«Методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов на базе MATLAB»

Дискретное преобразование Фурье. Выделение дискретных гармоник сигнала

Клионский Д.М. – к.т.н., доцент кафедры математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)

Институт непрерывного образования
1886
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»

КРИТЕРИИ ВЫДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА ИЗ СМЕСИ С ШУМОМ

Первый критерий выделения полезного сигнала

$$\frac{|X(k)|}{\max|X(k)|} > \varepsilon_1$$

$|X(k)|$ – значение модуля ДПФ аддитивной смеси сигнала с шумом; ε_1 – порог

Второй критерий выделения полезного сигнала

$$\frac{|X(k)|^2}{P_{\text{ср}}} > \varepsilon_2$$

$P_{\text{ср}}$ – средняя мощность аддитивной смеси сигнала с шумом; ε_2 – порог

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРОГОВ

Первый критерий

$$\frac{\max\left|X(k)_{\text{шума}}\right|}{\max\left|X(k)\right|} < \varepsilon_1 < 1$$

Второй критерий

$$\frac{\min\left|X(k)_{\text{сигн}}\right|^2}{P_{\text{ср}}} < \varepsilon_2 \le \frac{\max\left|X(k)\right|^2}{P_{\text{ср}}}$$

Соотношение между уровнями сигнала и шума

$$\left|X(k)_{\text{сигн}}\right| > \max\left|X(k)_{\text{шума}}\right|$$

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ КОНЕЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (1)

Спектральная плотность конечной последовательности *x(n)* длины *N*

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega T n}$$

Спектральная плотность вычисляется на периоде

$$\omega_д = 2\pi / T$$

Связь спектральной плотности и ДПФ

$$X(k) = X(e^{j\omega T}) \Big|_{\omega = k\frac{2\pi}{NT}}, k = 0,\, 1,\, \dots,\, N-1$$

Значения спектральной плотности в *L* равноотстоящих точках (*L*>*N*)

$$X\left(e^{j\frac{2\pi}{L}l}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{L}ln}, l = 0,\, 1,\, \dots,\, L-1$$

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ КОНЕЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (2)

l – дискретная нормированная частота

$\Delta\omega$ – период дискретизации по частоте

$$\Delta\omega = \omega_{\text{д}}/L = 2\pi/LT$$

Значения спектральной плотности в *L* равноотстоящих точках (*L*>*N*)

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \le n \le (N-1); \\ 0, & N \le n \le (L-1), \end{cases}$$

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{L-1} \tilde{x}(n) W_L^{nk}, \; k = 0, 1, \ldots, L-1.$$

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_L^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{L}kn}, k = 0, 1, \ldots, L-1$$

ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА (1)

Теорема Котельникова

Любой сигнал с ограниченным спектром может быть без потерь информации представлен набором дискретных отсчетов, взятых через интервал T≤ 1/2fb, где

fb – верхняя граничная частота спектра аналогового сигнала.

$$x(t)=\frac{1}{N}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X_{\text{а}}(k)e^{j\frac{2\pi}{NT}kt},(-N/2)\le k\le(N/2-1)$$

$$X_{\text{а}}(k)=\begin{cases} X(N+k), & -N/2\le k\le -1; \\ X(k), & 0\le k\le (N/2-1). \end{cases}$$

$X_{\text{а}}(k)$ – ДПФ аналогового сигнала

$X(k)$ – ДПФ дискретного сигнала

ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА (2)

