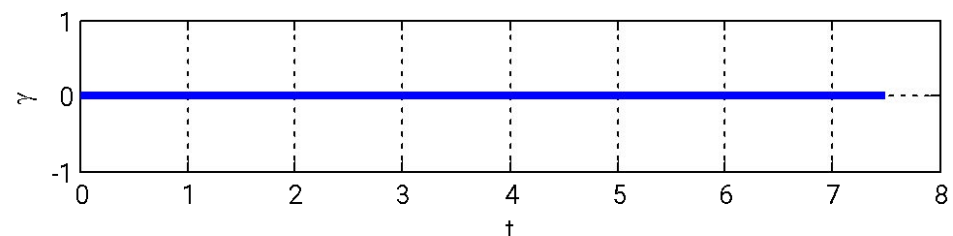
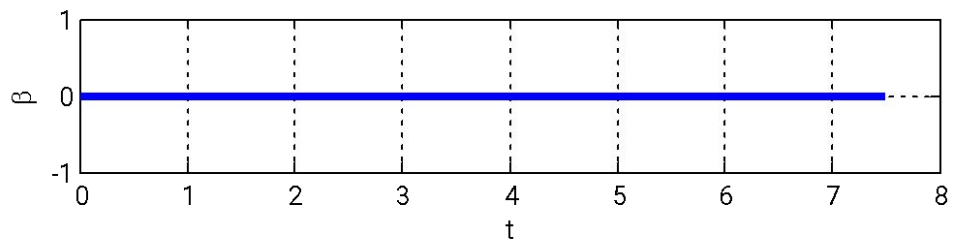
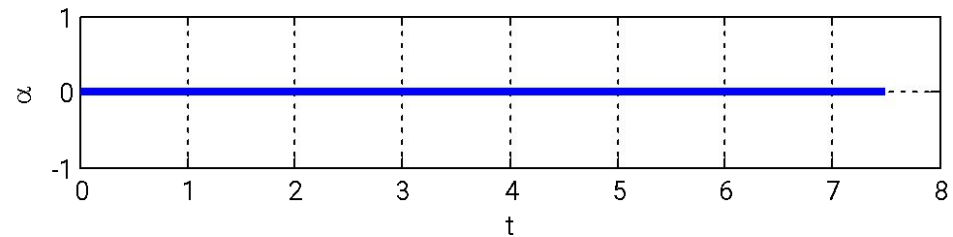
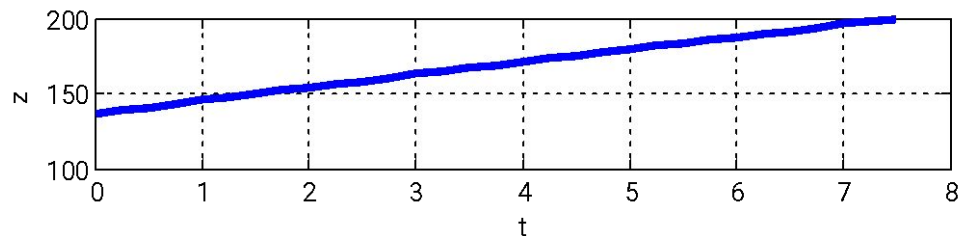
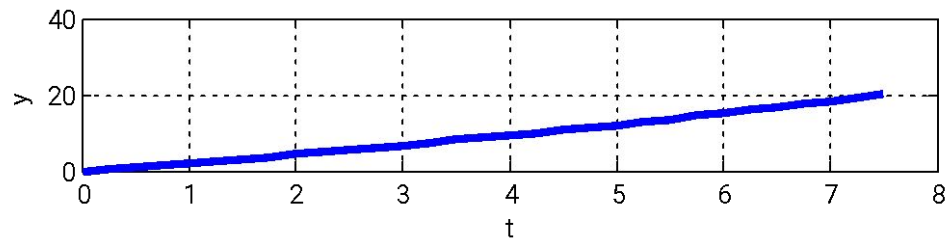
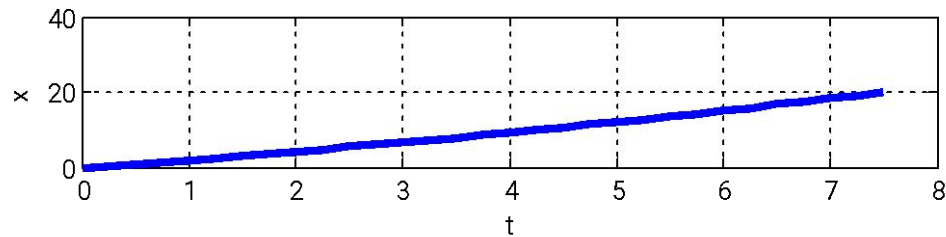
Дискретный закон движения:

$$L_{i,n+1} = L_{i,n} + \frac{L_{i,f} - L_{i,s}}{N} t, n = \overline{0..N}, L_{i,0} = L_{i,s},$$

# Численный пример



$$R = 100 \quad r = 50 \quad h_b = h_{mp} = 5 \quad \varphi_b = \varphi_{mp} = \frac{\pi}{18}$$



# Построение рабочей зоны механизма



Алгоритм решения:

