

**Государственный университет «Дубна»  
Факультет естественных и инженерных наук  
Кафедра Ядерной физики**

**Специальный семинар по физике ядра и ядерным реакциям**

**В.В.Самарин**

**Упругое рассеяние в центральном поле**

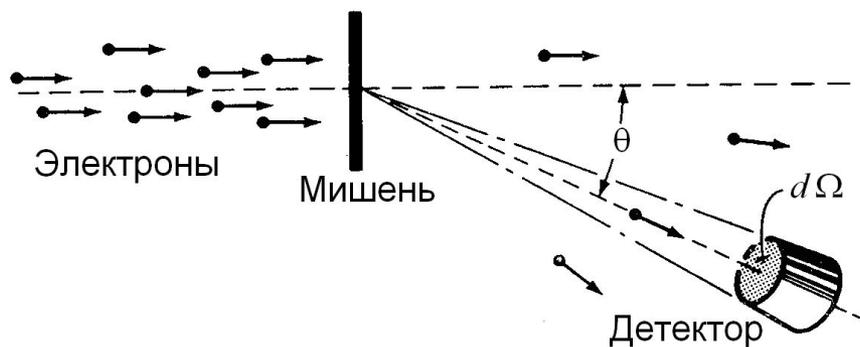
**Вопрос 4**

**2017**

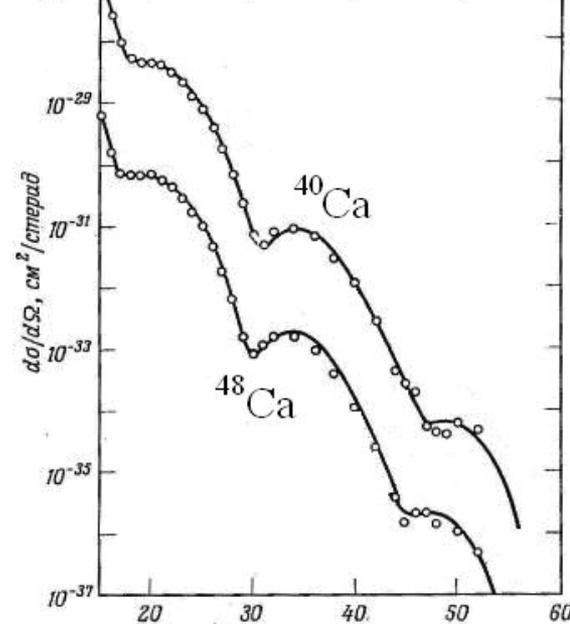
# Вопрос 4. Теория упругого рассеяния.

- Дифференциальное сечение рассеяния.
- Волновая функция и амплитуда рассеяния
- Борновское приближение.
- Парциальное разложение волновой функции и амплитуды рассеяния.
- Оптическая модель упругого рассеяния.

# Дифференциальное сечение рассеяния



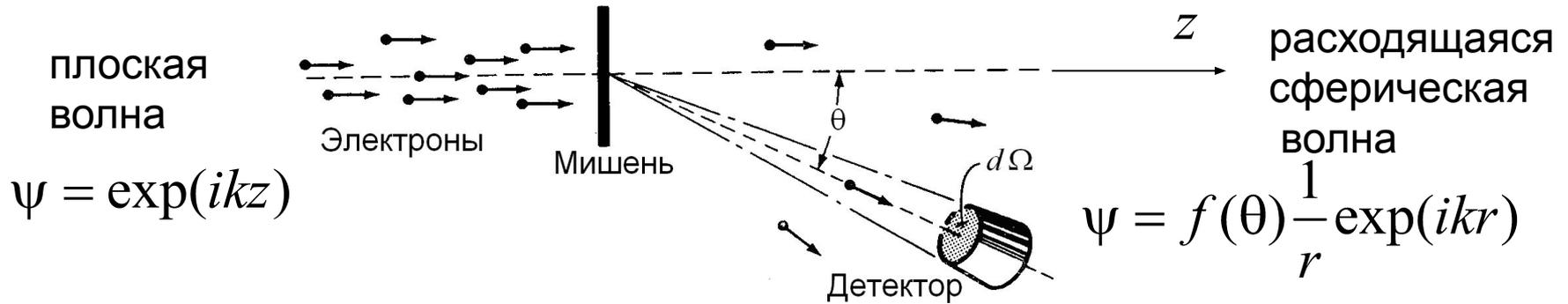
Пример: упругое рассеяние быстрых электронов на атомных ядрах



Зависимости от угла дифференциальных сечений рассеяния электронов с энергией 750 МэВ на ядрах кальция. Значения сечений рассеяния на ядрах  $^{40}\text{Ca}$  увеличены в 10 раз, а на ядрах  $^{48}\text{Ca}$  уменьшены в 10 раз.

Основным источником сведений о распределении электрического заряда в атомном ядре явилось исследование рассеяния быстрых электронов на ядрах, начатое Р. Хофштадтером с 1956 г. (Нобелевская премия по физике за 1961 г.). Схема опыта была аналогична схеме опыта Резерфорда с заменой альфа-частиц от радиоактивного препарата на ускоренные электроны. В типичных экспериментах (см. рис. ) интенсивный пучок релятивистских электронов с энергией от 150 МэВ до нескольких ГэВ направлялся из ускорителя в камеру с мишенью в виде тонкой плёнки. Измерялась интенсивность  $I(\theta)$  потока электронов, рассеянных в элемент телесного угла  $d\Omega$ . Отношение  $I(\theta)$  к плотности потока налетающих электронов представляет собой дифференциальное сечение рассеяния  $d\sigma/d\Omega$ . Его значения принято записывать в  $\text{см}^2/\text{ср.}$ ,  $\text{фм}^2/\text{ср.}$  ( $1 \text{ фм} = 10^{-15} \text{ м}$ ),  $\text{б}/\text{ср.}$  ( $1 \text{ бн} = 1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ см}^2$ ).

# Волновая функция $\psi$ и амплитуда рассеяния $f(\theta)$



Плотность потока вдоль оси z

$$j_z = \frac{i\hbar}{2m} \left( \psi \frac{\partial}{\partial z} \psi^* - \psi^* \frac{\partial}{\partial z} \psi \right) =$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} 2i \operatorname{Im} \left( \exp(ikz) \frac{\partial}{\partial z} \exp(-ikz) \right) =$$

$$= \frac{\hbar k}{m} = v$$

Волновая функция на больших расстояниях

$$\psi \approx \exp(ikz) + f(\theta) \frac{1}{r} \exp(ikr)$$

Поток вероятности  $I(\theta)$  через  $dS = r^2 d\Omega$

$$j_r dS = \frac{i\hbar}{2m} \left( \psi \frac{\partial}{\partial r} \psi^* - \psi^* \frac{\partial}{\partial r} \psi \right) \Bigg|_{\text{Детектор}} dS \approx$$

$$\approx \frac{i\hbar}{2m} \frac{1}{r^2} 2i \operatorname{Im} \left( \exp(ikr) \frac{\partial}{\partial r} \exp(-ikr) \right) r^2 |f(\theta)|^2 d\Omega =$$

$$= \frac{\hbar k}{m} |f(\theta)|^2 d\Omega = v |f(\theta)|^2 d\Omega$$

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega$$

Отношение  $I(\theta)$  к плотности потока налетающих частиц представляет собой дифференциальное сечение рассеяния  $d\sigma/d\Omega$ ,

выражается в единицах бн/ср, 1 барн равен: 1 бн =  $10^{-24}$  см<sup>2</sup>.

