

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

СООТВЕТСТВИЯ. ФУНКЦИИ. ОТОБРАЖЕНИЯ

ЛЕКЦИЯ 2

**Факультет компьютерной инженерии и управления,
кафедра АПВТ, ХНУРЭ**



Тема: Соответствия. Функции. Отображения

Цель лекции – ознакомиться и овладеть понятием «соответствие», изучить свойства соответствий для применения в задачах компьютерной инженерии

Содержание:

- Понятие упорядоченной пары и вектора
- Декартово произведение множеств
- Определение соответствия
- Свойства соответствий
- Взаимно-однозначное соответствие
- Функции
- Отображения
- Примеры применения в теории кодирования и задачах диагностирования



Литература

- **Горбатов В.А.** Основы дискретной математики. М.: Высш. шк., 1986. С. 9-12.
- **Тевяшев А.Д., Гусарова И.Г.** Основы дискретной математики в примерах и задачах. Харьков: ХТУРЭ, 2001. С. 11-17.
- **Лавров И.А., Максимова Л.Л.** Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 4-10 с.
- **Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М.** Дискретная математика для инженера. М.: Энергия, 1980. 344 с.
- **Новиков Ф.А.** Дискретная математика для программистов. С.-П., 2001. С. 4-24.
- **Хаханов В.І., Хаханова І.В., Кулак Е.М., Чумаченко С.В.** Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Дискретна математика". Харків, ХНУРЕ. 2001. 87с.
- **Хаханов В.И., Чумаченко С.В.** Дискретная математика. Электронный учебник. ХНУРЭ: Электронная библиотека кафедры АПВТ (ауд. 320) NSERV\Library\Чумаченко\Дискретная математика\...



Термины

Базовые понятия:

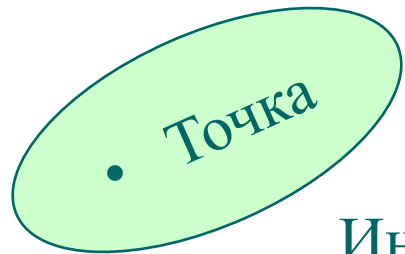
- множество
- упорядоченная пара
- подмножество

Ключевые слова:

- декартово (прямое) произведение множеств
- соответствие
- всюду определенность
- сюръективность
- инъективность
- функциональность
- биекция (взаимная однозначность)



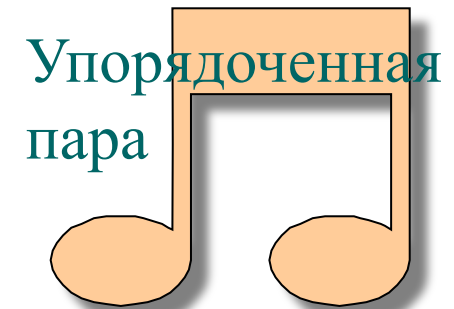
Основные понятия: упорядоченная пара, вектор



Информация



Множество



- Упорядоченная пара является одним из **первичных** понятий в теории множеств
- Под **упорядоченной парой** следует понимать двухэлементное упорядоченное множество
- **Вектор (кортеж)** представляет собой упорядоченный набор элементов
 - $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_i – координаты (компоненты)
- **Длина (размерность)** вектора определяется количеством его координат



Проекция вектора на ось

Два вектора $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ одинаковой размерности **равны**, если их соответствующие компоненты равны:

$$\mathbf{x}=\mathbf{y} \Leftrightarrow \forall i \quad x_i=y_i$$

Def: проекцией вектора $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на i -ю ось называется его i -й компонент $\text{Pr}_i \mathbf{x} = x_i$