Усеченный ряд Котельникова

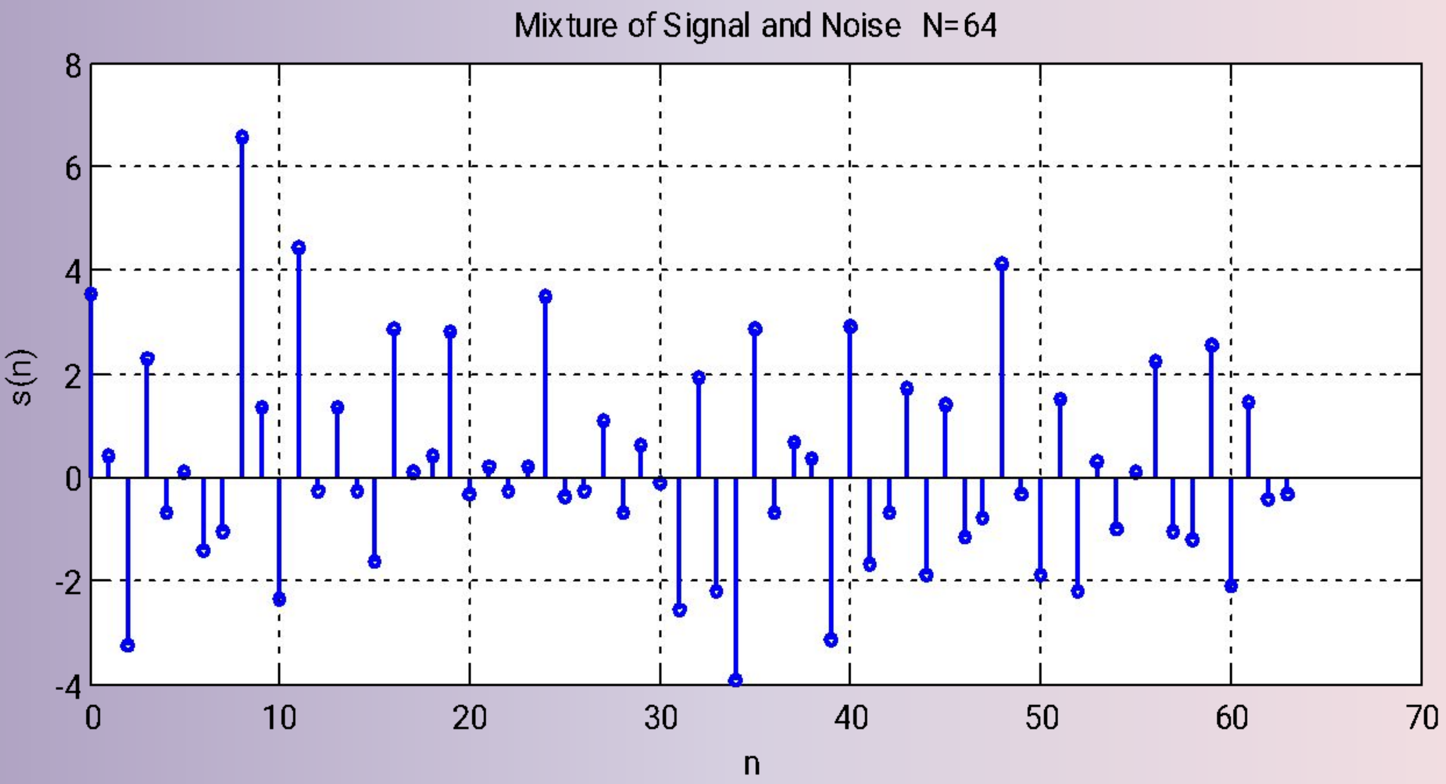
$$x(t)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\frac{\sin\left[\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)\right]}{\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)}$$

Два способа восстановления аналогового сигнала

- Формула на основе отсчетов ДПФ;
- Усеченный ряд Котельникова.

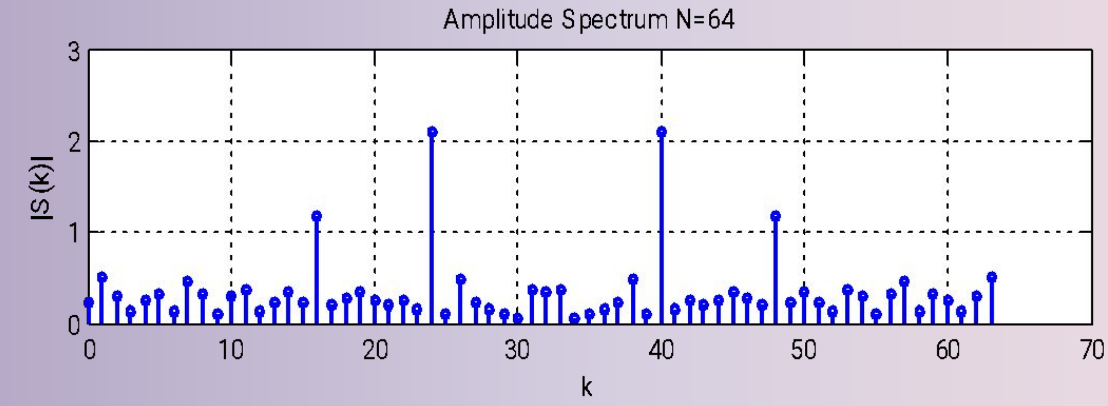
ПРИМЕР (1)