# Борновское приближение

в центральном поле  $U(r)$

$$\psi^{(0)} = \exp(ikz)$$

свободное движение

$$\Delta \psi^{(0)} + k^2 \psi^{(0)} = 0$$

точное уравнение Шредингера

$$\Delta \psi + k^2 \psi - \frac{2m}{\hbar^2} U \psi = 0$$

приближение для волновой фун

$$\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)}, \quad \psi^{(1)} \ll \psi^{(0)}$$

приближенное уравнение

$$\Delta \psi^{(1)} + k^2 \psi^{(1)} = \frac{2m}{\hbar^2} U \psi^{(0)}$$

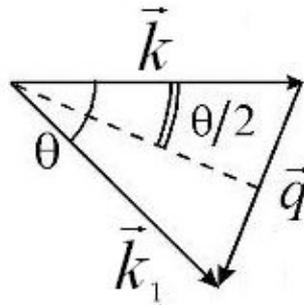
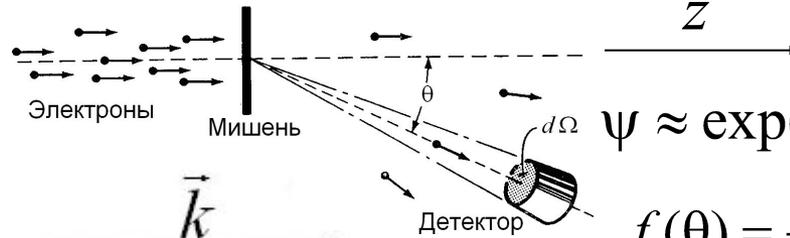
приближенное решение на больших расстояниях

расходящаяся сферическая волна

$$\psi^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \int \frac{2m}{\hbar^2} U(r') \exp(-iqr') dV'$$

$$\psi^{(1)} = f(\theta) \frac{1}{r} \exp(ikr)$$

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int U(r) \exp(-iqr) dV$$



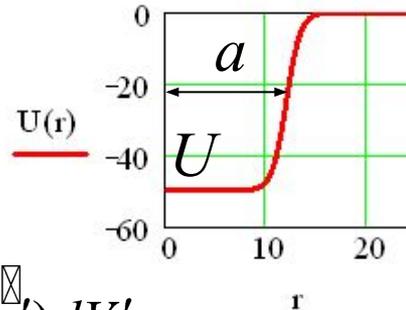
$$q = 2k \sin(\theta/2)$$

Дифференциальное сечение рассеяния

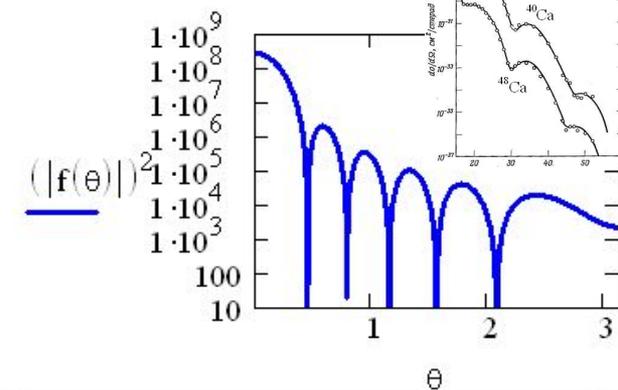
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

$r_0 := 12$     $\text{ainv} := 1.43$     $v_0 := 50$

$$U(r) := -v_0 \cdot \frac{1}{1 + \exp[(r - r_0) \cdot \text{ainv}]}$$



$$f(\theta) := \frac{1}{q(\theta)} \int_0^{10} U(r) \cdot \sin(r \cdot q(\theta)) \cdot r \, dr$$



Условия применимости

при малых скоростях

$$|U| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}, \quad ka \ll 1$$

при больших скоростях

$$|U| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2} \quad ka = \frac{\hbar v}{a}, \quad ka \gg 1$$

# Волновая функция частицы в центральном поле

Стационарное уравнение Шредингера

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(r)\psi = E\psi, \quad \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U(r))\psi = 0$$

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Здесь  $r, \theta, \varphi$  – сферические координаты,  $l$  – орбитальное квантовое число  
 $m = m_l$  – магнитное орбитальное квантовое число,

$$m = m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l.$$

Функции  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  называются сферическими гармониками (или сферическими функциями), в случае  $m = m_l = 0$  они выражаются через так называемые многочлены (полиномы) Лежандра

$$Y_{l0}(\theta) = C_l P_l(\cos \theta).$$

Радиальные части  $R_{nl}(r)$  находятся путем решения радиального уравнения Шредингера.

Собственные значения операторов квадрата и проекции момента импульса, квадрата орбитального момента и проекции орбитального момента

$$\hat{M}^2 Y_{lm} = \hbar^2 \hat{L}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}; \quad \hat{M}_z Y_{lm} = \hbar \hat{L}_z = \hbar m_l Y_{lm}$$

# Сферические гармоники и полиномы Лежандра: пример расчета в Maple

Функции  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  называются сферическими гармониками (или сферическими функциями), в случае  $m = m_l = 0$  они выражаются через так называемые многочлены (полиномы) Лежандра

$$Y_{l0}(\theta) = C_l P_l(\cos \theta). \quad (5.16)$$

В программе Maple есть возможность получать явный вид полиномов Лежандра и строить угловые диаграммы для плотности вероятности  $|Y_{l0}(\theta)|^2$  (см. рис. Пб.2).