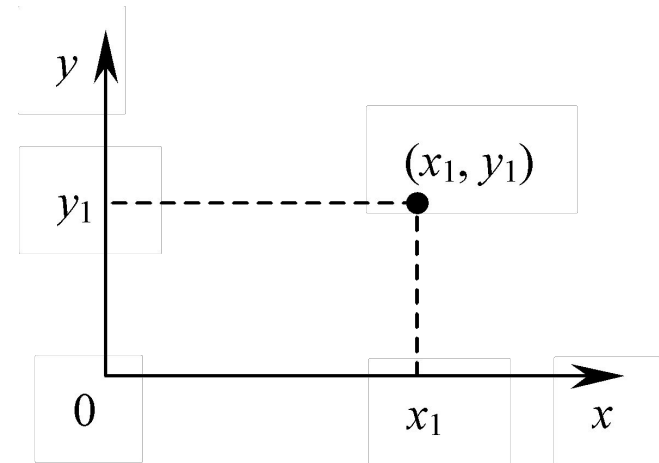
Def: пусть V – множество векторов одинаковой длины, тогда **проекцией множества V на i -ю ось** называется множество проекций всех векторов из V :

$$\text{Pr}_i V = \{ \text{Pr}_i v \mid v \in V \}$$



Примеры

- Координаты точки плоскости образуют упорядоченную пару: на первой позиции – абсцисса, на второй – ордината. Они являются проекциями на первую и вторую оси соответственно



- Дано множество V векторов размерности 3:

$$V = \{ (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), (\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{d}), (\mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) \}$$

Найти проекции множества V на оси

$$\text{Pr}_1 V = \{\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}\}$$

$$\text{Pr}_2 V = \{\mathbf{b}\}$$

$$\text{Pr}_3 V = \{\mathbf{c}, \mathbf{d}\}$$

Декартово (прямое) произведение множеств 1



Def: прямое (декартово) произведение множеств A и B есть множество всех упорядоченных пар (a,b) таких, что $a \in A$, $b \in B$:

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B \}$$

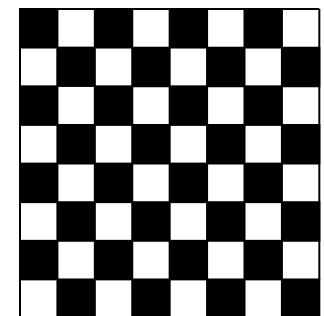
Примеры

1. Декартово произведение множеств $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4,5\}$ есть

$$A \times B = \{ (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5) \}$$

2. $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $B=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

$A \times B$ – обозначение клеток шахматной доски



Декартово (прямое) произведение множеств 2

- Декарту принадлежит координатное представление точек плоскости
- Множество точек плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ есть множество пар вида (a, b) , $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

- Декартов квадрат ($A=B$):

$$A \times A = A^2 = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A\}$$

! Def: прямое произведение n множеств

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i=1, n\}$$

! Мощность декартова произведения множеств:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$$



Рене Декарт
XVI-XVII вв.

Соответствия



- **Def: соответствие** – подмножество декартова произведения двух множеств:

$$G \subseteq A \times B$$

- **A** – область определения (множество отправления)
соответствия **G** :

$$\text{Pr}_1 G = \{ x \mid (x, y) \in G \}$$

- **B** – область значений (множество прибытия)
соответствия **G** :