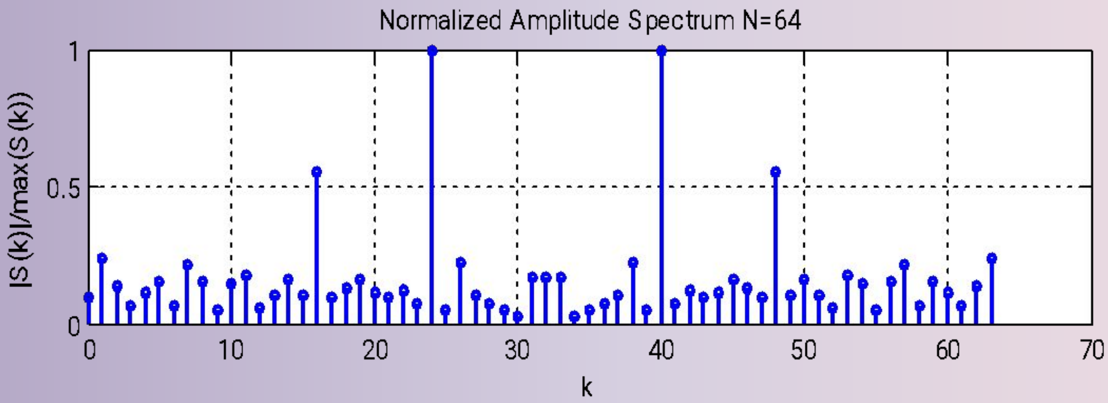
Выделение полезного сигнала из аддитивной смеси с шумом



ПРИМЕР (1)

Модуль ДПФ сигнала с шумом. Применение 1-го критерия





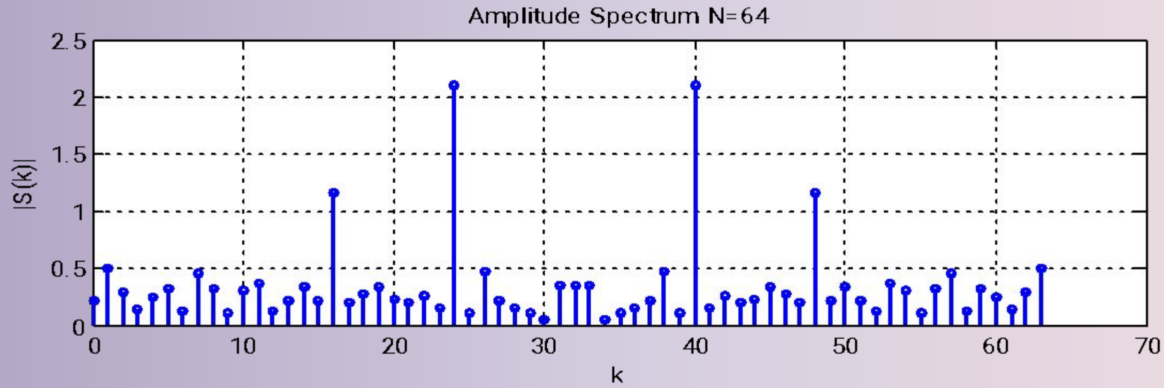
e1_low = 0.282

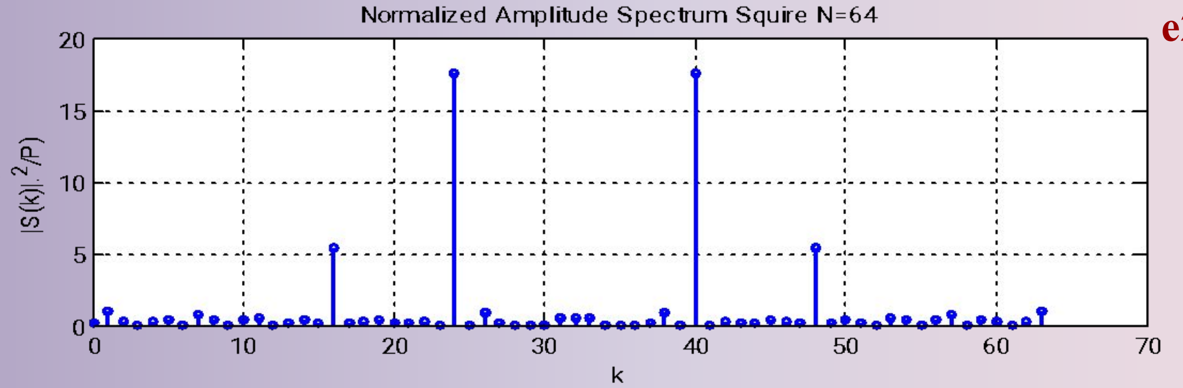
e1_up = 1

e1 = 0.3

ПРИМЕР (1)