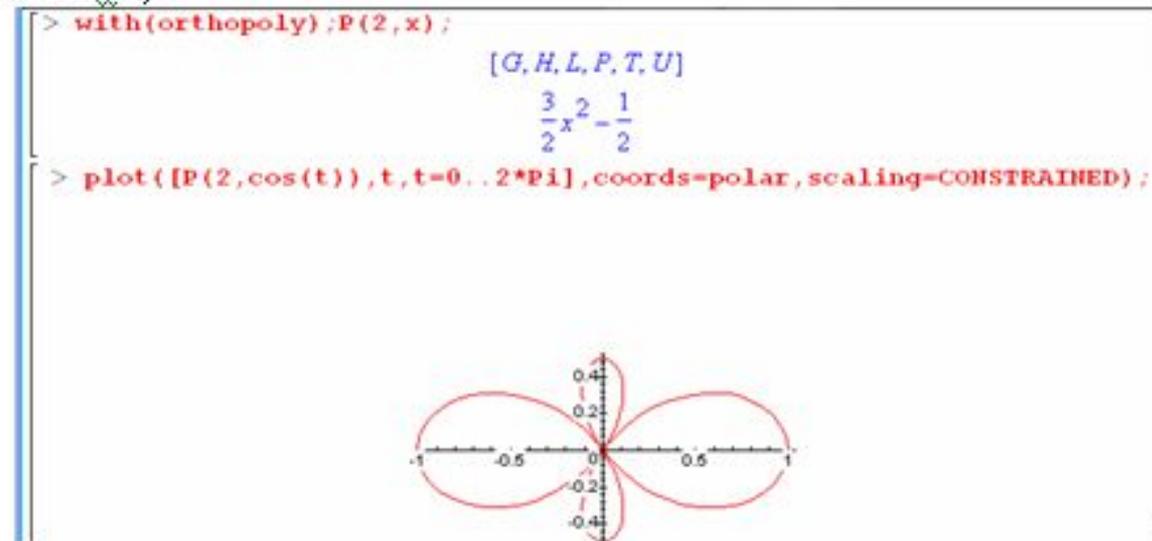
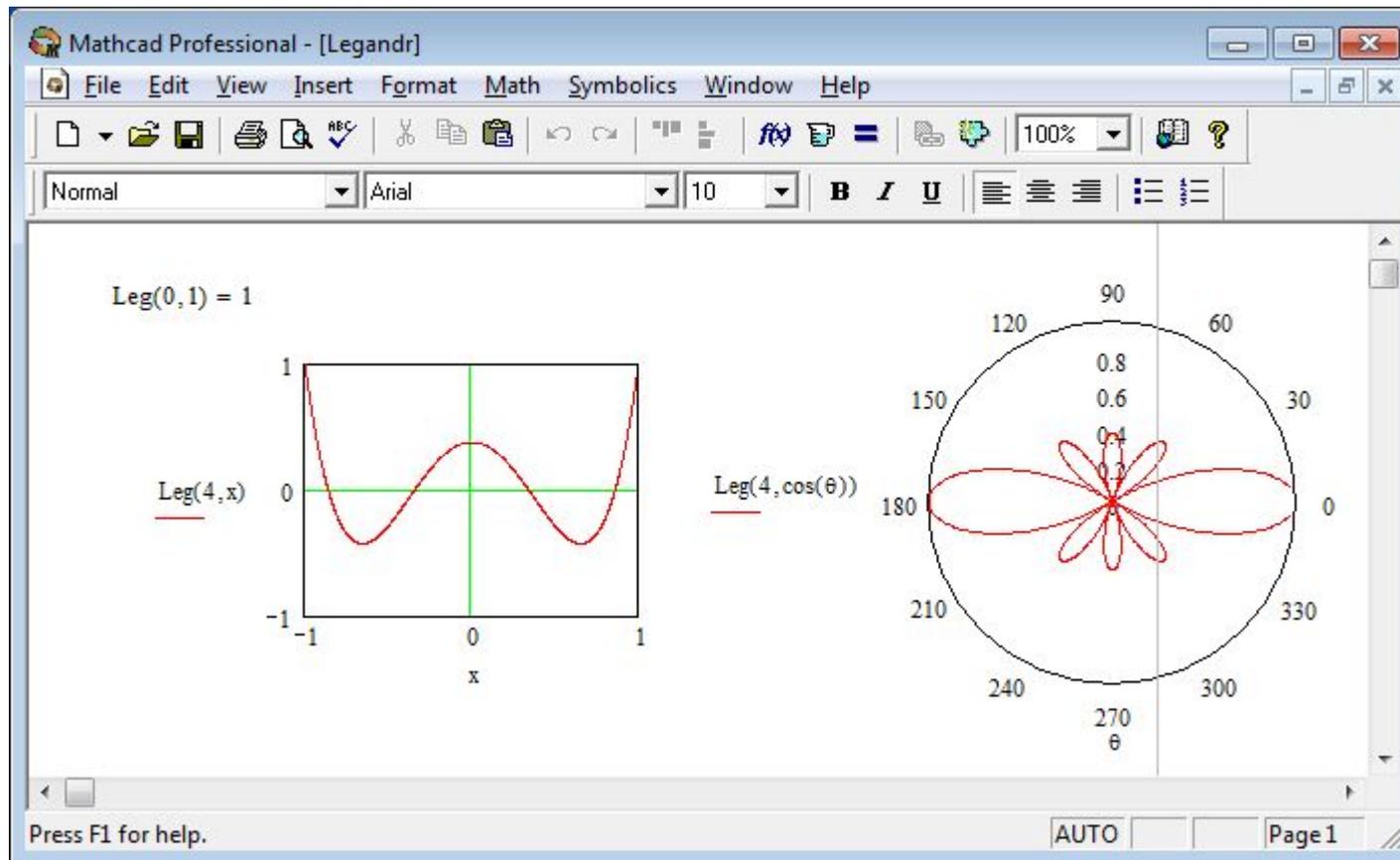


Рис. Пб.2. Построение угловой диаграммы для плотности вероятности  $|Y_{20}(\theta)|^2$  с помощью программы Maple

# Сферические гармоники и полиномы Лежандра: пример расчета в MathCAD

Функции  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  называются сферическими гармониками (или сферическими функциями), в случае  $m = m_l = 0$  они выражаются через так называемые многочлены (полиномы) Лежандра

$$Y_{l0}(\theta) = C_l P_l(\cos \theta). \quad (5.16)$$



# Парциальное разложение волновой функции свободного движения

плоская волна  $\xrightarrow{z}$

$j_l(x)$  – сферические функции Бесселя

$$\exp(ikz) = \exp(ikr \cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta) \approx$$

$$\approx \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right) P_l(\cos \theta)$$

Волновая функция на больших расстояниях от начала координат

парциальные волны:

$k := 1$   $R(L,r) := j_s(L,k \cdot r)$

$L1 := 0$

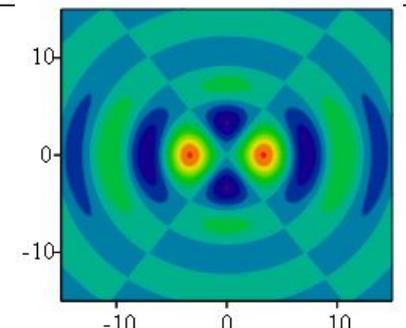
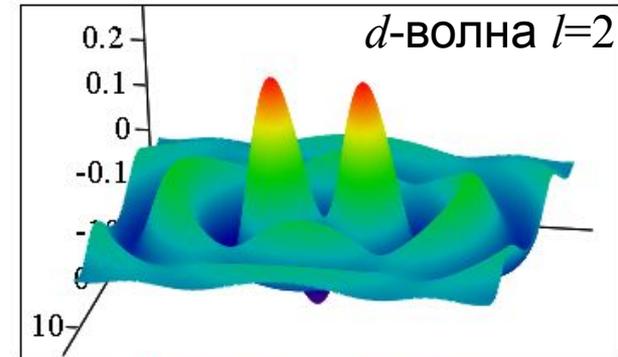
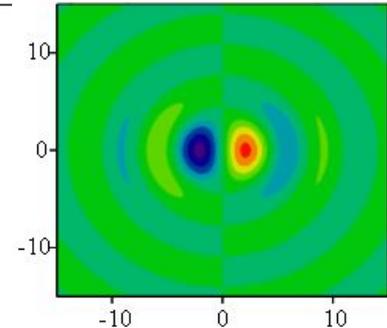
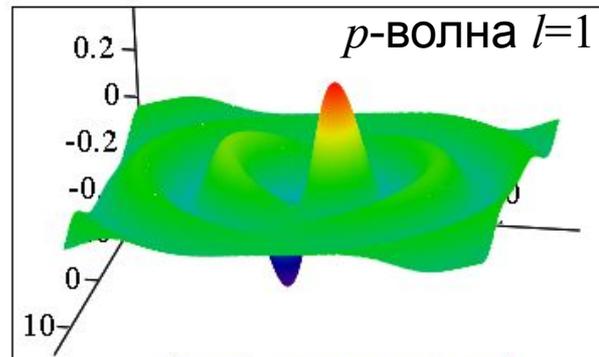
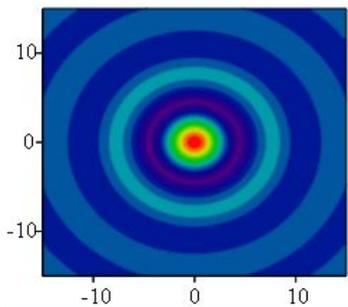
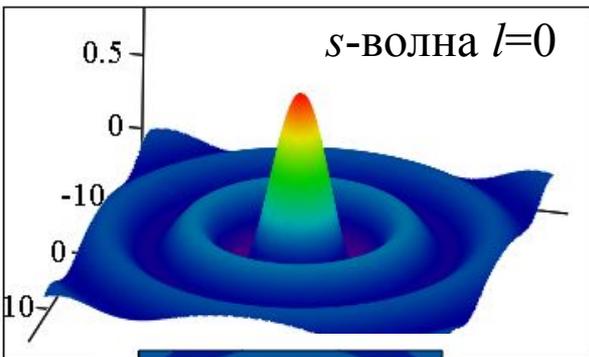
$$pw(x,z) := R(L1, \sqrt{x^2 + z^2}) \cdot \text{Leg}\left(L1, \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}\right)$$