$$\text{Pr}_2 G = \{ y \mid (x, y) \in G \}$$



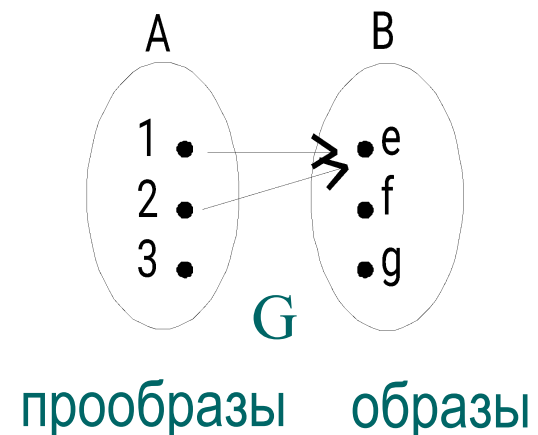


Образы и прообразы

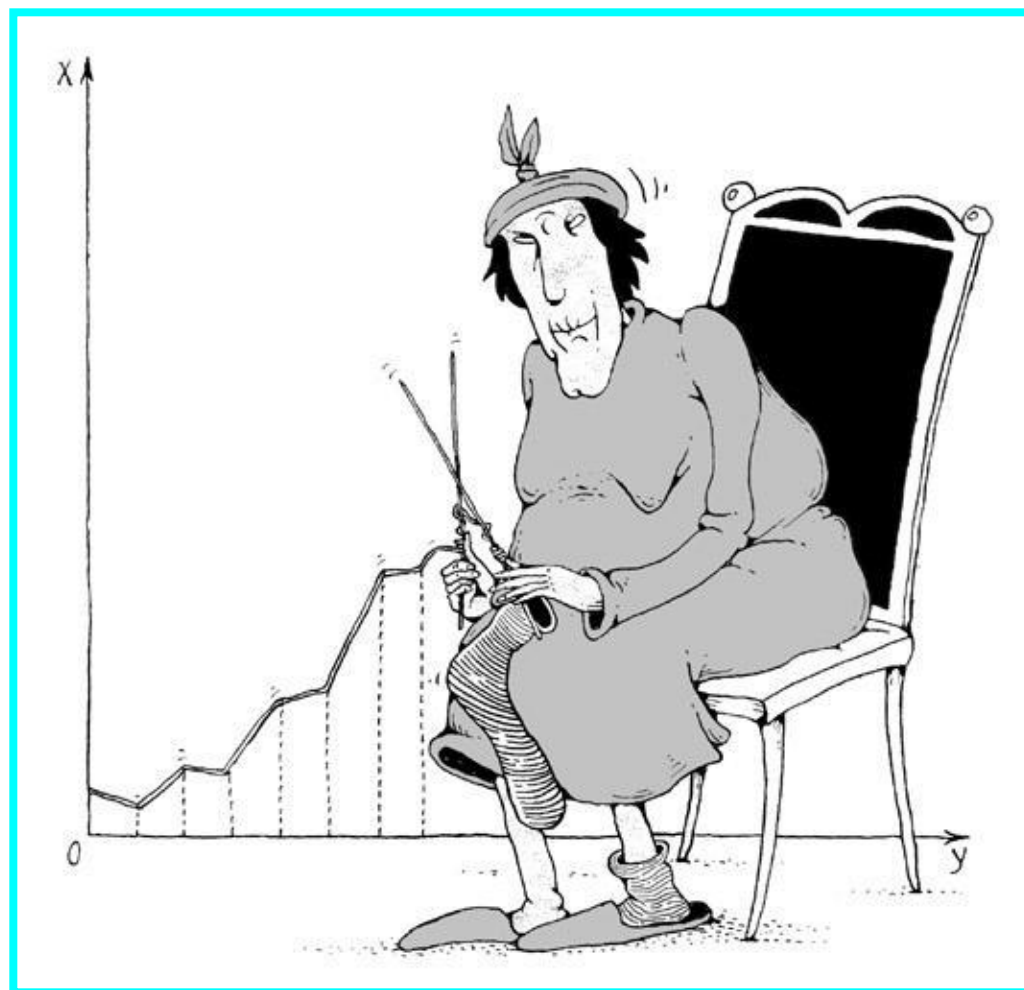
- Def:** множество всех элементов $y \in B$, соответствующих элементу $x \in A$, называется **образом** элемента x в множестве B при соответствии G .
- Def:** множество всех элементов $x \in A$, которым соответствует элемент $y \in B$, называется **прообразом** элемента y в множестве A при соответствии G .
- Пример**

