

ОТНОШЕНИЯ

Декартово произведение

Под упорядоченной парой $(a; b)$ мы будем понимать двухэлементное множество, состоящее из элементов a и b , в котором зафиксирован порядок расположения элементов. Отметим два характерных свойства упорядоченных пар:

$$1) (a; b) \neq (b; a), \text{ если } a \neq b$$

$$2) (a; b) = (x; y) \leftrightarrow a = x \wedge b = y$$

Определение 1

Декартовым произведением множеств A и B называется множество

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Пример

Пусть $A = \{1; 2\}$, $B = \{a, b, c\}$, тогда

$$A \times B = \{(1; a); (1; b); (1; c); (2; a); (2; b); (2; c)\};$$

$$B \times A = \{(a; 1); (b; 1); (c; 1); (a; 2); (b; 2); (c; 2)\}.$$

Очевидно, что, вообще говоря, $B \times A \neq A \times B$

Определение отношения

- **Бинарным отношением на множестве X называется всякое подмножество декартова произведения $X \times X$.**
- *Так как в дальнейшем мы будем рассматривать только бинарные отношения, то слово «бинарные», как правило, будем опускать.*
- *Условимся отношения обозначать буквами R, S, T, P и др.*

Обозначения

- Если R - отношения на множестве X , то, согласно определению, $R \subseteq X \times X$. С другой стороны, если задано некоторое подмножество множества $X \times X$, то оно определяет на множестве X некоторое отношение R .
- Утверждение о том, что элементы x и y находятся в отношении R , можно записывать так: $(x, y) \in R$ или $x R y$. Последняя запись читается: «Элемент x находится в отношении R с элементом y ».

Пример (граф отношения)

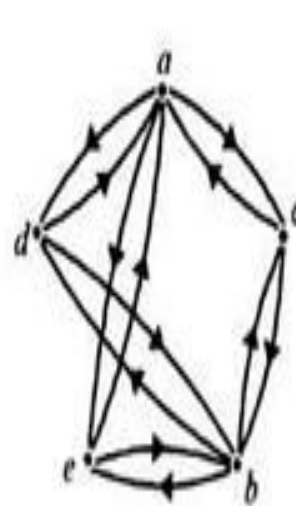
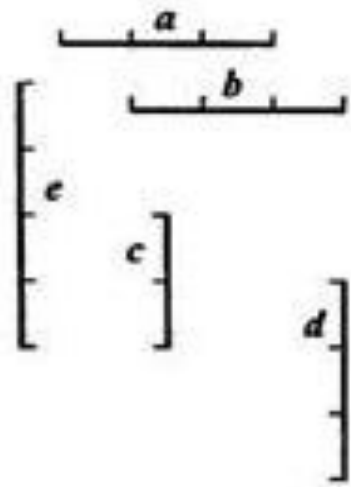
- *Построим, например, граф отношений «меньше», заданного на множестве*
- *$X = \{2, 4, 6, 8\}$. Для этого элементы множества X изобразим точками (их называют вершинами графа), а отношение «меньше» - стрелкой.*



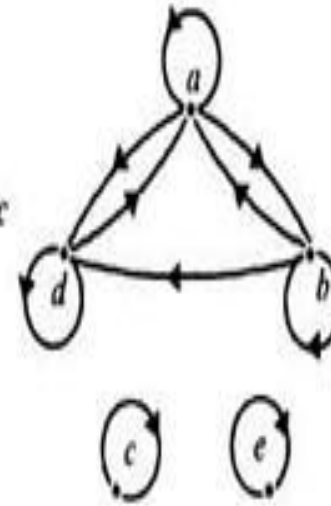
Матрица отношения

	2	4	6	8
2	0	1	1	1
4	0	0	1	1
6	0	0	0	1
8	0	0	0	0

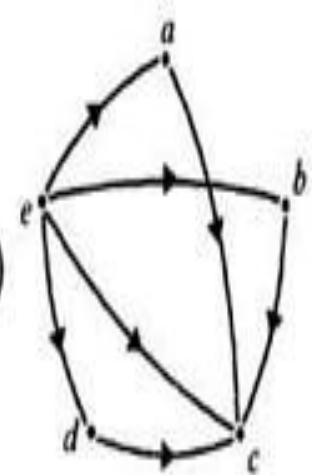
Пример (граф отношения)



Граф отношения перпендикулярности



Граф отношения равенства



Граф отношения «длиннее»