$L1 := 1$

$$pw(x,z) := R(L1, \sqrt{x^2 + z^2}) \cdot \text{Leg}\left(L1, \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}\right)$$

$L1 := 2$

$$pw(x,z) := R(L1, \sqrt{x^2 + z^2}) \cdot \text{Leg}\left(L1, \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}\right)$$



# Парциальное разложение волновой функции свободного движения

плоская волна  $\xrightarrow{z}$

парциальные волны:

$$\exp(ikz) = \exp(ikr \cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta) \approx$$

$$\approx \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right) P_l(\cos \theta)$$

Волновая функция на больших расстояниях от начала координат

$s$ -волна  $l=0$

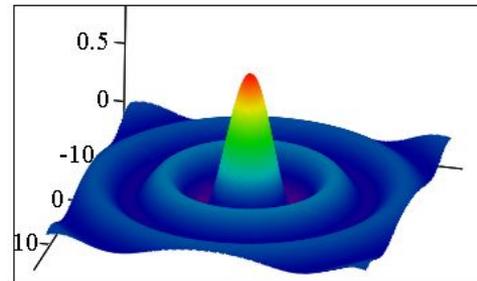
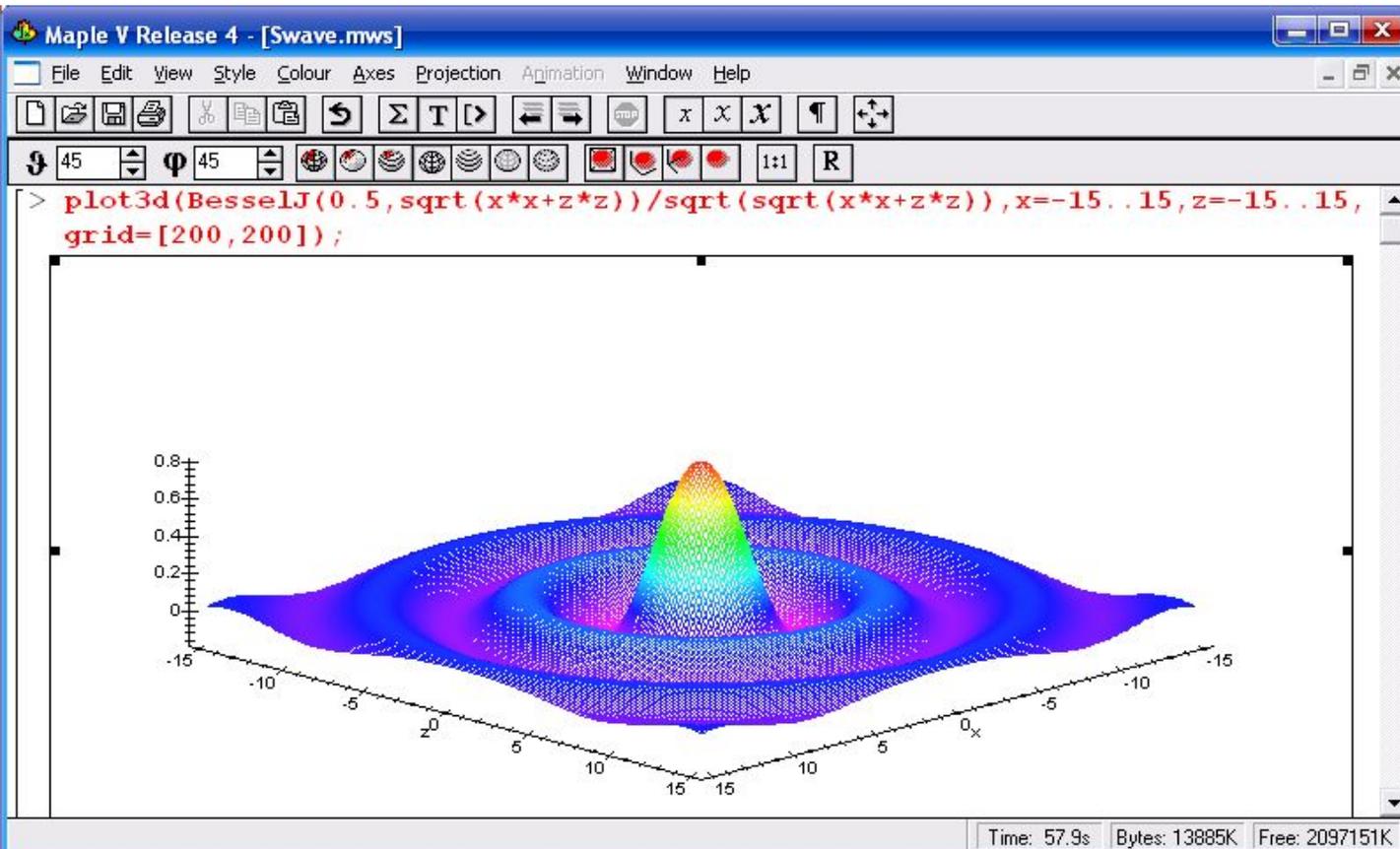
$j_l(x)$  – сферические функции Бесселя

$$j_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{l+1/2}(kr)$$

$$k := 1 \quad R(L,r) := js(L,k \cdot r)$$

$$L1 := 0$$

$$pw(x,z) := R(L1, \sqrt{x^2 + z^2}) \cdot \text{Leg}\left(L1, \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}\right)$$



# Парциальное разложение волновой функции свободного движения

плоская волна  $\xrightarrow{z}$

парциальные волны:

$$\exp(ikz) = \exp(ikr \cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta) \approx$$

$$\approx \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \sin(kr - \frac{\pi l}{2}) P_l(\cos \theta)$$