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{e, f, g\}$$

$$G = \{(1, e), (2, e)\} \subseteq A \times B$$



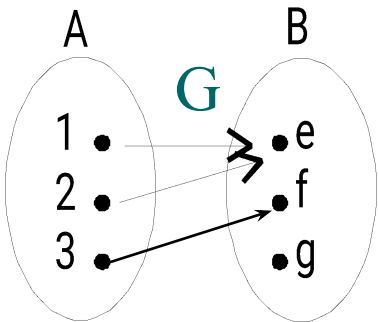
Time Out



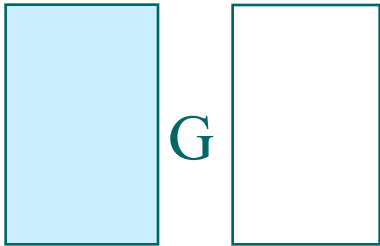
Свойства соответствий. 1



■ Всюду определенность: $Pr_1 G = A$

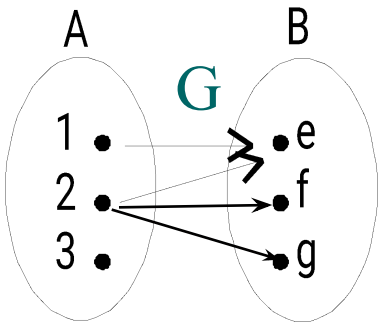


Пример

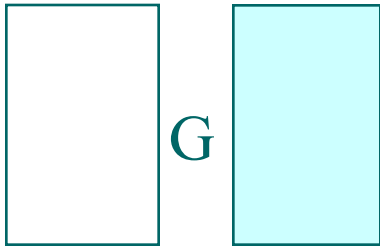


Схема

■ Сюръективность: $Pr_2 G = B$



Пример



Схема

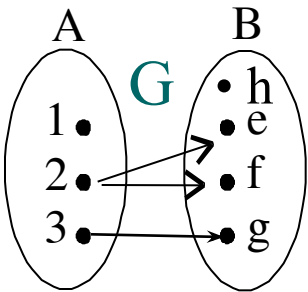


Свойства соответствий. 2



■ **Инъективность:**

$$G : A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall y \in \text{Pr}_2 G \subset B \exists! x \in \text{Pr}_1 G \subset A$$



Пример

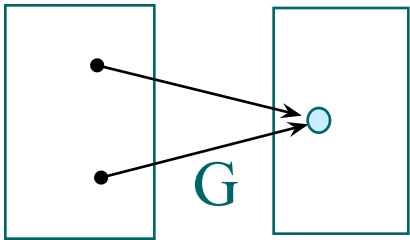
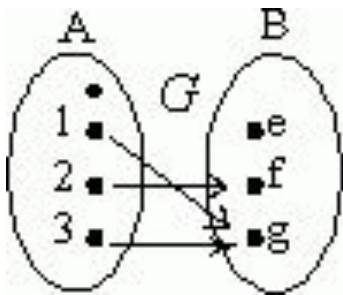


Схема (контрпример)

■ **Функциональность:**

$$G : A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall x \in \text{Pr}_1 G \subset A \exists! y \in \text{Pr}_2 G \subset B$$



Пример

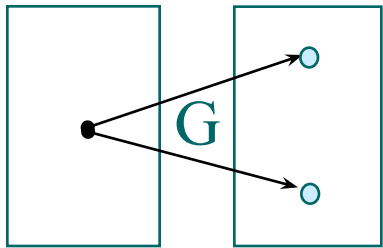
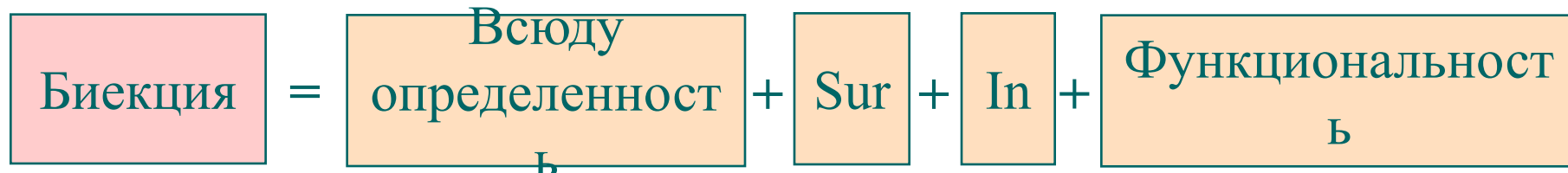


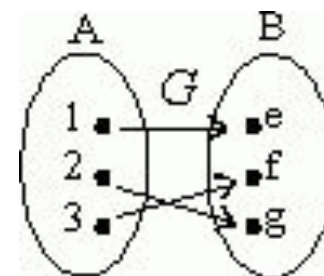
Схема (контрпример)