Рефлексивное отношение

- **Отношение R на множестве X называется рефлексивным, если о каждом элементе множества X можно сказать, что он находится в отношении R с самим собой.**
- *Используя символы, это отношение можно записать в таком виде:*
- **R рефлексивно на $X \Leftrightarrow xRx$ для любого x из X**
- *Если отношение R рефлексивно на множестве X , то в каждой вершине графа данного отношения имеется петля. Справедливо и обратное утверждение: граф, каждая вершина которого имеет петлю, задает отношения, обладающие свойством рефлексивности.*
- *Матрица – на главной диагонали единицы.*

Рефлексивное отношение

- *Примеры рефлексивных отношений:*
- *- отношение «кратно» на множестве натуральных чисел (каждое натуральное число кратно самому себе);*
- *- отношение подобия треугольников (каждый треугольник подобен самому себе).*
- *Существуют отношения, которые свойством рефлексивности не обладают. Таким, например, является отношение перпендикулярности на множестве отрезков: нет ни одного отрезка, о котором можно сказать, что он перпендикулярен самому себе. Поэтому на графе отношения перпендикулярности нет ни одной петли. Не обладает свойством рефлексивности и отношение «длиннее» для отрезков.*

Симметричные отношения

- *Отношение R на множестве X называется симметричным, если выполняется условие: из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y , следует, что и элемент y находится в отношении R с элементом x .*
- *Используя символы, это отношение можно записать в таком виде:*
- *R симметрично на $X \Leftrightarrow (xRy \Rightarrow yRx)$*
- *Граф симметричного отношения обладает особенностью: вместе с каждой стрелкой, идущей от x к y , граф содержит и стрелку, идущую от y к x . Справедливо и обратное утверждение. Граф, содержащий вместе с каждой стрелкой, идущей от x к y , и стрелку, идущую от y к x , является графом симметричного отношения.*

Симметричные отношения

- Примеры
- - *отношение параллельности на множестве прямых (если прямая x параллельна прямой y , то и прямая y параллельна прямой x);*
- - *отношение подобия треугольников (если треугольник F подобен треугольнику P , то треугольник P подобен треугольнику F).*
- *Существуют отношения, которые свойством симметричности не обладают. Таким, например, является отношение «длиннее» на множестве отрезков. Действительно, если отрезок x длиннее отрезка y , то отрезок y не может быть длиннее отрезка x .*

Антисимметричные

ОТНОШЕНИЯ

- *Отношение R на множестве X называется антисимметричным, если для различных элементов x и y из множества X выполнено условие: из того, что x находится в отношении R с элементом y , следует, что элемент y в отношении R с элементом x не находится.*
- *Используя символы, это определение можно записать в таком виде:*
- ***антисимметрично на $X \Leftrightarrow (xRy \text{ и } x \neq y \Rightarrow)$***
- *Граф антисимметричного отношения обладает особенностью: если две вершины графа соединены стрелкой, то эта стрелка только одна. Справедливо и обратное утверждение: граф, вершины которого соединены только одной стрелкой, есть граф антисимметричного отношения.*
- *Матрица не является симметричной относительно главной диагонали.*

Антисимметричные отношения

- - отношение «больше» для чисел (если x больше y , то y не может быть больше x);
- - отношение «больше на 2» для чисел (если x больше y на 2, то y не может быть больше на 2 числа x).
- Существуют отношения, не обладающие ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности. Рассмотрим, например, отношение «быть сестрой» на множестве детей одной семьи. Пусть в семье трое детей: Катя, Маша и Толя.

Транзитивные отношения

- **Отношение R на множестве X называется транзитивным, если выполняется условие: из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y и элемент y находится в отношении R с элементом z , следует, что элемент x находится в отношении R с элементом z .**
- *Используя символы, это определение можно записать в таком виде:*
- **R транзитивно на $X \iff (xRy \text{ и } yRz \implies xRz)$**
- *Граф транзитивного отношения с каждой парой стрелок, идущих от x к y и y к z , содержит стрелку, идущую от x к z . Справедливо и обратное утверждение.*
- *Транзитивность плохо распознается на матрицах.*