Волновая функция на больших расстояниях от начала координат

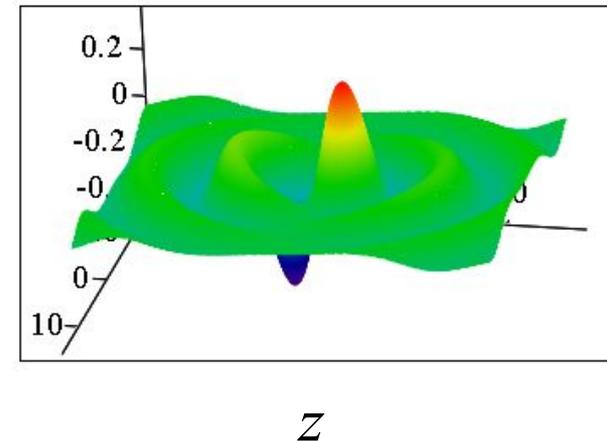
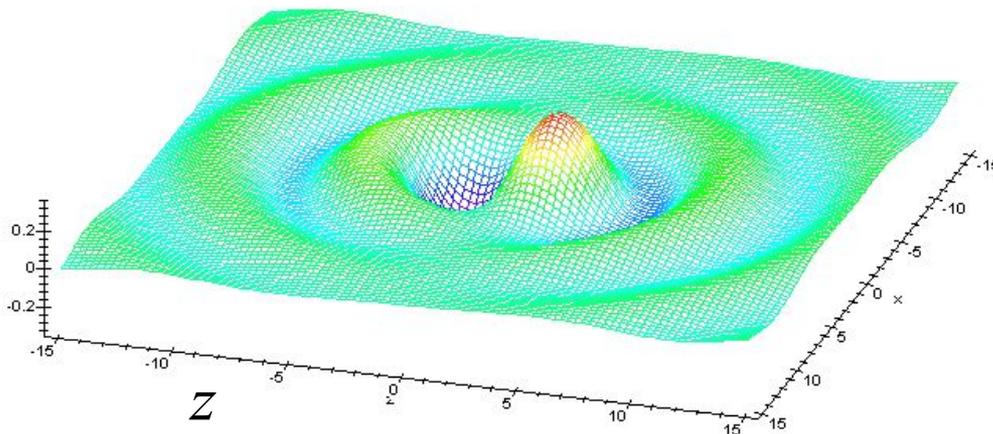
$p$ -волна  $l=1$

$j_l(x)$  – сферические функции Бесселя

$$j_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{l+1/2}(kr)$$

```
> with(orthopoly);
[G, H, L, P, T, U]
> L:=1; f:=(x, y) -> BesselJ(L+0.5, sqrt(x*x+z*z))/sqrt(sqrt(x*x+z*z))*P(L, z/sqrt(x*x+z*z));
L=1
BesselJ(L+0.5, sqrt(x*x+z*z))*P(L, z/sqrt(x*x+z*z))
f:=(x, y) -> -----
sqrt(sqrt(x*x+z*z))
> plot3d(f(x, z), x=-15..15, z=-15..15, grid=[100, 100]);
```

```
L1 := 1
pw(x, z) := R(L1, sqrt(x^2 + z^2)) * Leg(L1, z/sqrt(x^2 + z^2))
```



# Парциальное разложение волновой функции свободного движения

плоская волна  $\xrightarrow{z}$

парциальные волны:

$$\exp(ikz) = \exp(ikr \cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta) \approx$$

$$\approx \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right) P_l(\cos \theta)$$

Волновая функция на больших расстояниях от начала координат

$d$ -волна  $l=2$

$j_l(x)$  – сферические функции Бесселя

$$j_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{l+1/2}(kr)$$

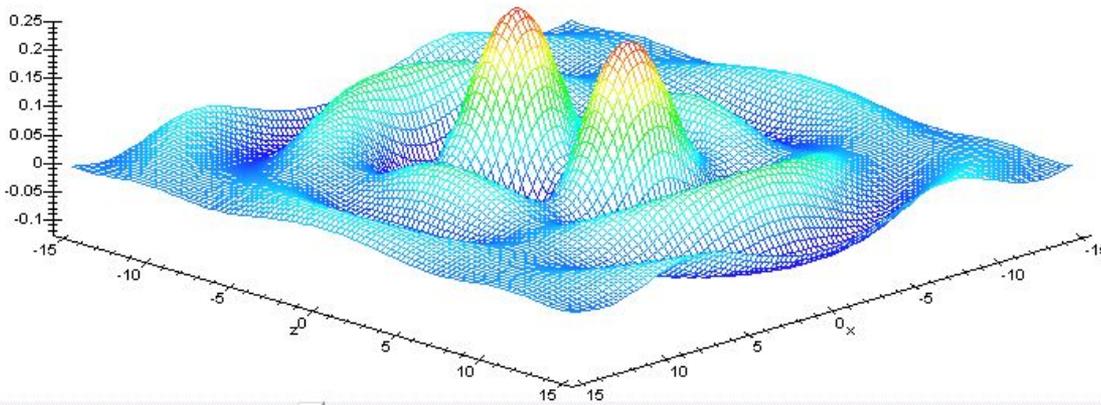
> with(orthopoly);

[G, H, L, P, T, U]

> f := (x, z) -> BesselJ(2.5, sqrt(x\*x+z\*z)) / sqrt(sqrt(x\*x+z\*z)) \* P(2, z/sqrt(x\*x+z\*z));

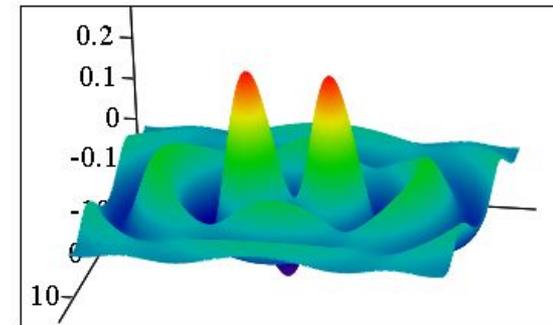
$$f = (x, z) \rightarrow \frac{\text{BesselJ}(2.5, \sqrt{x^2+z^2}) P\left(2, \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)}{\sqrt{\sqrt{x^2+z^2}}}$$

> plot3d(f(x, z), x=-15..15, z=-15..15, grid=[100, 100]);



L1 := 2

$$pw(x, z) := R(L1, \sqrt{x^2+z^2}) \cdot \text{Leg}\left(L1, \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)$$



# Парциальное разложение волновой функции и амплитуды рассеяния



$Z$  Волновая функция  
 на больших расстояниях  
 от рассеивающего центра

плоская волна

$$\exp(ikz) = \exp(ikr \cos \theta) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} a_l \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right) P_l(\cos \theta) \approx$$

$$\approx \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right) P_l(\cos \theta)$$

$$\psi \approx \exp(ikz) + f(\theta) \frac{1}{r} \exp(ikr)$$

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} A_l (2l+1) R_{kl}(r) P_l(\cos \theta)$$

$$\psi \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} A_l (2l+1) \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right) P_l(\cos \theta)$$

$$\psi \approx \frac{1}{2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left[ (-1)^l \exp(-ikr) - \exp(2i\delta_l + ikr) \right] P_l(\cos \theta)$$

Амплитуда рассеяния  $f(\theta) \approx \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left[ \exp(2i\delta_l) - 1 \right] P_l(\cos \theta)$

дифференциальное сечение рассеяния  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$

Парциальные фазы рассеяния

полное сечение рассеяния равно сумме парциальных сечений  $\sigma = 2\pi \int_0^{\pi} |f(\theta)|^2 \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l$