Взаимно-однозначное соответствие (биекция). Функция. Отображение



- Соответствие **взаимно-однозначно (биективно)**, если оно обладает одновременно всеми названными свойствами

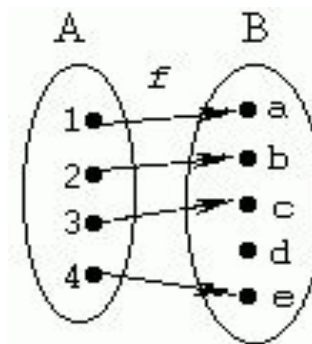


- Функция** – функциональное соответствие

$$f : A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall x \in Pr_1 \subset A \exists ! y \in Pr_2 \subset B : f(x) = y$$

x – аргумент, y – значение функции

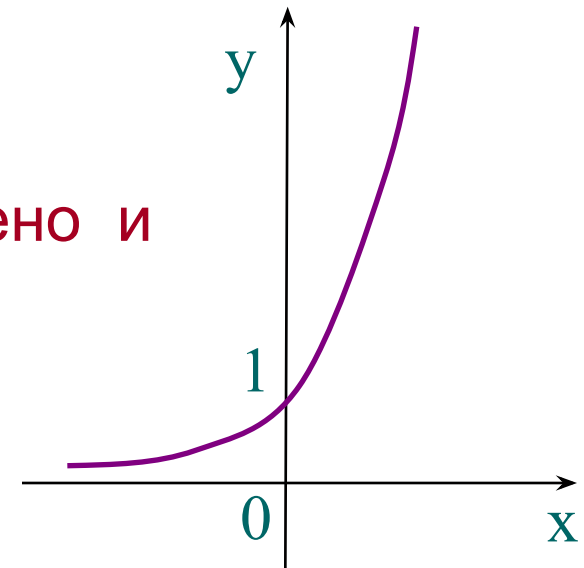
- Отображение** – всюду определенная функция



Пример

Соответствие $G = \{ (x, y) \mid y = \exp x \} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$

- **всюду определено**: $\text{Pr}_1 G = (-\infty; \infty) = \mathbf{R}$
- не **sur**: $\text{Pr}_2 G = (0; \infty) \neq \mathbf{R}$
- **in**: образ имеет единственный прообраз
- **функционально**: каждому прообразу соответствует единственный образ
- не является **bi**
- **функция**, так как функционально
- **отображение**, так как всюду определено и функционально



Применение в задачах теории кодирования

Виды кодирования:

- кодирование букв азбукой Морзе
- представление чисел в системах счисления
- секретные шифры
- входящие и исходящие номера в деловой переписке

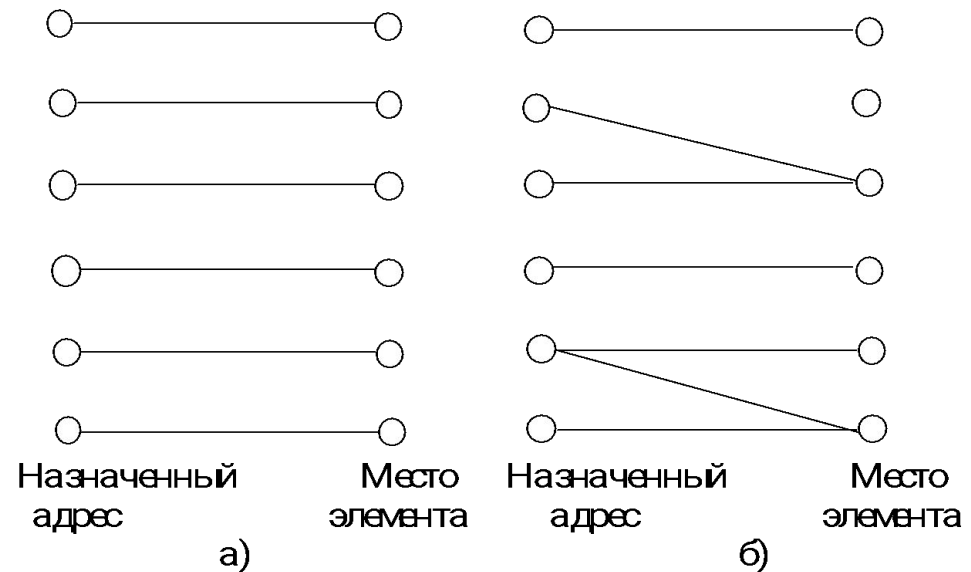
являются соответствиями между кодируемыми объектами и присваиваемыми им кодами