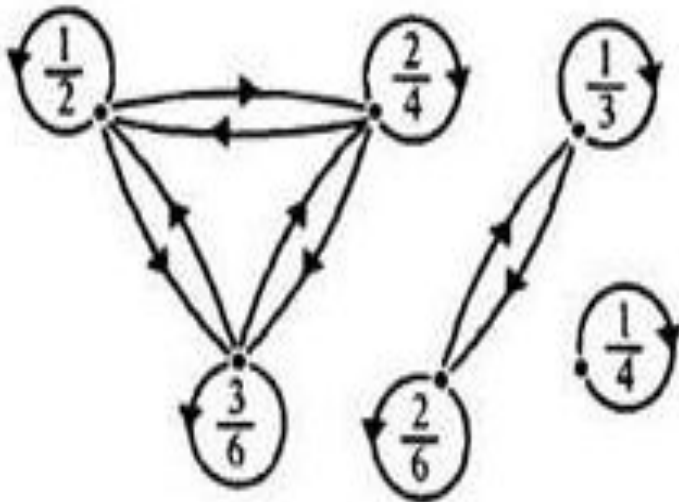
Транзитивные отношения

- *Кроме отношения «длиннее» на множестве отрезков свойством транзитивности обладает отношение равенства: если отрезок x равен отрезку y и отрезок y равен отрезку z , то отрезок x равен отрезку z . Это свойство отражено и на графе отношения равенства.*
- *Существуют отношения, которые свойством транзитивности не обладают. Таким отношением является, например, отношение перпендикулярности: если отрезок a перпендикулярен отрезку d , а отрезок d перпендикулярен отрезку b , то отрезки a и b не перпендикулярны!*

Отношение эквивалентности

- ***Отношение R на множестве X называется отношением эквивалентности, если оно одновременно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.***
- Примерами отношений эквивалентности могут служить отношения равенства геометрических фигур, отношение параллельности прямых (при условии, что совпадающие прямые считаются параллельными).

Разбиение на классы



- Видим, что множество разбилось на три подмножества: Эти подмножества не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством X , т.е. имеем разбиение множества X на классы. Это не случайно.
- Вообще **если на множестве X задано отношение эквивалентности, то оно порождает разбиение этого множества на попарно непересекающиеся подмножества (классы эквивалентности)**.
- Так, мы установили, что отношению равенства на множестве дробей соответствует разбиение этого множества на классы эквивалентности, каждый из которых состоит из равных между собой дробей.

Разбиение на классы эквивалентности

- *Принцип разбиения множества на классы при помощи некоторого отношения эквивалентности является важным принципом математики. Почему?*
- **Во-первых**, эквивалентный - это значит равносильный, взаимозаменяемый. Поэтому элементы одного класса эквивалентности взаимозаменяемы. Так, дроби, оказавшиеся в одном классе эквивалентности неразличимы с
- *точки зрения отношения равенства, и дробь может бы*

Разбиение на классы эквивалентности

- **Во-вторых**, поскольку в классе эквивалентности оказываются элементы, неразличимые с точки зрения некоторого отношения, то считают, что класс эквивалентности определяется любым своим представителем, т.е. произвольным элементом этого класса. Так, любой класс равных дробей можно задать, указав любую дробь, принадлежащую этому классу. Определение класса эквивалентности по одному представителю позволяет вместо всех элементов множества изучать совокупность отдельных представителей из классов эквивалентности. Например, отношение эквивалентности «иметь одинаковое число вершин», заданное на множестве многоугольников, порождает разбиение этого множества на классы треугольников, четырехугольников, пятиугольников и т.д. Свойства, присущие некоторому классу, рассматриваются на одном его представителе.

Разбиение на классы эквивалентности

- *В-третьих, разбиение множества на классы с помощью отношения эквивалентности используется для введения новых понятий. Например, понятие «пучок прямых» можно определить как то общее, что имеют параллельные между собой прямые.*
- *Вообще любое понятие, которым оперирует человек, представляет собой некоторый класс эквивалентности. «Стол», «дом», «книга» - все эти понятия являются обобщенными представлениями о множестве конкретных предметов, имеющих одинаковое назначение.*

Отношение порядка

- **Отношение R на множестве X называется отношением порядка, если оно одновременно обладает свойством антисимметричности и транзитивности.**
- *Примерами отношений порядка могут служить: отношения «меньше» на множестве натуральных чисел; отношения*
- *«короче» на множестве отрезков, поскольку они антисимметричны и транзитивны.*
- *Если отношение порядка обладает еще свойством связанности, то говорят, что оно является отношением линейного порядка.*
- *Например, отношение «меньше» на множестве натуральных чисел является отношением линейного порядка, так как обладает свойствами антисимметричности, транзитивности.*

Отношение порядка

- **Множество X называется упорядоченным, если на нем задано отношение порядка.**
- *Так, множество N натуральных чисел можно упорядочить, если задать на нем отношение «меньше».*
- *Например, множество натуральных чисел можно упорядочить и с помощью отношения «меньше», и с помощью отношения «кратно» - оба они являются отношениями порядка.*
- *Не следует думать, что все отношения делятся на отношения эквивалентности и отношения порядка. Существует огромное число отношений, не являющихся ни отношениями эквивалентности, ни отношениями порядка.*
-