# Радиальная волновая функция для упругого рассеяния медленных частиц

Квадраты радиальных частей волновой функции и фаза рассеяния  $\delta_0$

$\sin^2(kr)$  Свободное движение

Рассеяние

$\sin^2(kr + \delta_0)$

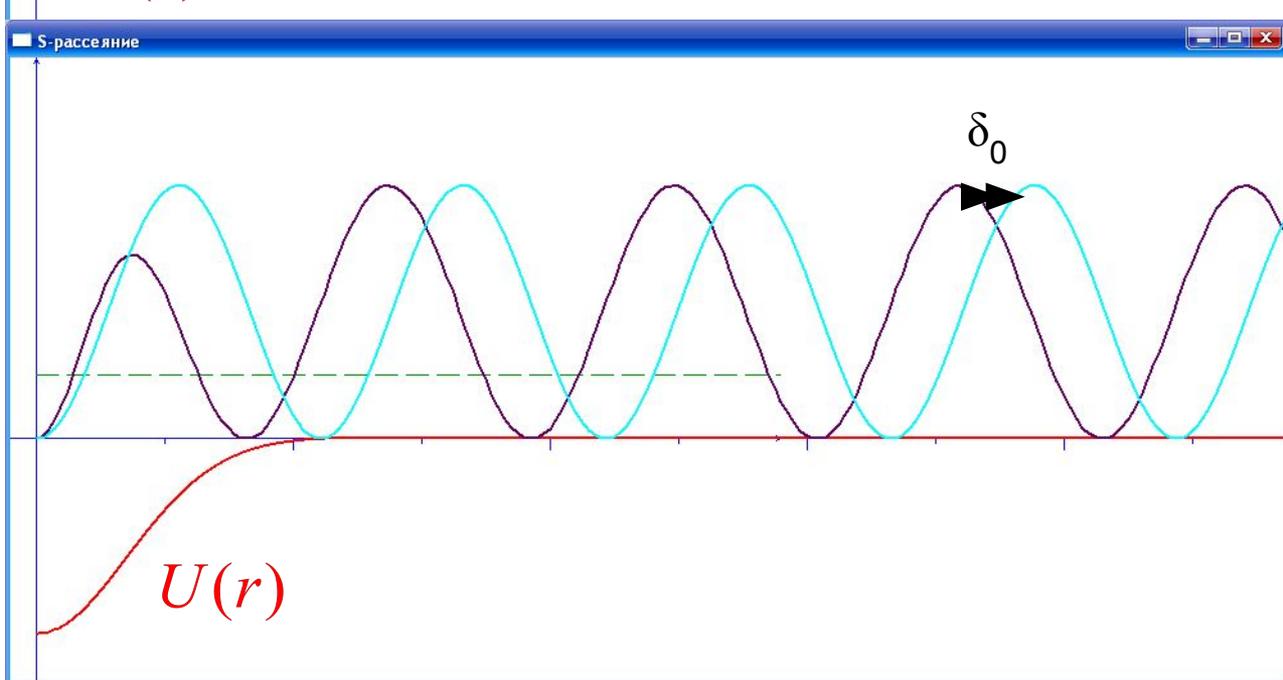
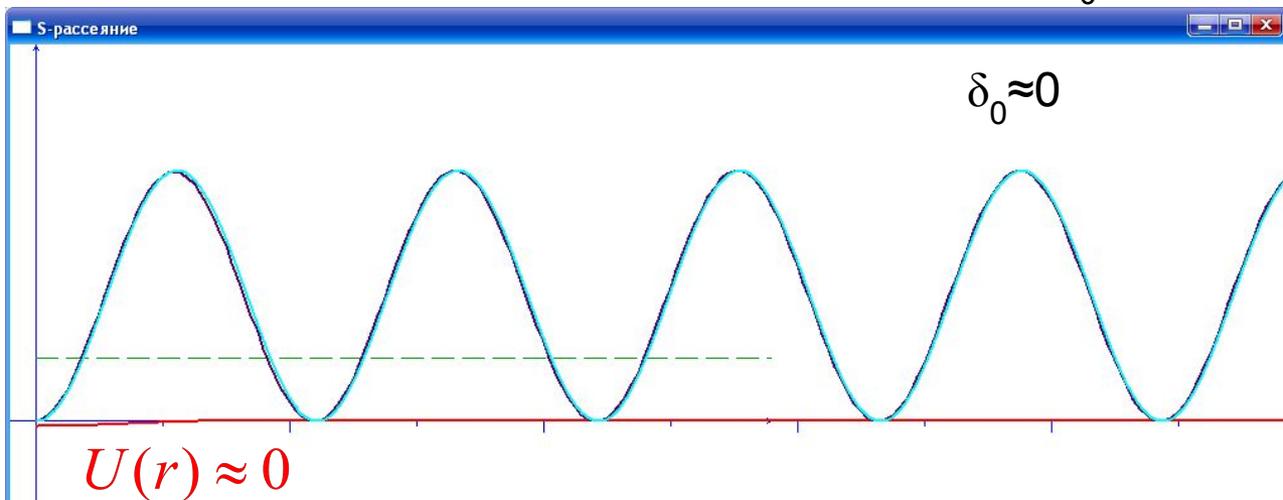
$\delta_0 = ka, k \rightarrow 0$

$a$  – длина рассеяния

$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \approx 4\pi a^2$

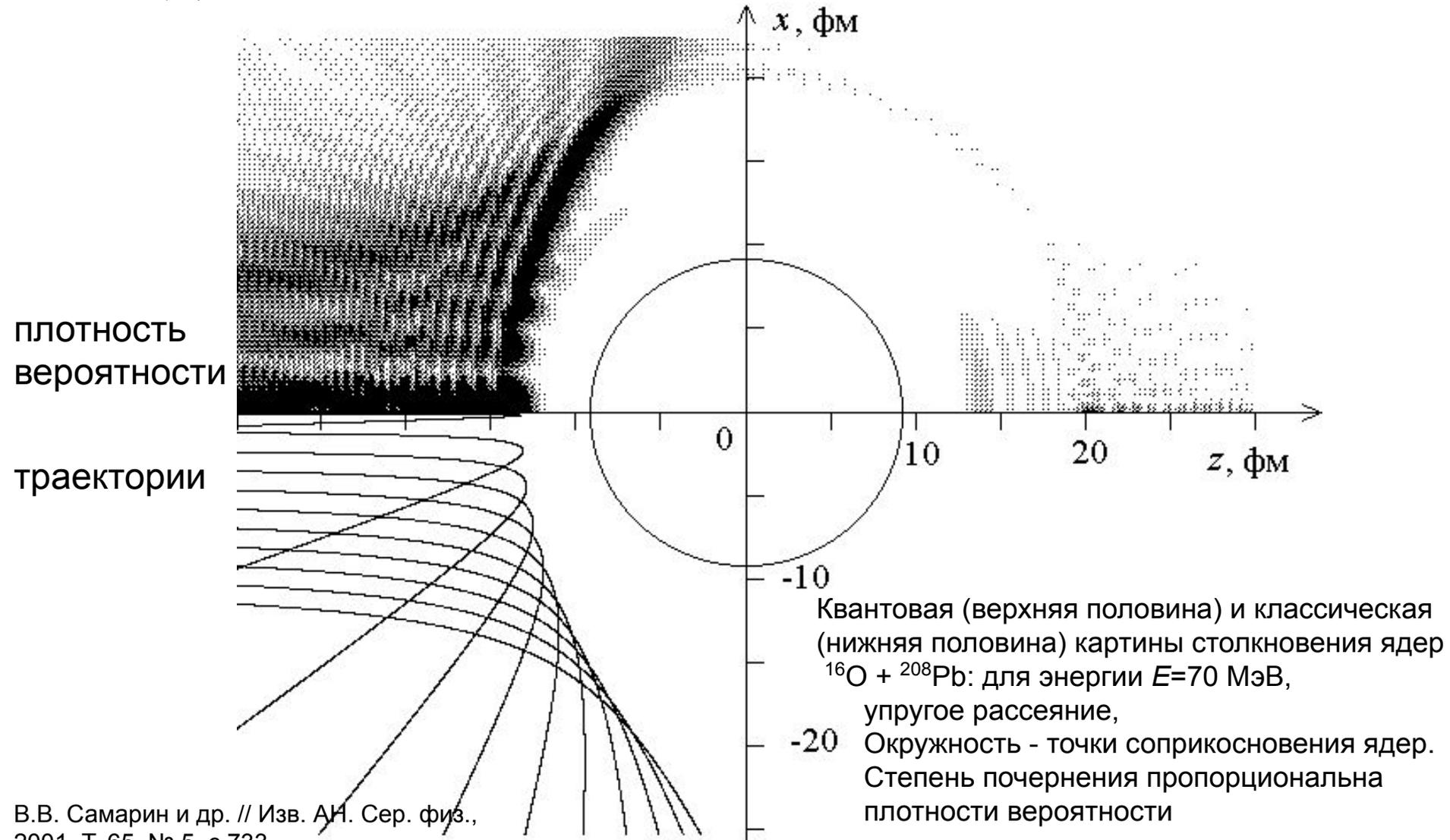
$f = \frac{1}{2ik} [\exp(2i\delta_l) - 1] P_0$

