

Алгебра высказываний

Лекция 2

Цель: Дать определение высказывания, таблицы истинности.
Сформулировать основные логические тождества

2. Определение высказывания. Таблица истинности для высказываний

Определение 1

Переменная A , принимающая два значения – 0 или 1 , называется *логической* (или *булевой*) переменной.

Обозначаться логические переменные будут заглавными латинскими буквами с индексами или без них:

$$A, B, X, Y, A_2, C_3, \dots$$

Соглашение 1

Если высказывание сконструировано из однотипных операций, то они выполняются в порядке их следования.

К примеру,

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D = \left(\left(\left(A \rightarrow B \right) \rightarrow C \right) \rightarrow D \right)$$

Соглашение 2

Отрицание подразумевает скобки

Соглашение 3

Внешние скобки не ставятся.

Соглашение 4

Конъюнкция связывает сильнее, чем дизъюнкция.

Например,

$$A \vee B \wedge C = A \vee (B \wedge C)$$

Соглашение 5

Дизъюнкция связывает сильнее, чем импликация.

Например,

$$A \wedge B \vee C \rightarrow D = ((A \wedge B) \vee C) \rightarrow D$$

Соглашение 6

Импликация связывает сильнее, чем эквивалентность.

Например,

$$A \leftrightarrow B \rightarrow C = A \leftrightarrow (B \rightarrow C)$$

Примеры

- 1) Избавиться от лишних скобок

$$((A \rightarrow (B \vee C)) \rightarrow (\overline{AB} \leftrightarrow C))$$

- Ответ $A \rightarrow B \vee C \rightarrow (\overline{AB} \leftrightarrow C)$

- 2) Расставить порядок действий

$$A \underset{5}{(} \underset{1}{B \vee C)} \underset{7}{\leftrightarrow} \overline{\underset{2}{A} \underset{3}{C}} \overset{4}{\rightarrow} \underset{6}{B} \rightarrow C$$

Если высказывание F построено из логических переменных

A_1, A_2, \dots, A_n , то будем обозначать это высказывание:

$$F = F(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

Определение 3

Таблица истинности для высказывания $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ имеет вид

A_1	A_2	\dots	A_{n-1}	A_n	$F(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n)$
0	0	\dots	0	0	$F(0, 0, \dots, 0, 0)$
0	0	\dots	0	1	$F(0, 0, \dots, 0, 1)$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
1	1	\dots	1	0	$F(1, 1, \dots, 1, 0)$
1	1	\dots	1	1	$F(1, 1, \dots, 1, 1)$

Теорема

Наборов длины n из 0 и 1 существует 2^n

Пример

Построить таблицу истинности для высказывания
 $(A \vee \bar{C}) \rightarrow B \leftrightarrow A$

A	B	C	\bar{C}	$A \vee \bar{C}$	$B \leftrightarrow A$	$\overline{B \leftrightarrow A}$	F
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0

3. Равносильные высказывания.

Определение 1

Высказывания $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ и $G(A_1, A_2, \dots, A_n)$ называются *равносильными* (или просто *равными*), если для любого набора

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ имеет место равенство: $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Обозначим $F(A_1, A_2, \dots, A_n) = G(A_1, A_2, \dots, A_n)$

Другими словами, два высказывания равны, если у них совпадают таблицы истинности.

Примеры

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$$

Доказательство

A	B	$A \rightarrow B$	$\bar{A} \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Основные логические тождества

Идемпотентные законы:

$$1) A \vee A = A$$

$$2) A \wedge A = A$$

Коммутативные законы:

$$3) A \vee B = B \vee A$$

$$4) A \wedge B = B \wedge A$$

$$5) A \leftrightarrow B = B \leftrightarrow A$$

Ассоциативные законы:

$$6) A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

$$7) A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$

$$8) A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$$

Дистрибутивные законы:

$$9) A(B \vee C) = AB \vee AC$$

$$10) A \vee (BC) = (A \vee B)(A \vee C)$$

Законы Моргана:

$$11) \overline{A \cdot B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

$$12) \overline{A \vee B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Закон двойного отрицания:

$$13) \overline{\overline{A}} = A$$

Закон противоречия:

$$14) A \cdot \overline{A} = 0$$

Закон исключенного третьего:

$$15) A \vee \overline{A} = 1$$

Без названия:

$$16) A \leftrightarrow B = AB \vee \overline{A} \cdot \overline{B} = (A \rightarrow B)(B \rightarrow A)$$

$$17) A \rightarrow B = \overline{A} \vee B$$

Законы поглощения:

$$18) A \vee AB = A$$

Доказательство

$$A \vee AB = A \cdot (1 \vee B) = A \cdot 1 = A$$

$$19) A \vee \overline{A}B = A \vee B$$

Доказательство

$$A \vee \overline{A}B = (A \vee \overline{A})(A \vee B) = 1 \cdot (A \vee B) = A \vee B$$

$$20) A \cdot (\overline{A} \vee B) = AB$$

$$21) A \cdot (A \vee B) = A$$

Тождества, содержащие константы:

$$A \vee 0 = A$$

$$A \vee 1 = 1$$

$$A \wedge 0 = 0$$

$$A \wedge 1 = A$$

$$A \rightarrow 0 = \bar{A}$$

$$A \rightarrow 1 = 1$$

$$0 \rightarrow A = 1$$

$$1 \rightarrow A = A$$

$$A \leftrightarrow 0 = \bar{A}$$

$$A \leftrightarrow 1 = A$$