Модуль ДПФ сигнала с шумом. Применение 2-го критерия





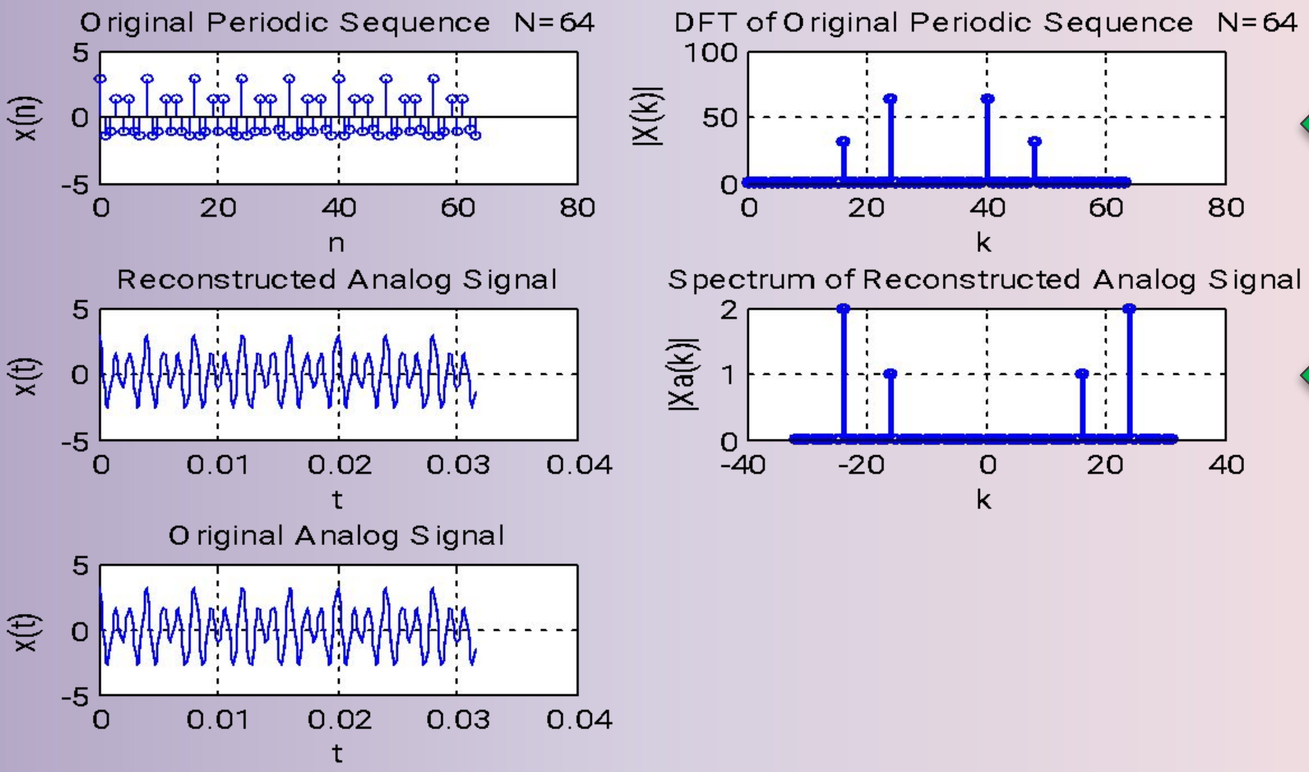
e2_low = 1.465

e2_up = 18.362

e2 = 2

ПРИМЕР (2)

Восстановление аналогового сигнала по отсчетам ДПФ



«Методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов на базе MATLAB»

Дискретное преобразование Фурье. Выделение дискретных гармоник сигнала

Клионский Д.М. – к.т.н., доцент кафедры математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)

Институт непрерывного образования
1886
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»