Рассеяние изотропно



# Пример волновой функции для рассеяния быстрых тяжелых частиц в кулоновском поле

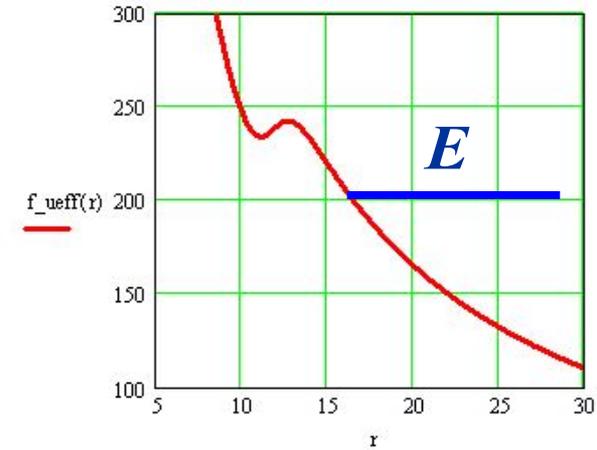
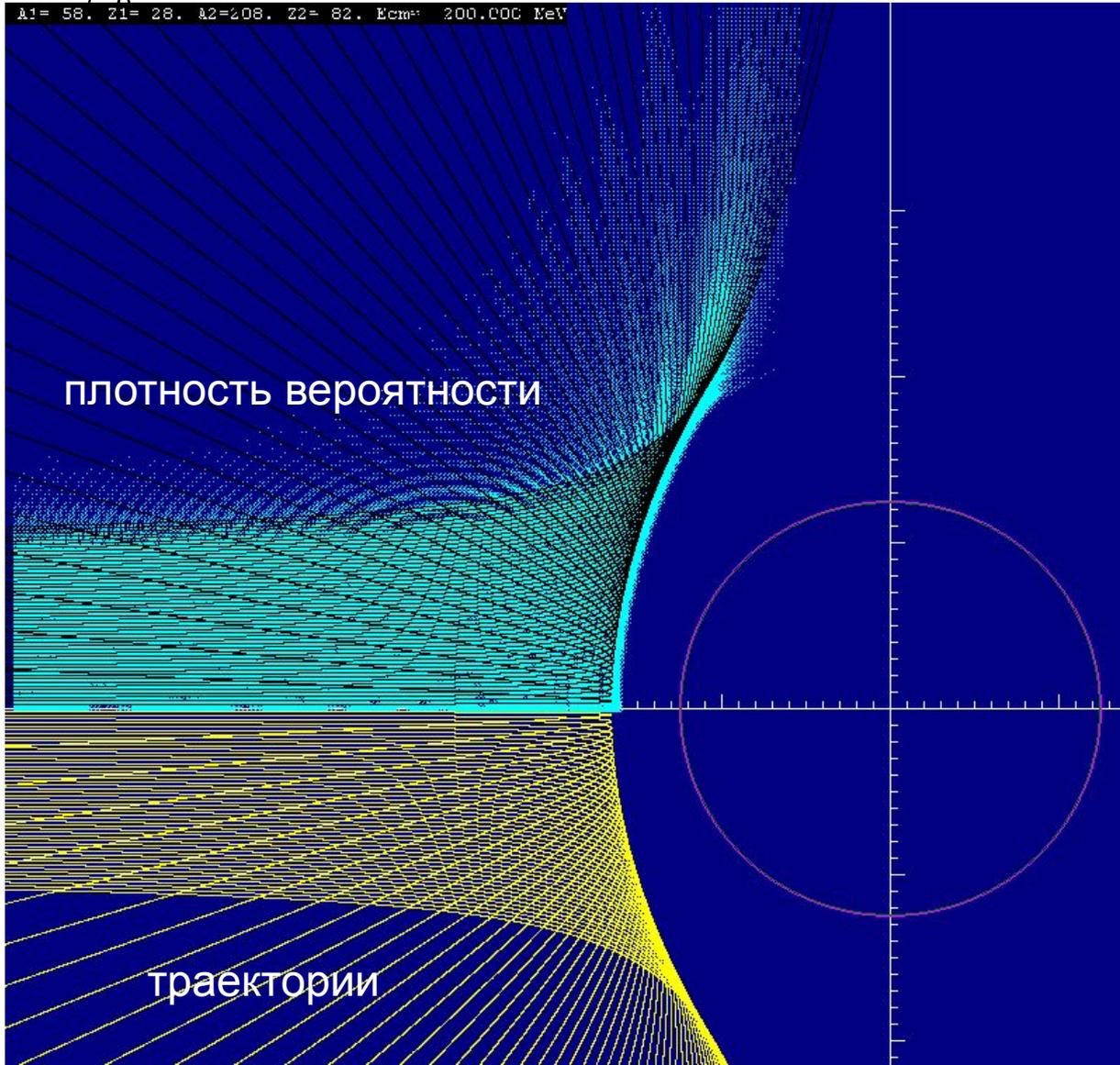
$$\psi = \sum_{l=0}^{L_{\max}} A_l (2l+1) R_{kl}(r) P_l(\cos \theta) \quad {}^{16}\text{O} + {}^{208}\text{Pb}$$



# Пример волновой функции для рассеяния быстрых тяжелых частиц в кулоновском поле

$$\psi = \sum_{l=0}^{L_{\max}} A_l (2l+1) R_{kl}(r) P_l(\cos \theta) \quad \text{Ni+Pb } E=200 \text{ МэВ}$$

$A_1 = 58, Z_1 = 28, A_2 = 208, Z_2 = 82, E_{\text{cm}} = 200.000 \text{ MeV}$



Волновая функция на больших расстояниях от ядра при  $r \rightarrow \infty$

$$\psi_k(r, \theta) = \exp[ikr \cos \theta + i\eta \ln(kr - kr \cos \theta)] + \frac{f_C(\theta)}{r} \exp[i(kr - \eta \ln 2kr)].$$

$\eta$  - кулоновский параметр (параметр Зоммерфельда)

$$\eta = \frac{\mu Z_1 Z_2 e^2}{k \hbar^2}$$

Кулоновская амплитуда рассеяния

$f_C(\theta)$  известна в явном виде  
сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} = |f_C(\theta)|^2 = \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 \sin^{-4} \theta / 2$$