- Они обладают всеми свойствами взаимно-однозначного соответствия, кроме сюръективности
- Единственность образа и прообраза в кодировании гарантирует однозначность шифровки и дешифровки
- Отсутствие сюръективности означает, что не каждый код имеет смысл. Например, кодирование телефонов шестизначными номерами не сюръективно



Применение в задачах диагностирования

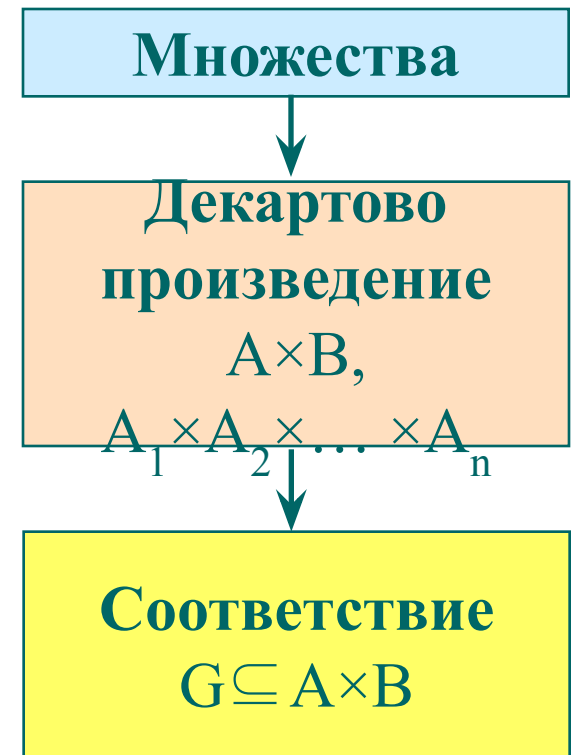
При диагностировании микросхем полупроводниковой памяти работу дешифратора адреса можно представить в виде графа адресной дешифрации, показывающего соответствие между адресами и элементами памяти



Граф адресной дешифрации:
а – случай исправной схемы;
б – случай с неисправностью

Выводы

- Соответствие представляет собой произвольное подмножество декартова произведения двух множеств
- Если множества имеют одинаковое количество элементов, то между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие
- Классификация соответствий применяется в задачах компьютерной инженерии и управления



Тест-вопросы. 1

1. Могут ли повторяться компоненты вектора?

а) да; б) нет.

2. Длина вектора определяется:

а) числом различных элементов;

б) числом координат.

3. Какое из соответствий называется взаимно-однозначным:

а) сюръективное, инъективное и функциональное?

б) сюръективное и инъективное?

в) всюду определенное, сюръективное, инъективное и функциональное?



Тест-вопросы. 2

4. Является ли отображение биективным, если оно сюръективно и инъективно?
а) да; б) нет.

5. Отображение A в B это:
а) частично определенная функция;
б) всюду определенная функция;
в) сюръективное соответствие;
г) инъективное соответствие.



Тест-вопросы. 3

6. Верно ли: $\forall A, B \quad A \times B = B \times A$?

- а) да;
- б) нет.

7. Указать проекцию множества $A = \{(3,3,5), (3,3,6), (3,5,5), (3,5,6), (8,3,5), (8,3,6), (8,5,5), (8,5,6)\}$

на третью ось

- а) $\text{Pr}A = \{3,8\}$,
- б) $\text{Pr}A = \{3,5\}$,
- в) $\text{Pr}A = \{5,6\}$.

8. Верно ли: $|A^n| = |A|^n$?

- а) да
- б) нет.

9. Соответствие является подмножеством

- а) объединения двух множеств;
- б) пересечения двух множеств;
- в) теоретико-множественной разности двух множеств;
- г) декартова произведения нескольких множеств;
- д) декартова произведения двух множеств.