совпадает с классической формулой

# Пример волновой функции для рассеяния быстрых тяжелых частиц в поле кулоновских и ядерных сил

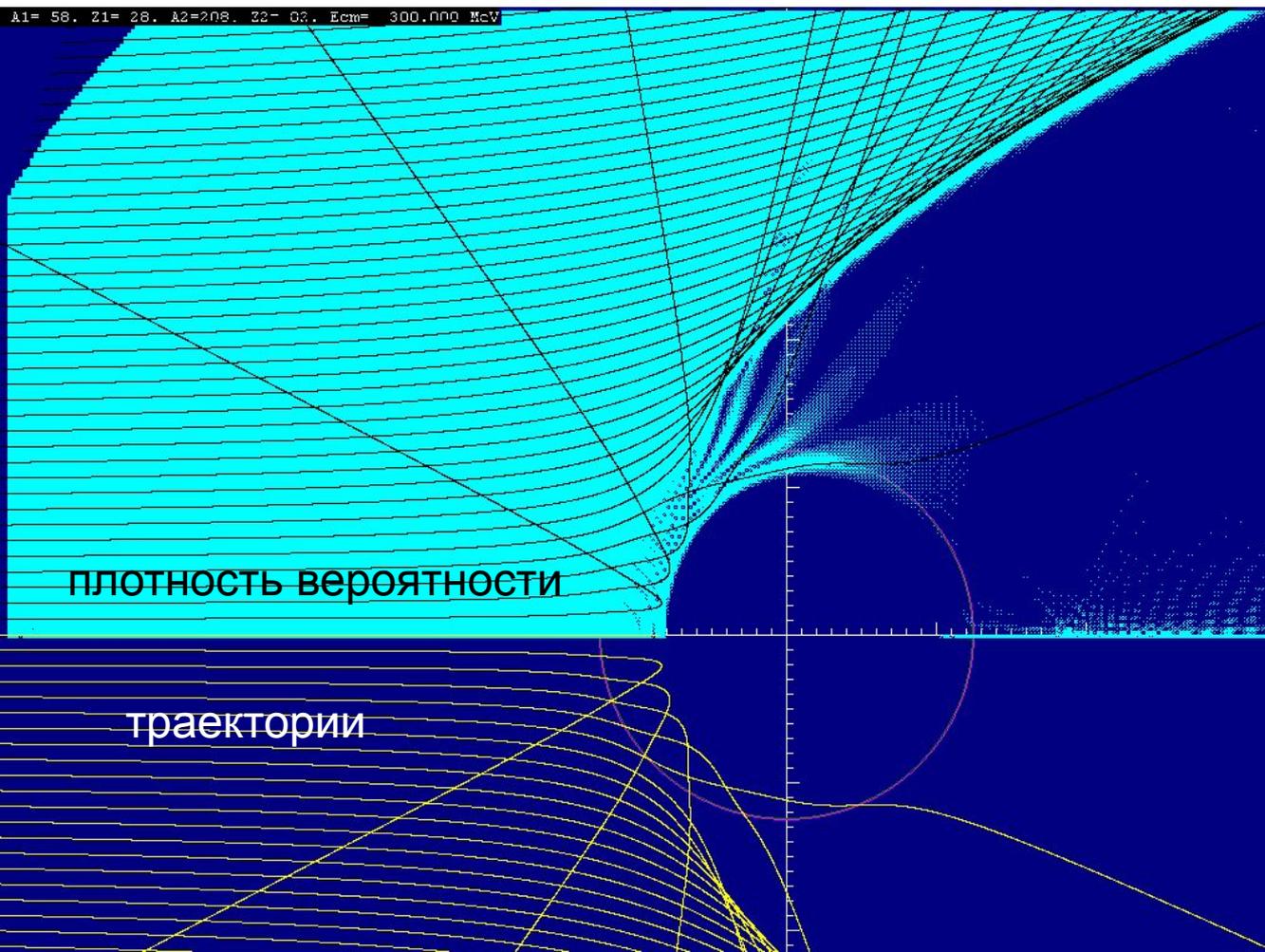
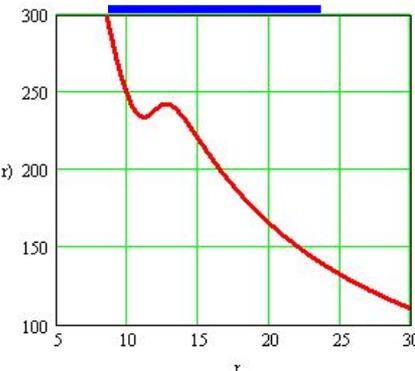
$$\psi = \sum_{l=0}^{L_{\max}} A_l (2l+1) R_{kl}(r) P_l(\cos \theta)$$

Ni+Pb  $E=300$  МэВ

Волновая функция на больших расстояниях от ядра при  $r \rightarrow \infty$

$$\psi_k(r, \theta) = \exp[ikr \cos \theta + i\eta \ln(kr - kr \cos \theta)] + \frac{f_C(\theta) + f_N(\theta)}{r} \exp[i(kr - \eta \ln 2kr)].$$

$E$



плотность вероятности

траектории

$\eta$ - кулоновский параметр (параметр Зоммерфельда)

$$\eta = \frac{\mu Z_1 Z_2 e^2}{k^2}$$

Кулоновская амплитуда рассеяния  $f_C(\theta)$  известна в явном виде

Ядерная амплитуда рассеяния

$f_N(\theta)$  находится на основе численного решения радиальных уравнений Шредингера для парциальных волн.

# Оптическая модель упругого рассеяния

Различные состояния, образующиеся после столкновения частиц, называют каналами реакции. Например, при столкновении протона с ядром A возможны следующие каналы реакции:

- $p+A \rightarrow p+A$  (упругое рассеяние)
- $p+A^*$  (неупругое рассеяние с возбуждением ядра-мишени)
- $n+A$  (выбивание нейтрона)
- $A1+A2$  (деление ядра)
- другие каналы

При энергиях, превышающих порог неупругих процессов, частица-снаряд может выйти из упругого канала. При этом число упруго рассеянных частиц всегда меньше, чем число частиц налетающих на ядро-мишень.

В нерелятивистской квантовой механике уменьшение потока частиц может быть смоделировано добавлением отрицательной мнимой части  $iW(r)$ ,  $W(r) < 0$ , к потенциалу взаимодействия ядер  $V(r)$ .

Нестационарное уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) + iW(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}, t) \quad \text{Фешбах, 1954 г.}$$

Уравнение непрерывности, описывающее поглощение частиц

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} = \frac{2}{\hbar} W(\mathbf{r}) \rho < 0$$

плотность вероятности

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \Psi^* \Psi$$

вектор плотности потока вероятности

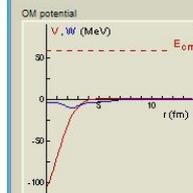
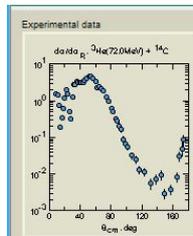
$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2im} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\Psi^* \nabla \Psi)$$

$$V(r) = V_C(r) + V_N(r) \quad |W_0| \quad |V_0|$$

$$W(r) = \frac{W_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R_W}{a_W}\right)} \quad \begin{array}{l} \text{объемное} \\ \text{поглощение} \end{array}$$

$$W(r) = W_0 \exp\left(-\frac{(r - R_W)^2}{b^2}\right)$$

поверхностное поглощение



# Литература

1. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Краткий курс теоретической физики. Т. 2. Квантовая механика. – М. Наука. 1971.
2. Фрауэнфельдер, Г. Субатомная физика. /Г. Фрауэнфельдер, Э. Хэнли. – М.: Мир. 1979.
3. Nuclear Reaction Video. База знаний по низкоэнергетическим ядерным реакциям.
4. <http://nrv.jinr.ru/nrv/>.
5. Н.Мотт, Г.Месси. Теория атомных столкновений. М.: Мир, 1969,.